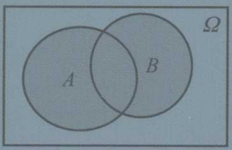
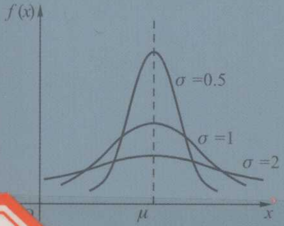
自主创新
方法先行

概率论与数理统计

主　编　贺兴时
副主编　薛　红





高等教育出版社

自主创新
方法先行

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

主　编　贺兴时
副主编　薛　红
编　委　成　涛　王晓东　续秋霞
王　燕　王慧敏

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是科技部创新方法工作专项项目子题“科学思维、科学方法在概率统计课程中的应用与实践”的研究成果，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布数字特征和极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、线性统计模型。每章后配有习题，附录介绍了SAS软件，并给出部分例题的SAS参考程序和部分习题参考答案。

本书可作为高等学校理工类、经济管理类本科生的概率论与数理统计课程教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 贺兴时主编. -- 北京 : 高等教育出版社，2015.8

ISBN 978-7-04-043384-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①贺… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第166225号

策划编辑 张长虹　责任编辑 张长虹　特约编辑 边晓娜　封面设计 姜 磊
版式设计 余 杨　插图绘制 邓 超　责任校对 刘 莉　责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	北京市密东印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　张	17.75	版　次	2015年8月第1版
字　数	320千字	印　次	2015年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	28.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 43384-00

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学学科，在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域有着极其广泛的应用。近十多年来，随着计算机技术的迅速发展和数学软件的大量出现，其应用得到更为长足的发展，特别是大数据时代的到来给这一学科带来新的机遇和挑战。概率论与数理统计已经成为高等学校理工类和经济管理类专业的一门重要基础课，在学生综合能力培养中占有十分重要的地位。

本书是编者在长期从事概率论和数理统计教学的基础上，根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新颁布的《大学数学课程教学基本要求（2014 年版）》中的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"和"经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求"，并参考近些年"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"编写而成的。

为了便于学生更好地理解和掌握概率论和数理统计的基本概念、理论和方法，培养学生利用随机数学的思想分析和解决实际问题的能力，本教材在内容安排上，采取从工程技术及经济领域的应用性问题的分析入手，引入概率论和数理统计的基本概念，尽量注意由浅入深、循序渐进原则，力求既注重基本概念、基本理论和基本方法的阐述，又注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养；为了方便学生利用所学的统计方法解决工程和经济问题，本教材附录增加了 SAS 软件简介和部分例题 SAS 参考程序。

本书由贺兴时、薛红、成涛、王晓东、续秋霞、王燕、王慧敏编写，最后由贺兴时统稿。在本书编写过程中，得到了高等教育出版社和西安工程大学理学院领导的大力支持。理学院的老师在试用初稿的过程中提出了不少修改意见。在此，谨向他们表示感谢！但由于水平有限，书中仍会有错漏与不妥之处，作者衷心希望广大同行不吝赐教。

编　者

2015.4

目　　录

第1章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.随机事件与概率是概率论中最基本、最重要的概念之一.本章将介绍随机事件与概率的概念,讨论随机事件的关系与运算以及概率的性质和计算方法.

§1.1　随机事件

在自然界与人类社会活动中,常常会出现各种各样的现象.其中一类现象称为**确定性现象**,该类现象在一定条件下必然发生或必然不发生.例如,向上抛一块石头,石头必然会掉到地上;在标准大气压下,水加热到 100 ℃时,必然沸腾;在没有水分的条件下,种子发芽是不可能的.确定性现象有一个共同特点:在一定条件下,其结果是完全确定的.而另一类现象则不然,它在一定条件下可能发生也可能不发生.例如,掷一枚硬币落在平面上,其结果可能正面朝上,也可能反面朝上,在每次投掷之前,无法确定出现何种结果;观察新生儿的性别,可能是男孩,也可能是女孩;从一批产品中任取一件产品可能是正品,也可能是次品;测试某型号纱线的强力,它可能是某区间上的这个值,也可能是那个值.这类现象虽然形式不同,但也有一个共同特点:在一定条件下,可能出现这个结果,也可能出现那个结果,试验前不能确定出现哪个结果,即结果的出现是偶然的.我们称这类现象为**随机现象**.概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

一、随机试验

随机现象表面上似乎无规律可言,即可能出现这个结果,也可能出现那个结果,但实质上这种现象有其内在规律.例如,在发行福利彩票的现场,我们购买一张彩票,可能中奖,也可能不中奖,但当购买的彩票数量越多,中奖的机会就越多,并且中奖次数与购买彩票数量的比值随着购买量的增多越来越接近彩票的设奖率.又如,在某天中午 1 小时内,某交通路口汽车的流量是不确定的,但实际上,该交通路口汽车的流量具有规律性.为了对随机现象的统计规律进行研究,需安排试验获取相关资料.这里所说的试验具有如下特点:

(1) 试验具有明确的目的;

(2) 可以在相同的条件下重复进行;

(3) 试验的结果至少两个,且事先能够明确全部可能的结果;

(4) 每次试验前不可能预料会出现哪个结果.

我们称满足上述这些特点的试验为**随机试验**,常用字母 E 表示.

例 1.1　下列试验都是随机试验:

E_1:掷一枚硬币,观察硬币着地时正反面出现的情况;

E_2:掷一枚骰子,观察骰子出现的点数;

E_3:在一批产品中,任取 n 件,记录次品的个数;

E_4:记录某电话总台在上午一段时间内电话被呼叫的次数;

E_5:观察某交通路口在中午 1 小时内的汽车流量;

E_6:从某厂生产的电子产品中,任取一件测试其使用寿命.

在现实生活中,存在着许许多多随机试验的例子,读者可根据自己所学专业举出相关例子.

二、样本空间

进行随机试验,我们的目的就是要弄清这个试验可能出现的结果.我们称随机试验中每一个可能出现的结果为样本点,记作 ω. 全体样本点组成的集合(即试验所有可能出现的结果构成的集合)称为**样本空间**,记作 Ω.

例 1.1 续　给出例 1.1 中随机试验的样本空间.

E_1: $\Omega_1=\{$正面朝上,正面朝下$\}$, 含有 2 个样本点;

E_2: $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$, 含有 6 个样本点;

E_3: $\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,n\}$,含有 $n+1$ 个样本点;

E_4: $\Omega_4=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$, 含有可列个样本点;

E_5: $\Omega_5=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$, 含有可列个样本点;

E_6: $\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\}$, 它由所有非负实数组成,含有不可列个样本点.

由此我们可以看出,样本空间最少含有 2 个样本点.样本点的个数可能有限,也可能无限;无限样本空间可能可列,也可能不可列.

三、随机事件

在研究随机现象时,我们不但关心试验后所有样本点是什么,而且关心满足某些条件的样本点是否出现.例如,测试某电子产品的寿命以确定该电子产品是否合格.若假定该电子产品寿命超过 5×10^4 小时认为合格,则在测试中我们关心满足条件"寿命超过 5×10^4 小时"的样本点是否出现,而"寿命超过 5×10^4 小时"是样本空间的子集.我们称样本空间的子集为**随机事件**.该子集在一次试

验中可能有样本点出现,也可能没有样本点出现.若该子集有样本点出现,我们称该事件发生.随机事件常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$,或用加下标的大写字母 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 来表示.

例 1.2 在有 2 件次品(编号为 1,2)和 8 件正品(编号为 3,4,…,10)的产品中,随机取出两件,观察其结果.试验 E 的样本空间为

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),\cdots,(1,10),(2,3),\cdots,(9,10)\},$$

共 45 个样本点.若令 $A_1=\{(1,2)\},A_2=\{(1,3)\},\cdots,A_{45}=\{(9,10)\}$,则 $A_1,A_2,\cdots,A_{45}$ 都是随机事件,且每个仅含有试验 E 的样本空间 Ω 的一个样本点.

若令 A 表示"取到次品",B 表示"取到 1 件次品",C 表示"取到的 2 件全为正品",则

$$A=\{(1,2),(1,3),\cdots,(1,10),(2,3),(2,4),\cdots,(2,10)\},$$
$$B=\{(1,3),(1,4),\cdots,(1,10),(2,3),(2,4),\cdots,(2,10)\},$$
$$C=\{(3,4),(3,5),\cdots,(9,10)\},$$

它们都是样本空间 Ω 的子集,所以,A,B,C 都是随机事件.

由例 1.2 知,有的随机事件仅含有样本空间的单个样本点,有的则含有样本空间的多个样本点,为此,我们根据事件包含样本空间中样本点的个数可将事件分类如下.

基本事件:由单个样本点构成的事件称为**基本事件**.例 1.2 中 $A_1,A_2,\cdots,A_{45}$ 都是基本事件,且随机试验中基本事件的个数与试验所有可能出现的结果个数相等.

复合事件:由两个或两个以上样本点构成的事件称为**复合事件**.例 1.2 中的 A,B,C 都是复合事件.

为了以后讨论方便,我们将每次试验中都出现的事件称为**必然事件**.它含有试验的所有可能结果,即含有所有样本点,因此也用 Ω 来表示.在随机试验中,一定不会出现的事件称为**不可能事件**.不可能事件在每次试验中一定不会出现,所以不含试验的任何结果,用 $\varnothing$ 来表示.

四、事件间的关系和运算

在随机事件中,我们希望通过简单事件来了解复杂事件,为此下面讨论事件间的关系及运算.

设试验 E 的样本空间为 Ω, A,B,C 和 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 为随机事件.

1. 包含关系

若由事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B,或事件 B

包含事件 A, 记作 $A \subset B$, 任何事件 A 都包含于 Ω, 见图 1.1.

2. 相等关系

若 $A \subset B$, 同时 $B \subset A$, 则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A = B$.

3. 事件的并(和)

事件 A,B 中至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的并(和),记作 $A \cup B$, 且 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$, 见图 1.2.

一般地, $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生的事件,我们用 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示,即为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并(和),用 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots A_i,\cdots$ 的并(和).

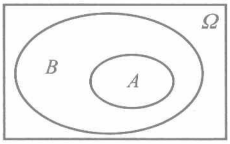


图 1.1 $A\subset B$

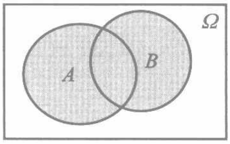


图 1.2 $A\cup B$

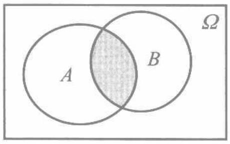


图 1.3 $A\cap B\neq\varnothing$

4. 事件的交(积)

事件 A,B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的交(积),记作 $A \cap B$ 或 AB, 且 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$, 见图 1.3.

一般地,若同时发生的 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 事件,我们用 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示,即为事件 A_1, $A_2,\cdots,A_n$ 的交(积), 用 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_i$,$\cdots$的交(积).

5. 事件互不相容(互斥)

若事件 A,B 不能同时发生,即 $AB = \varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 互不相容(互斥),见图 1.4. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个都互不相容,即 $A_i \cap A_j = \varnothing$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, 则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容或两两互斥;可列个事件中任意两个事件都互斥时,则称该事件列两两互斥.任何试验的基本事件都是两两互斥的.

6. 事件的差

事件 A 发生,事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差,记作 $A\backslash B$ 或 $A - B$,且 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$, 见图 1.5.

7. 对立事件(余事件)

事件 A 不发生的事件称为事件 A 的对立事件或余事件,记作 $\overline{A}$, $\overline{A} = \Omega - A$, 见图 1.6.

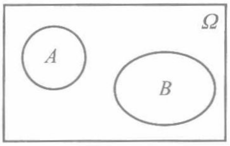


图 1.4 $A\cap B=\varnothing$

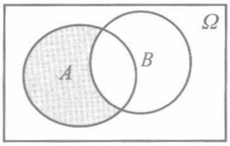


图 1.5 $A\backslash B$

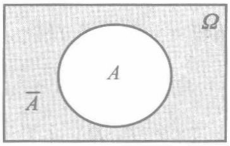


图 1.6 $\overline{A}$

8. 事件的运算定律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

(2) 结合律：$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $ABC=(AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$, $(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) 德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.3 将一枚硬币连续掷 3 次，观察其结果.

(1) 写出样本空间；

(2) 用 A 表示第 1 次出现正面朝上的事件，用 B 表示第 2 次出现正面朝上的事件，用 C 表示第 3 次出现正面朝上的事件.试用样本点的集合表示事件 A, B, $A\cup B$, AB, $A\backslash B$, $\overline{A}$, $A\cup B\cup C$, ABC, $\overline{A}BC$, $\overline{A}\,\overline{B}C$；

(3) 对事件 A,B 验证德摩根律.

解 用 H 表示正面朝上，T 表示正面朝下.

(1) 样本空间：

$$\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}.$$

(2) $A=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}$；

$B=\{(H,H,H),(H,H,T),(T,H,H),(T,H,T)\}$；

$C=\{(H,H,H),(H,T,H),(T,H,H),(T,T,H)\}$；

$A\cup B=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T)\}$；

$AB=\{(H,H,H),(H,H,T)\}$；

$A\backslash B=\{(H,T,H),(H,T,T)\}$；

$\overline{A}=\{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$；

$A\cup B\cup C=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$；

$ABC=\{(H,H,H)\}$

$\overline{A}BC=\{(T,H,H)\}$；

$\overline{A}\,\overline{B}C=\{(T,T,H)\}.$

(3) 由(2)有 $\overline{(A\cup B)}=\{(T,T,H),(T,T,T)\}$. 因为

$\overline{A}=\{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

$\overline{B}=\{(H,T,H),(H,T,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

所以,

$\overline{A}\,\overline{B}=\{(T,T,H),(T,T,T)\}.$

显然, $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\,\overline{B}$. 又由(2)有

$\overline{AB}=\{(H,T,H),(T,H,H),(T,H,T),(H,T,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$,

$$\begin{aligned}\overline{A}\cup\overline{B}&=\{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}\cup\{(H,T,H),(H,T,T),\\&\quad(T,T,H),(T,T,T)\}\\&=\{(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}\\&=\overline{AB}.\end{aligned}$$

例 1.4 某人在一次彩票发行现场摸了3张彩票,设 $A_i(i=1,2,3)$ 表示摸的第 i 张彩票中奖.试用 A_1,A_2,A_3 表示下列各事件:

(1) 3张都中奖;

(2) 3张都没中奖;

(3) 至少有1张中奖;

(4) 恰有1张中奖;

(5) 至多有1张中奖.

解 $\overline{A_i}$ 表示第 i 张彩票没有中奖, $i=1,2,3$, 则有

(1) 3张都中奖的事件为: $A_1A_2A_3$;

(2) 3张都没中奖的事件为: $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

(3) 至少有1张中奖的事件为: $A_1\cup A_2\cup A_3$;

(4) 恰有1张中奖的事件为: $(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$;

(5) 至多有1张中奖的事件为: $(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$.

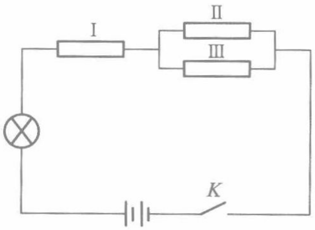


图 1.7

例 1.5 如图1.7所示的电路中,以 A 表示"信号灯亮"这一事件,以 B,C,D 分别表示电子元件 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ 正常工作的事件,那么容易知道,

当开关 K 闭合，$BC \subset A$，$BD \subset A$，$BC \cup BD = A$，而 $\overline{B}A = \varnothing$，即事件 $\overline{B}$ 与事件 A 互不相容.又易知 $\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$，$\overline{A} = \overline{B} \cup \overline{C \cup D}$.

§1.2 概率及其性质

在随机试验中，随机事件可能发生，也可能不发生，虽然我们不能肯定地回答它是否发生，但是事件发生的可能性大小是客观存在的，也是可以度量的.为此，首先引入频率描述事件发生的频繁程度，进而引入事件在一次试验中发生可能性的大小——概率.

一、事件的统计概率

事件的概率是从数量的角度描述事件发生的可能性大小，自然要考虑度量方法是否符合实际，计算结果是否能反映事件发生的可能性大小.下面我们从频率的稳定性给出事件概率的统计定义.

设 A 为一事件，若在一组相同条件下进行 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 n_A，称比值

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} \tag{1.1}$$

为事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率，其中 n_A 称为事件 A 在 n 次重复试验中发生的频数.在历史上，曾有人做过大量的抛硬币试验，研究出现“正面朝上”事件 A 的规律.表 1.1 列出了他们的实验记录.

表 1.1

实验者	投掷次数 n	“正面朝上”出现频数 n_A	频率 $f_n(A)$
De Morgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Pearson	12 000	6 019	0.501 6
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

由表 1.1 可以看到，当试验次数增大时，出现“正面朝上”事件的频率越来越接近 $\frac{1}{2}$，一般来说，当试验次数增大时，事件 A 发生的频率总是稳定在一个确定数附近，而随着试验次数的增大，频率与这个确定数的偏离会越来越小.频

率的这种性质在概率论中称为频率的稳定性,这种性质刻画了事件 A 发生可能性大小的客观存在性.

定义 1.1 在一组相同的条件下,当试验次数 n 增大时,若事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 在一个确定值 p 周围摆动,而随着 n 越来越大,摆动的幅度越来越小,则称这个确定值 p 为事件 A 的**统计概率**.

在实际问题中,这个确定值是不容易求得的,通常用 n 很大时的频率或若干个频率的平均值来近似代替,即 $p \approx f_n(A)$.

例如,一个射手射击 500 次,中靶 200 次,我们说他中靶的概率是 $\frac{2}{5}$;10 000个新生婴儿中死亡 3 人,我们说婴儿的死亡率为$\frac{3}{10\ 000}$.

例 1.6 从 1933 年至 1995 年 63 年间,某地区夏季(5 ~ 9 月)共有 180 天发生暴雨.所以该地区夏季发生暴雨的概率近似为

$$p \approx \frac{180}{153 \times 63} \approx 0.018\ 7.$$

该结果表明,该地区夏季发生暴雨这一事件的统计概率非常小,即观察 100 天不到 2 天会有暴雨.

二、古典概型

我们抛一枚均匀硬币,自然想到该硬币着地时的情况,由于硬币两面对称,所以出现“正面朝上”和“正面朝下”的可能性是一样的.因此,我们就有理由认为出现“正面朝上”和“正面朝下”的概率都是 $\frac{1}{2}$.

在概率论早期,对于某些特殊情形,研究对象往往具有物理和几何性质的对称性,人们利用这种对称性,确定了计算概率的方法.这种特殊情形的随机试验满足:

(1) 试验的样本空间由有限个样本点构成,即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\};$$

(2) 每个样本点出现的可能性相等,即

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

我们称这类随机试验的数学模型为**古典概型**.在古典概型中,若事件包含 n_A 个

样本点,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{n}. \tag{1.2}$$

由这种方法得到的概率称为**古典概率**.公式(1.2)为古典概率的计算公式.计算古典概率有时要借助排列组合知识.

例 1.7 考虑有 3 个小孩的家庭,假设生男生女等概率,求恰有 2 个男孩的概率.

解 由题意知,该问题是古典概型.为了方便,用 b 表示男孩,用 g 表示女孩,则样本空间为

$$\Omega=\{(b,b,b),(b,b,g),(b,g,b),(g,b,b),(b,g,g),(g,b,g),(g,g,b),(g,g,g)\}.$$

设 A 表示 3 个小孩中恰有 2 个男孩的事件,则

$$A=\{(b,b,g),(b,g,b),(g,b,b)\}.$$

所以, $P(A)=\frac{3}{8}$.

例 1.8 设一批产品共有 10 件,其中 4 件次品,现从中任取 3 件,求恰有 2 件次品的概率.

解 这个问题实际上是产品抽样问题, 而在产品检验中有如下两种抽样方法.

(1) **放回抽样**:在抽样时,每次抽取的产品经检验后又放回到原产品中,再抽取下一件.

(2) **不放回抽样**:在抽样时,每次抽取的产品经检验后不放回到原产品中,再抽取下一件.

设 A 表示取的 3 件产品中恰有 2 件次品的事件.

(1) 在有放回的抽样中,第一次有 10 件产品可供抽取,由于取后放回,因此第二次取时也有 10 件供抽取,第三次取时也有 10 件供抽取,由乘法原理,共有 10^3 种取法,即 $n=10^3$.

对于事件 A, 前两次取到次品且第三次取到正品的取法共有 $4^2\times 6$ 种;第一次和第三次取到次品而第二次取到正品的取法共有 $4^2\times 6$ 种;第一次取到正品而后两次取到次品的取法共有 $4^2\times 6$ 种.所以

$$n_A=3\times 4^2\times 6=\mathrm{C}_3^2\times 4^2\times 6.$$

根据古典概率公式(1.2)有

$$P(A)=\frac{C_3^2\times4^2\times6}{10^3}=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{3}{5}=\frac{36}{125};$$

(2) 在不放回抽样中,第一次有 10 件产品可供抽取,由于取后不放回,因此第二次取时有 9 件供抽取,第三次取时有 8 件供抽取,由乘法原理,总共有 $10\times9\times8=P_{10}^3$ 种取法,即 $n=P_{10}^3$.

对于事件 A, 前两次取到次品且第三次取到正品的取法共有 $4\times3\times6$ 种;第一次和第三次取到次品而第二次取到正品的取法共有 $4\times6\times3$ 种;第一次取到正品而第二次和第三次取到次品的取法共有 $6\times4\times3$ 种.所以, $n_A=3\times4\times3\times6$.

根据古典概率公式(1.2)有

$$P(A)=\frac{3\times4\times3\times6}{P_{10}^3}=\frac{C_3^2\times P_4^2\times P_6^1}{P_{10}^3}=0.3.$$

在不放回抽样中,当考虑的事件 A 与抽样次序无关时,不放回抽样可看作一次取出若干样品.由组合公式知

$$P(A)=\frac{C_4^2\times C_6^1}{C_{10}^3}=0.3.$$

类似地可将该问题推广到有 N 件产品,其中 M 件次品.从中任取 n 件,恰有 k 件为次品的概率为

放回抽样: $P(A)=C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$,

不放回抽样: $P(A)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

一般地,这两种抽样方法得到的概率是不同的,但当产品总量 N 很大,而抽样量不大时,采用这两种抽样方法得到的概率差别不大.

例 1.9　新学期开始,某班来了 30 个同学,求这 30 个同学中没有 2 人生日相同的概率(一年按 365 天计算).

解　设 A 表示 30 个同学中没有 2 人生日相同的事件.由于每个同学生日可能为 365 天中的任何一天,所以这 30 个同学的生日共有 365^{30} 种可能,故 $n=365^{30}$.

事件 A 相当于从 365 天中不重复选 30 天的排列,共有 P_{365}^{30}.

由古典概率公式(1.2)有