普通高等教育"十三五"规划教材
电工电子基础课程规划教材

信号与系统分析基础

■ 成开友　刘长学　编著

中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等教育“十三五”规划教材
电工电子基础课程规划教材

信号与系统分析基础

成开友　刘长学　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

信号与系统是高等学校重要的电类专业基础课程。本书是根据我国高等教育发展的新形势，依据教育部教指委制定的课程教学基本要求，以及高等学校培养应用型高级技术人才的定位编写的简明教材。该教材突出基础，给出大量实例，注重典型题目的分析。主要内容包括：信号和系统的基本概念、连续系统的时域分析、离散系统的时域分析、连续系统的频域分析、连续系统的 s 域分析、离散系统的 z 域分析和系统函数等，每章后附大量习题，并提供配套电子课件和习题参考答案。

本书可作为高等学校电类及相关各专业信号与系统课程的本科生教材，也可作为相关工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统分析基础 / 成开友，刘长学编著. — 北京：电子工业出版社，2016.4
ISBN 978-7-121-28274-4

I. ①信… II. ①成 ②刘… III. ①信号分析－高等学校－教材 ②信号系统－系统分析－高等学校－教材
IV. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 045327 号

策划编辑：王羽佳
责任编辑：周宏敏
印　　刷：北京京海印刷厂
装　　订：北京京海印刷厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：16.75　字数：484 千字
版　　次：2016 年 4 月第 1 版
印　　次：2016 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：3000 册　　定价：39.90 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254535，wyj@phei.com.cn。

前　　言

信号与系统课程是高等学校理工科重要的电类专业基础课。通过本课程的学习，可以掌握信号与系统的基本概念、基本理论和基本的分析方法，为后续课程的学习打下良好的理论基础。

随着高等教育大众化的进一步深入，各高校对教材的层次性要求越来越高。本书主要面向普通本科高校，在符合教育部电工电子基础课程教学指导委员会制定的“信号与系统课程教学基本要求”的基础上，以实用、够用为度的原则，我们编写了本书。本书主要内容突出基础理论，注重典型题目的分析，讲解深入浅出，通俗易懂。

本书的主要内容包括：连续信号与离散信号的时域分析和频域分析、线性时不变系统的描述和特性、连续信号通过线性时不变系统的时域分析、实频域分析、复频域分析；离散信号通过线性时不变系统的时域分析、z 域分析；最后还简单介绍了系统函数。

为了使读者能够更好地理解和运用所学的知识，本书精选了大量例题和习题，并提供配套电子课件和习题参考答案等教辅资料。请登录华信教育资源网http://www.hxedu.com.cn注册下载。

本书力图体现以下几方面的特色。

理念：在我国高等教育从精英教育向大众化教育的转型阶段，教材也必须适应这个变化，才能在现代高等教育中很好地发挥提高教学质量、培养高水准人才的作用。几十年体系、内容变化缓慢的教材无法适应今天的快节奏。本书的编写充分体现了“以学生为中心，以教师为主导”的原则。

定位：本书的编写本着“知行并重，实践育人”的理念，在内容和体系上与传统同类教材有所区别。

思路：注重基本概念、基本理论和基本分析方法，不在计算上花费太多时间和精力，习题侧重于相关概念及知识的理解与考察。

实用：教材突出理论与实际生活和工程实践的结合，使读者感到学有所用，学有所趣。

简明：简明扼要，力争做到适用、实用和好用。

本书由成开友和刘长学编写，其中成开友负责第 2 章、第 3 章、第 5 章、第 6 章、附录和参考答案的编写，并负责全书的统稿工作；刘长学负责第 1 章、第 4 章和第 7 章内容的编写工作。

本书的编写和出版得到了盐城工学院教材出版基金的资助，得到了盐城工学院电气工程学院全体同仁的支持和帮助，电气工程学院何坚强教授以及信息工程学院王吉林教授审阅了全书并对本书的编写工作提出了不少宝贵建议，在此一并致以衷心的感谢和敬意！

最后，感谢使用本书的各高等学校同行和读者，由于编者水平有限，书中一定还存在许多不妥和错误之处，恳请读者给予批评指正。

编著者

2016 年 4 月

目　录

第 1 章　信号和系统的基本概念

本章主要介绍信号和系统的概念和它们的分类方法，信号的描述、信号与系统分析中经常用到的几种典型信号的特点、信号的基本运算，以及系统的描述、线性非时变系统的特性和系统的一般分析方法。

1.1　概　　述

在物理学中，人们通常把载有一定信息的电、光、声等称为信号。以电流、电压、电荷、磁通和电磁波形式出现的信号为电信号，以光波形式出现的信号为光信号，以声波为载体的信号为声信号。用于发出、传输、接收、转换、分配、存储和加工处理信号的装置叫系统。与信号类型相对应，系统也有电学系统、光学系统和声学系统等之分。

与其他类型信号相比电信号具有以下几个重要特点。一是更容易实现与其他类型信号之间的相互转换。通过各种换能器就能方便地完成这项工作，比如通过传声器可以把声音信号转变为对应的音频电信号，通过扬声器又可以方便地把音频电信号还原成声音信号。二是更容易实现远距离传输。现代通信技术就是通过电磁波作为信息载体，把信息带到地球的每个角落的。我们用的手机就是利用这个技术实现远距离双向通信的。三是电信号更容易进行各种形式的加工处理，比如滤波、整形、限幅、线性放大、压缩、叠加、调制等。四是电信号更容易被储存。电信号以数据的方式有规律地存储在磁盘、光盘等存储设备中。随着电子计算机技术的发展和普及，数据的存储量越来越大，处理信号的能力越来越强，处理信号的过程越来越便捷。正因为如此，其他形式信号的处理一般都是将它们先转变为电信号加工处理，处理工作完成之后，再通过换能器把加工处理好的电信号还原为非电信号，过程如图 1.1.1 所示。因此，研究电信号及其处理的意义就显得及其重要，本教材也只介绍电信号和电系统的分析方法。

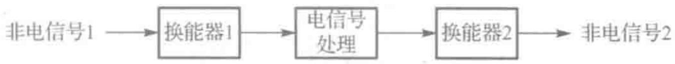

图 1.1.1　非电信号的处理过程框图

1.2　信号的描述与分类

1.2.1　信号的描述

描述信号的方法通常使用函数表达式，即用函数的方法来描述电信号随自变量的变化关系。因此，在信号系统中往往不去区分“信号”和“函数”。说到函数指的就是信号，说到信号就是指函数。提到函数我们就想到它的另外一种描述方式，那就是函数图形，即在以函数的自变量为横坐标、函数值为纵坐标的直角坐标系里，把函数值随自变量的关系用曲线表示出来。在时间域（简称时域）中信号的值随时间 t 变化，其函数表达式的自变量就是时间。信号的值随时间 t 变化的曲线称为信号的波形图。在电路实验中，周期性信号的波形图可以用示波器来观察。显然，与函数表达式相比，用波形图来描

述时域信号显得更加形象直观。当我们把函数通过变换变成非时域信号时，函数和自变量都将发生改变，但依然可以用表达式或图形来描述这个域里面的信号。当然，不是所有的信号都可以用函数表达式来描述的，像随机信号等不确定信号就不能用表达式描述。

1.2.2 信号的分类

根据电信号的特点，我们可以把信号分为确定性信号与随机信号、连续信号和离散信号、周期信号和非周期信号、能量有限信号与功率有限信号，现分述如下。

1. 确定性信号和随机信号

若信号可以用确定的图形、曲线或函数表达式来准确描述，则称该信号为确定性信号。对于这种信号，给定一个自变量的值，就能确定其相应的信号值。

如果信号不遵循确定的规律，事先将无法预知它的变化规律，这种信号称为随机信号或不确定信号，如马路上的噪声、电路中的各种干扰、电网的电压波动等都属于随机信号。随机信号是不能用函数式来描述的。随机信号是客观存在的信号，它服从统计规律，所以研究随机信号要用到概率统计的方法。尽管如此，研究确定性信号仍是十分重要的，因为它不仅广泛应用于系统分析设计中，同时也是进一步研究随机信号的基础。本教材主要研究确定性信号。

2. 连续时间信号和离散信号

如果信号在某个时间区间内除有限个间断点外都有定义，就称该信号在此区间内为连续时间信号，简称连续信号。这里“连续”一词是指在定义域内（除有限个间断点外）信号自变量是连续可变的。至于信号的取值，在值域内可以是连续的，也可以是不连续的。

图 1.2.1(a)所示的余弦信号就是一个典型的连续信号，其表达式为

$$f_1(t) = A\cos(\pi t)$$

式中，A 是常数。其自变量 t 在定义域 $(-\infty,\infty)$ 内连续变化，信号在值域$[-A, A]$上连续取值。为了简便起见，若信号表达式中的定义域为 $(-\infty,\infty)$，则可省去不写。也就是说，凡没有标明时间区间时，均默认其定义域为 $(-\infty,\infty)$ 。

图 1.2.1(b)是单位阶跃信号，通常记为 $\varepsilon(t)$，其表达式为

$$f_2(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

信号定义域为 $(-\infty,\infty)$，信号值只取 0 或 1。虽然信号在 $t=0$ 处有一个间断点，但它依然属于连续信号。

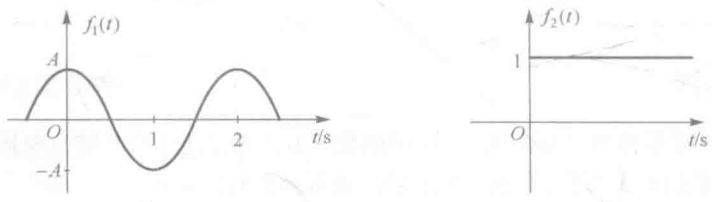

图 1.2.1 连续信号举例

对于间断点处的信号值一般不作定义，这样做不会影响分析结果。如有必要，也可按高等数学规定，定义信号 $f(t)$ 在间断点 $t=t_0$ 处的信号值等于其左极限 $f(t_{0-})$ 与右极限 $f(t_{0+})$ 的算术平均值，即

$$f(t_0)=\frac{1}{2}\left[f(t_{0-})+f(t_{0+})\right]$$

这样，图 1.2.1(b)中的信号 $\varepsilon(t)$ 也可表示为

$$f_2(t)=\varepsilon(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0.5, & t=0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

上述信号的自变量 t 都有意义，或只有有限个间断点，它们都属于连续信号。如果信号仅在离散时刻点上有定义，则称这样的信号为离散时间信号，简称离散信号。这里“离散”一词表示自变量只取离散的数值，相邻离散时刻点的间隔可以是相等的，也可以是不相等的。在这些离散时刻点以外，信号无定义。而信号的值域可以是连续的，也可以是不连续的。

定义在等间隔离散时刻点上的离散信号也称为序列，通常记为 $f(k)$，其中 k 称为序号。序号 m 相应的序列值 $f(m)$称为信号的第 m 个样值。序列 $f(k)$的数学表达式可以写成闭式，也可以直接列出序列值或者写成序列值的集合。例如，图 1.2.2(a)所示的指数序列可表示为

$$f_1(k)=\begin{cases}0, & k<0\\ \mathrm{e}^{-\alpha k}, & k\geqslant 0,\ \alpha>0\end{cases}$$

其中 k 只能取整数。图 1.2.2(b)所示序列的表达式为

$$f_2(k)=\begin{cases}0, & k=-1\\ 1, & k=0\\ 1, & k=1\\ 0.5, & k=2\\ -1, & k=3\\ 0, & k=4\end{cases}$$

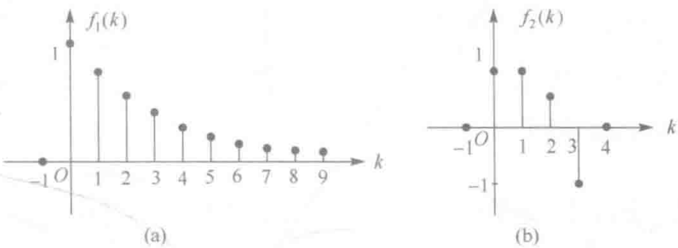

图 1.2.2　离散信号举例

或

$$f_2(k)=\{0,\underset{\underset{k=0}{\uparrow}}{1},1,0.5,-1,0\}$$

在工程应用中，常常把幅值可连续取值的连续信号称为模拟信号；把幅值可连续取值的离散信号称为抽样信号；而把幅值只能取某些规定数值的离散信号称为数字信号。为了方便表达式书写起见，常用 $f(\cdot)$ 来代表 $f(t)$ 和 $f(k)$，若括号中的点用时间 t 代替，此式的信号为连续信号；若括号中的点被 k（只能取整数）取代则该信号为离散信号。

3．周期信号与非周期信号

对于连续信号 $f(t)$，若对所有 t 均满足

$$f(t)=f(t-mT),\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1-2-1}$$

则称 $f(t)$ 为连续周期信号，满足上式的最小 T 值称为 $f(t)$ 的周期。

对于离散信号 $f(k)$，若对所有 k 均满足

$$f(k)=f(k-mN),\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1-2-2}$$

则称 $f(k)$为离散周期信号，满足上式的最小 N 值称为 $f(k)$的周期。

图 1.2.3(a)绘出了一个连续周期信号的例子，其周期为 2（如果 t 未标单位，表示默认单位为秒）；图 1.2.3(b)绘出了一个离散周期信号的例子，其周期为 5。

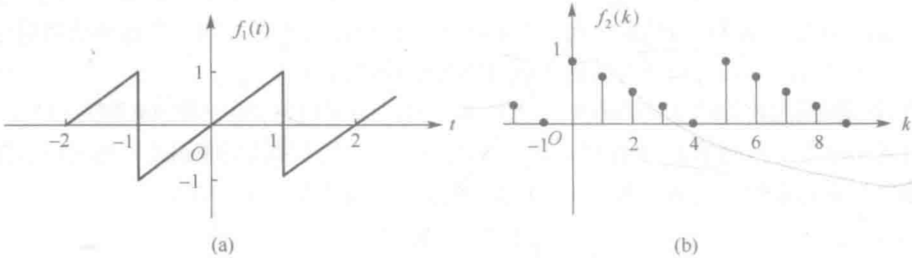

图 1.2.3 周期信号举例

不满足式（1-2-1）或式（1-2-2）的信号称为非周期信号。非周期信号的幅值随时间不具有周而复始变化的特性，它不具有周期，或者认为它的周期趋于无限大。

一般周期信号有如下特点：

（1）无始无终，定义域是 $(-\infty,\infty)$；

（2）波形变化有规律，周而复始地重复某一段波形；

（3）周期比为有理数的周期信号之和仍然为周期信号，其周期等于相加的各周期信号的最小公倍数。

例 1.2.1 判断下列连续信号是否为周期信号，若是则计算其周期。

（1）$f_1(t)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}t+\dfrac{\pi}{6}\right)$

（2）$f_2(t)=\cos(2t)+\cos(3t)$

（3）$f_3(t)=\cos(2t)+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$

解:（1）$f_1(t)$ 为余弦信号，它是周期信号，因为它的角频率 $\omega_1=\dfrac{\pi}{3}(\mathrm{rad/s})$，所以它的周期为：

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=6(\mathrm{s})$$

（2）$f_2(t)$ 是两个余弦函数之和，其中

$\cos(2t)$ 的周期为 $T_1=\pi\,(\mathrm{s})$，$\cos(3t)$ 的周期为 $T_2=2\pi/3\,(\mathrm{s})$

$$T_1/T_2=3/2$$

比值为有理数，因此 $f_2(t)$ 的周期为 T_1 和 T_2 的最小公倍数，即 $T=2\pi\,(\mathrm{s})$。

（3）$f_3(t)$ 是一个正弦函数和一个余弦函数之和，其中

$\cos(2t)$ 的周期为 $T_1=\pi\,(\mathrm{s})$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$ 的周期为 $T_2=6\,(\mathrm{s})$

$$T_1/T_2=\pi/6$$

比值为无理数，因此 $f_3(t)$ 为非周期性信号。

例 1.2.2 判断 $f(k)=\cos(\omega_0 k)$ 是否为周期信号，若是则计算其周期。

解：因为

$$\begin{aligned}f(k)=\cos(\omega_0 k)&=\cos(\omega_0 k-2m\pi)\\&=\cos\left[\omega_0\left(k-m\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]\end{aligned}$$

其中，m 为整数。由此式可见，当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时，$f(k)$ 为周期性信号，并且周期为 $N=\frac{2\pi}{\omega_0}$。而当 $\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{N}{M}$ 为有理数时，余弦序列依然是周期性的，不过周期为 $N=M\frac{2\pi}{\omega_0}$。这里的 M、N 为互质的整数。当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数时，$f(k)$ 为非周期性序列。

例 1.2.3 判断下列离散信号是否为周期信号，若是则计算其周期。

（1）$f_1(k)=\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)$ （2）$f_2(k)=\cos(3\pi k)$

（3）$f_3(k)=\cos(10k)$ （4）$f_4(k)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi k\right)+\cos\left(\frac{1}{3}\pi k\right)$

解：（1）$\omega_{01}=\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{\omega_{01}}=6$ 为整数，$f_1(k)$ 是周期序列，周期 $N_1=6$。

（2）$\omega_{02}=3\pi$，$\frac{2\pi}{\omega_{02}}=\frac{2}{3}$ 为有理数，$f_2(k)$ 是周期序列，周期 $N_1=\frac{2}{3}\times 3=2$。

（3）$\omega_{03}=10$，$\frac{2\pi}{\omega_{03}}=\frac{\pi}{5}$ 为无理数，$f_3(k)$ 是非周期序列。

（4）$f_4(k)$ 中 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi k\right)$ 是周期序列，周期 $N_1=4$；$\cos\left(\frac{1}{3}\pi k\right)$ 也是周期序列，周期是 $N_2=6$，所以 $f_4(k)$ 也是周期序列，周期 N 为 N_1 和 N_2 的最小公倍数，即 $N=12$。

4．能量有限信号与功率有限信号

若将信号 $f(t)$ 设为电压或电流信号，则加载在 1Ω电阻上产生的瞬时功率为

$$p(t)=|f(t)|^2$$

定义信号在时间区间 $(-\infty,\infty)$ 内消耗的能量为信号 $f(t)$ 的能量，则信号的能量为

$$E=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-2-3}$$

信号在时间区间 $(-\infty,\infty)$ 内的平均功率为

$$P=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-2-4}$$

如果信号的能量 E 为有限值（此时平均功率 P=0），就称该信号为能量有限信号，简称能量信号。如果信号的平均功率为有限值（此时信号能量 $E\to\infty$），则称此信号为功率有限信号，简称功率信号。

显然，根据上述定义，时限信号（在有限时间区间内存在非零值的信号）必定是能量信号。周期信号必定是功率信号，而非周期信号可能是能量信号，也可能是功率信号，还有可能既非功率信号又非能量信号。

离散信号 $f(k)$的能量定义为

$$E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(k)|^2 \tag{1-2-5}$$

1.3 几种典型信号

在多种多样的信号中，有一些是常见的基本信号，许多复杂的信号可由它们表示出来。

1.3.1 典型的连续信号

1. 稳恒直流信号

在时域中，信号是不随时间变化的常数，表达式为

$$f(t)=A$$

波形图如图 1.3.1(a)所示，显然直流信号为功率信号，平均功率为 $P=A^2$。

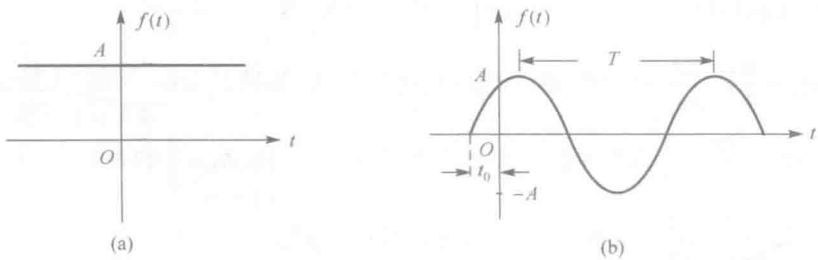

图 1.3.1 直流信号和正弦信号波形图

2. 正（余）弦信号

正弦信号的表达式

$$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$$

式中，A 为正弦信号的幅值，ω 为角频率，φ 为初相位。这三个量合称正弦信号的三要素。信号的周期 T、频率 f 和角频率 ω 的关系为

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$

周期 T 的单位：秒（s）；角频率 ω 的单位：弧度/秒（rad/s）；初相位 φ 的单位：度或弧度（°或 rad）。

正弦信号是周期无时限信号，它的微分和积分的结果依然是同频率的正弦信号，它与余弦信号关系为

$$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)=A\cos(\omega t+\varphi-90^\circ)$$

正弦信号 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的波形图如图 1.3.1(b)所示，其中 $\varphi=\omega t_0$ 。

3. E 指数信号

E 指数信号的表达式是

$$f(t)=Ae^{\alpha t}$$

其中，A 为常数，α 既可以为实数常数也可以是复数常数。

当α为实数常数时，$f(t)$就为实 E 指数信号。$\alpha>0$时，$f(t)$随时间单调增长；$\alpha<0$时，$f(t)$随时间单调衰减；$\alpha=0$时，$f(t)=A$为直流信号，E 指数的波形图如图 1.3.2(a)所示。事实上，用得较多的指数信号为单边的衰减 E 指数信号：

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ A\mathrm{e}^{-\alpha t}, & t>0\end{cases}$$

其中，$\alpha>0$，并称$\tau=1/\alpha$为 E 指数的时间常数。单边 E 指数的波形图如图 1.3.2(b)所示。

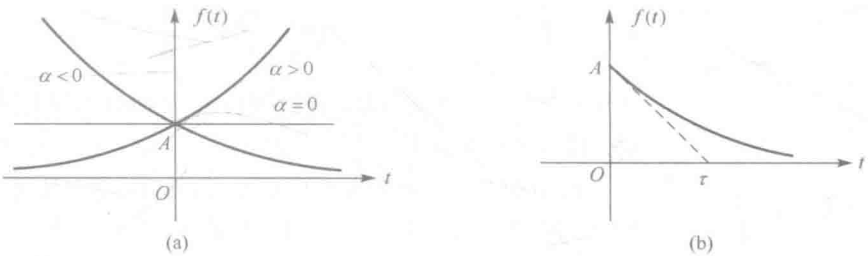

图 1.3.2　实数 E 指数信号

当α为复数常数时，$f(t)$就为复 E 指数信号：

$$f(t)=A\mathrm{e}^{\alpha t}=A\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}$$

由欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\cos(\omega t)+\mathrm{j}\sin(\omega t)$$

于是复指数信号可以表示为

$$f(t)=A\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)+\mathrm{j}A\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

图 1.3.3(a)、(b)、(c)依次绘出了当$\sigma>0$、$\sigma=0$和$\sigma<0$时复 E 指数信号虚部的波形图。

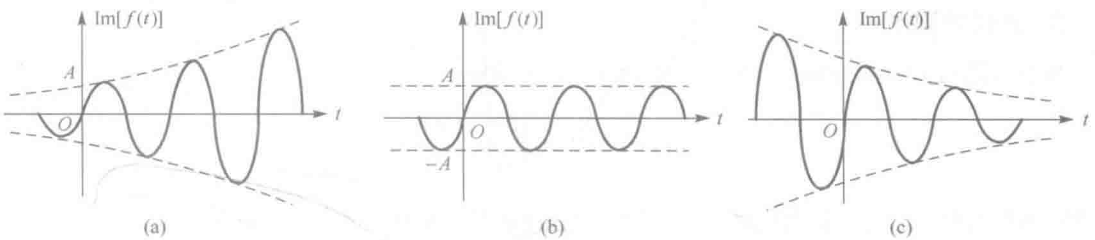

图 1.3.3　复数 E 指数信号虚部波形图

4. 取样信号

取样信号用 Sa(t)表示，其表达式为

$$f(t)=\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin(t)}{t}$$

显然，取样函数是偶函数，图形关于纵轴对称。波形图如图 1.3.4 所示。取样信号不是实际物理装置所能产生的信号，但在信号分析中占有比较重要的地位。

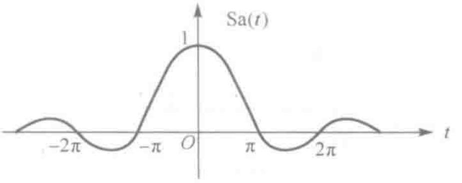

图 1.3.4　取样信号

1.3.2 奇异信号

这里讲的奇异信号依然属于连续时间信号，基本的奇异信号包括：单位斜变信号 $r(t)$ 、单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 、单位冲激信号 $\delta(t)$ 和冲激偶信号 $\delta'(t)$ 。下面分别予以介绍。

1. 单位斜变信号

单位斜变信号简称为斜变信号，记为 $r(t)$ ，它的表达式为

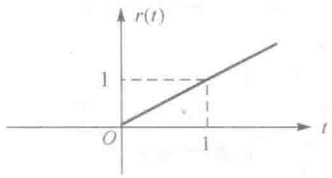

图 1.3.5 单位斜变信号

$$r(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geqslant 0\end{cases}$$

单位斜变信号是连续函数，在区间 $(-\infty<t<\infty)$ 上没有间断点。$t<0$ 时，信号的值全为 0，

$t>0$ 时是一条斜率为 1 的射线。斜变信号是单边函数，其导数在 t=0 点不连续。单位斜变信号的波形图如图 1.3.5 所示。

2. 单位阶跃信号

单位阶跃信号简称为阶跃信号，记为 $\varepsilon(t)$ ，它的表达式为

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

显然，阶跃信号在 t=0 点不连续，函数值发生了跳跃。阶跃信号的波形图如图 1.3.6 所示。

单位阶跃信号与单位斜变信号的关系为

$$\varepsilon(t)=\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-3-1}$$

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(x)\mathrm{d}x=t\varepsilon(t) \tag{1-3-2}$$

3. 单位冲激信号

单位冲激信号简称为冲激信号，记为 $\delta(t)$ ，它的表达式为

$$f(t)=\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$$

把冲激函数与时间轴包围的面积定义为冲激强度或冲激量，单位冲激信号的冲激强度为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0-}^{0+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

冲激信号的波形图如图 1.3.7(a)所示，其中冲激函数箭头旁边用括号括起来的 1 代表它的冲激量为 1。冲激函数可以看成图 1.3.7(b)所示的矩形脉冲 $p(t)$ 当脉冲宽度 $\tau\to 0$ 时的极限。

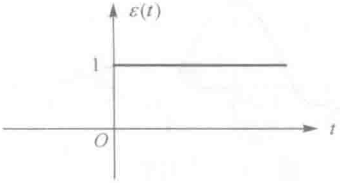

图 1.3.6 单位阶跃信号波形图

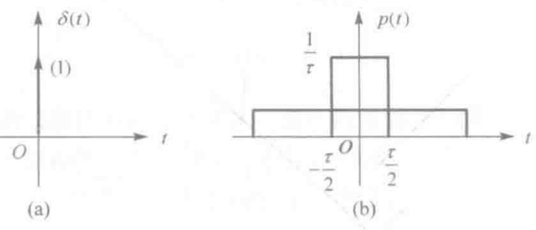

图 1.3.7 单位冲激信号波形图

冲激函数是偶函数，$\delta(t)=\delta(-t)$，波形图关于纵轴对称。另外，冲激函数具有“筛选”性质，即

$$\left.\begin{aligned}f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)\\ f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)\end{aligned}\right\}\tag{1-3-3}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\\ \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)\end{aligned}\right\}\tag{1-3-4}$$

冲激信号与阶跃信号的关系为

$$\left.\begin{aligned}\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\\ \varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\right\}\tag{1-3-5}$$

4. 冲激偶信号

单位冲激函数的微分定义为冲激偶函数，记为 $\delta'(t)$。这个函数可以用矩形单脉冲的导数在脉冲宽度 τ 趋于 0 的极限来逼近，如图 1.3.8 所示。

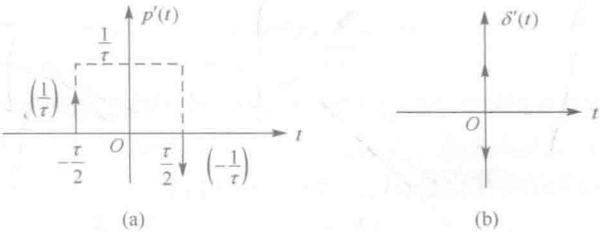

图 1.3.8　冲激偶函数

从图 1.3.8(b)可以看出，冲激偶信号是由一对正负冲激组成的函数，两个冲激的冲激量都是无穷大。另外，冲激偶函数是奇函数，即

$$\delta'(t)=-\delta'(-t)$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0$$

因为

$$[f(t)\delta(t)]'=f(t)\delta'(t)+f'(t)\delta(t)$$

所以

$$f(t)\delta'(t)=[f(t)\delta(t)]'-f'(t)\delta(t)$$

根据冲激函数的筛选特性：

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)\tag{1-3-6}$$

1.3.3 基本的离散信号

1. 单位样值信号

单位样值信号的定义为

$$f(k)=\delta(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

其图形如图 1.3.9 所示。

2. 单位阶跃序列

单位阶跃序列的定义为

$$f(k)=\varepsilon(k)=\begin{cases}1, & k\geqslant 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

单位阶跃序列的图形如图 1.3.10 所示。

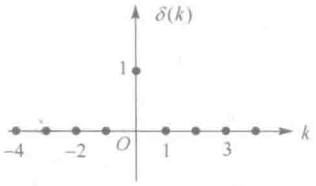

图 1.3.9 单位样值函数

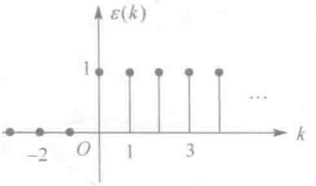

图 1.3.10 单位阶跃序列

单位阶跃序列与单位样值序列的关系为

$$\left.\begin{aligned}\delta(k)&=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)\\ \varepsilon(k)&=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n)\end{aligned}\right\}\tag{1-3-7}$$

当然，除了上述介绍的典型的几个信号之外，信号与系统中还经常遇到门函数、符号函数和单边E 指数序列等信号，这些在后面的例题中介绍。

例 1.3.1 根据奇异函数的性质化简表达式或求表达式的值。

（1）$\cos(t)\delta(t)$　（2）$\tan(t)\delta\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)$　（3）$\dfrac{\mathrm{d}[\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)]}{\mathrm{d}t}$

（4）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}\delta(t)\mathrm{d}t$　（5）$\displaystyle\int_{-1}^{1}[\delta(t-10)+\delta'(t)]\mathrm{d}t$　（6）$\displaystyle\int_{-\infty}^{t}(1-x)\delta'(x)\,\mathrm{d}x$

解：（1）根据冲激信号的筛选性质，即式（1-3-3），得

$$\cos(t)\delta(t)=\cos(0)\delta(t)=\delta(t)$$

（2）根据冲激信号的筛选性质，即式（1-3-3），得

$$\tan(t)\delta\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\delta\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\delta\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$$

（3）

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)]}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2t}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}=-2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{-2t}\delta(t)$$

根据冲激信号的筛选性质得

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)]}{\mathrm{d}t}=-2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)+\delta(t)$$

（4）根据冲激信号的筛选性质，即式（1-3-3）和式（1-3-4），得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(0)\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

（5）

$$\int_{-1}^{1}[\delta(t-10)+\delta'(t)]\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\delta(t-10)\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\delta'(t)\,\mathrm{d}t$$

因为 $\delta(t-10)$ 的冲激不在区间 $(-1<t<1)$，所以第一项积分为 0；而冲激偶函数为奇函数，所以第二项积分也为 0，所以

$$\int_{-1}^{1}[\delta(t-10)+\delta'(t)]\mathrm{d}t=0$$

（6）首先对积分号内部函数进行化简，根据冲激偶函数的性质：

$$(1-x)\delta'(x)=\delta'(x)+\delta(x)$$

所以

$$\int_{-\infty}^{t}(1-x)\delta'(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{t}\delta'(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{t}\delta(x)\mathrm{d}x=\delta(t)+\varepsilon(t)$$

1.4　信号的基本运算

信号的基本运算包括信号的相加（减）和相乘，信号波形的翻转、平移和展缩，连续信号的微分和积分以及离散信号的差分等运算。

1.4.1　相加（减）和相乘

两个信号相加（减），其和（差）信号在任意时刻的值等于两信号在该时刻的信号值之和（差）。

两个信号相乘，其积信号在任意时刻的信号值等于两信号在该时刻的信号值之积。

设两个连续信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，则其和（差）信号 $s(t)$与积信号 $p(t)$可表示为

$$s(t)=f_1(t)\pm f_2(t)\qquad p(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)$$

同样，若有两个离散信号 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$，则其和（差）信号 $s(k)$与积信号 $p(k)$可表示为

$$s(k)=f_1(k)\pm f_2(k)\qquad p(k)=f_1(k)\cdot f_2(k)$$

作为两个例子，图 1.4.1(a)和图 1.4.1(b)分别给出了一对连续信号和一对离散信号以及与它们相应的和信号与积信号波形。

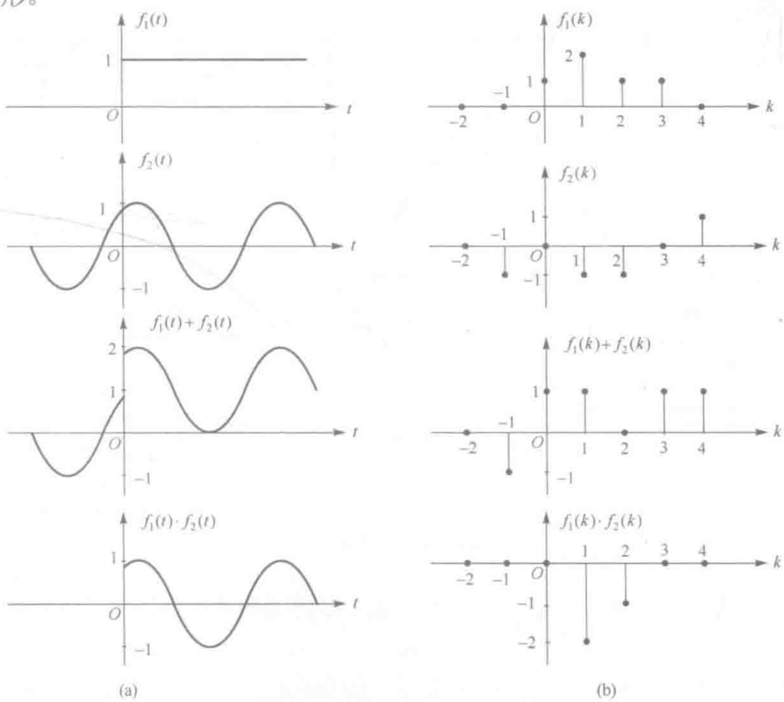

图 1.4.1　信号的相加和相乘