

高等学校教材

撞击与侵彻力学

林 晓 查宏振 魏惠之 编著



兵器工业出版社

学 校 教 材

撞 击 与 侵 彻 力 学

林 晓 查宏振 魏惠之 编著



兵 器 工 業 出 版 社

(京)新登字049号

内 容 简 介

本书讨论固体高速碰撞的力学现象,系统地阐述了固体介质中的应力波,包括弹性波及塑性波,也讨论了粘弹性波、弹—粘塑性波、复合应力波、球面波和柱面波等问题。此外,书中还介绍了固体材料在高压下的流体动力学理论;讨论了高速及超高速下弹—靶撞击、侵彻、贯穿有关力学现象及对问题的典型处理模型;最后还介绍了这一领域的数值计算方法。

本书主要是为弹药战斗部工程专业的研究生编写的教材,但也可作为爆炸、冲击领域内的科技人员、高等学校教师及高年级大学生的参考书。

撞 击 与 侵 彻 力 学

林 晓 查宏振 魏惠之 编著

兵器工业出版社 出版

(北京市海淀区车道沟10号 邮政编码 100081)

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

华东工学院印刷厂印装

开本: 787×1092 1/16 印张 12.75 字数: 298 千字

1992年10月第1版 1992年10月第1次印刷

印数: 0 001~1 000 册 定价: 3.34 元

ISBN 7-80038-455-1/TJ·70 (课)

出版说明

遵照国务院国发〔1978〕23号文件精神，中国兵器工业总公司承担全国高等学校兵工类专业教材的规划、编审、出版的组织工作。自1983年兵总教材编审室成立以来，在广大教师的积极支持和努力下，在国防工业出版社、兵器工业出版社和北京理工大学出版社的积极配合下，已完成两轮兵工类专业教材的规划、编审、出版任务。共出版教材 211 种。这批教材出版对解决兵工专业教材有无问题、稳定教学秩序、促进教学改革、提高教学质量都起到了积极作用。

为了使兵工类专业教材更好地适应社会主义现代化建设需要，特别是国防现代化培养人才的需要，反映国防科技的先进水平，达到打好基础、精选内容、逐步更新、利于提高教学质量的要求，我们以提高教材质量为主线，完善编审制度、建立质量标准、明确岗位责任，建立了由主审审查、责任编委复审和教编室审定等五个文件。并根据兵工类专业的特点，成立了九个专业教学指导委员会和两个教材编审小组，以加强对兵工类专业教材建设的规划、评审和研究工作。

为贯彻国家教委提出的“抓好重点教材，全面提高质量，适当发展品种，力争系统配套，完善管理制度，加强组织领导”的“八五”教材建设方针。兵工教材编审室在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1991年制订了1991~1995年兵工类专业教材编写出版规划。共列入教材 220 种。这些教材都是从学校使用两遍以上、实践证明是比较好的讲义中遴选的。专业教学指导委员会从兵工专业教材建设的整体考虑对编写大纲进行了审查，认为符合兵工专业培养人才要求，符合国家出版方针。这批教材的出版必将为兵工专业教材的系列配套，为教学质量的提高、培养国防现代化人才，为促进兵工类专业科学技术的发展，都将起到积极的作用。

本教材由李景云教授主审，经张守中副教授担任责任编辑，中国兵器工业总公司教材编审室审定。

限于水平和经验，这批教材的编审出版难免有缺点和不足之处，希望使用本教材的单位 and 广大读者批评指正。

中国兵器工业总公司教材编审室

1991年 8 月

前 言

《撞击与侵彻力学》是一门有着广泛研究内容的学科，是力学的一个分支。它主要研究介质受到强脉冲载荷作用时的力学效应，包括质点运动、应力与应变、结构变形以及材料的破坏规律。本学科的发展首先与军工技术密切关联。例如弹壳的爆炸与破碎；弹丸对甲板及其它障碍物的撞击、侵彻或穿孔；超高速金属聚能射流的形成及破甲过程；碎甲弹作用时钢甲中形成的应力波及崩落效应；导弹入水……等都是《撞击与侵彻力学》研究的中心问题。应当指出，由于这类问题紧密联系应力扰动的传播、材料对载荷的动态响应、结构的塑性变形及破坏，并涉及热学与力学的耦合，从而造成了分析问题的复杂性，致使本学科成为一门与物理、力学、材料学等多种学科相关的边缘科学。随着近代科学技术的发展，本学科也得到了较快的发展，其研究成果不仅直接应用于军事，同时在机械、冶金、采矿、石油、交通、能源、地球物理、材料合成、宇航等工程部门中愈来愈显示出其重要意义。掌握这一领域的知识也显得日益必要。

本书主要是为弹药战斗部工程专业硕士研究生编写的学位课程教材，其目的在于使读者掌握固体高速碰撞问题必需具备的基础知识，掌握处理这类问题的思路、方法和典型的处理模型，使他们能够在此基础上扩展和加深对这门学科的了解，进而能运用这些知识去分析研究所遇到的实际问题。

本书内容可分为两大部分。第一章到第四章是本书的第一部分，这部分系统地阐述在冲击载荷作用下，固体介质中应力波传播的基本理论，包括弹性波、塑性波、粘弹性波、弹-粘塑性波、其它类型的应力波，以及固体材料在高压下的流体力学理论，这是分析冲击载荷对固体介质作用必须具备的基本知识。第五章到第七章组成本书的第二部分，这部分可用于分析高速及超高速下弹-靶撞击、侵彻及贯穿等力学现象，并介绍了这一领域的数值计算方法。这部分内容紧密结合本专业的实际问题。着重讨论高速及超高速撞击时弹-靶的相互作用。在每章的末尾都列出了与本章内容密切有关的主要参考书目。

由于教学时数与篇幅的限制，本书并未涉及与专业有关的全部内容，更不可能包罗撞击动力学的全部内容及专门问题，诸如材料在冲击载荷下的动态性能、金属的高速成形等。尽管如此，由于本书强调了基本概念、基本理论和方法以及强调对现象的理解，并且还提供了一些有用的数据，因而本书也可作为本专业高年级本科生以及从事爆炸力学和弹药终点效应的科技人员的参考书。

阅读本教材时，要求研究生应具备必要的数学、弹塑性力学、流体力学以及弹丸或战斗部作用原理的知识。本课程应安排在上述课程学习之后，课题研究之前讲授，教学时数可为50~60学时。

编者在编写本书时，着重考虑了基本概念与基本原理的清晰；内容安排上的系统性；叙述上力求精炼；并力图概括弹-靶高速及超高速撞击的主要研究成果。本书对有的解析关系式和例子、现象未作完整的推导或详尽的描述。因此，应用本书作为教材时，教师应布置学

生阅读列于章末的参考文献的有关部分，并要求学生去追踪某些解析式的推导，以加深学生对本书阐述内容的理解。同时也可以采用与本书所述问题略微不同的初始条件和边界条件要求学生思考，以进一步发现问题。

编者曾多次讲授本课程，先由林晓同志执笔写出本书的全部初稿，而后由查宏振、魏惠之两同志对初稿进行进一步整理和加工。本书由北京理工大学李景云同志主审；由兵工教材编审室张守中同志担任责任编委兼编辑；在编写过程中还得到了兵器工业出版社和专业教学指导委员会的大力支持，编者在此向上述同志和单位，以及向被本书引用的文献作者致以深切的谢意。

由于编者的教学和学术水平有限，书中难免会有错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

编 者

1990.12.15

目 录

第一章 应力波的基本方程与特征线	1
§ 1-1 两种坐标系	1
§ 1-2 应变率无关理论的一维应力波控制方程	3
§ 1-3 特征线与相容关系	5
§ 1-4 冲击波与间断波关系式	9
§ 1-5 简单波与 Riemann 不变量	12
参考文献	15
第二章 一维杆的弹塑性应力波	16
§ 2-1 弹性杆的共轴碰撞	16
§ 2-2 弹塑性加载波(同号波)的相互作用	19
§ 2-3 卸载波与弹塑性边界	22
§ 2-4 强间断追赶卸载波	27
§ 2-5 弱间断追赶卸载波	31
§ 2-6 迎面卸载	36
参考文献	40
第三章 应力波的有关模型	41
§ 3-1 一维杆的粘弹性波与弹-粘塑性波	41
§ 3-2 复合应力波	48
§ 3-3 一维应变弹塑性波	55
§ 3-4 刚性卸载	61
§ 3-5 一维球面波与一维柱面波	69
参考文献	76
第四章 材料在高压下的流体动力学理论	77
§ 4-1 固体在高压冲击下的激波守恒关系	77
§ 4-2 固体介质在高压下的等熵流动	80
§ 4-3 材料的再次激波冲击	86
§ 4-4 Riemann 间断分解问题	88
§ 4-5 二维定常流动的极曲线方法	95
§ 4-6 高压下材料的流动与破坏	102

参考文献	106
第五章 碰撞侵彻与贯穿	107
§ 5-1 穿甲的基本现象	107
§ 5-2 弹道极限、撞击相图与剩余速度	108
§ 5-3 空穴膨胀理论	114
§ 5-4 长杆弹侵彻的流体动力学修正模型	120
§ 5-5 中厚靶的剪切冲塞分析模型	125
§ 5-6 斜碰撞的跳飞问题	128
参考文献	134
第六章 超高速碰撞与侵彻	135
§ 6-1 超高速的获得	135
§ 6-2 超高速粒子对厚靶和中厚靶的撞击	141
§ 6-3 薄板碰撞的碎片云团	144
§ 6-4 超高速粒子碰撞的工程计算模型	152
§ 6-5 超高速可压缩射流的侵彻	158
参考文献	164
第七章 数值计算方法	165
§ 7-1 两种计算方法的比较	165
§ 7-2 一维拉氏方法	167
§ 7-3 二维差分基本公式	173
§ 7-4 二维拉氏方程	175
§ 7-5 滑移面的计算处理	188
参考文献	193
附录	195

第一章 应力波的基本方程与特征线

§ 1—1 两种坐标系

在连续介质力学中, 可以采用两种方法来研究介质的运动, 即 Lagrange 方法和 Euler 方法。

Lagrange 方法所关心的是给定质点的状态随时间的变化规律。如果质点是离散的, 记为 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, 则第 k 个质点的状态可表示为 $F(x_k, t)$ 。当质点是一个连续的集合体时, 可用一个连续变量 x 来命名各质点, 这时状态就是 x 和 t 的连续函数 $F = F(x, t)$ 。固定 x 变化 t , F 表示质点 x 随时间 t 的变化规律; 固定 t 变化 x , 则 F 表示给定时刻状态随着不同质点 x 的分布。 x 称为 Lagrange 坐标或物质坐标。

Euler 方法则不同, 它所关心的是给定空间位置上的质点状态随时间的变化规律。若空间坐标记为 X , 可把状态函数写为 $G(X, t)$ 。由于在某个空间位置上, 不同的时刻会被不同的质点所占据, 所以 $G(X, t)$ 表示 t 时刻位于 X 空间点处的质点状态。自然, 固定 t 变化 X , 得到的是状态量 G 在空间点上的分布规律; 固定 X 变化 t , 得到的是在给定空间点上 G 随时间 t 的变化规律。但这不是一个质点的状态, 而是不同质点的状态 (它们在不同时刻依次进入 X 这个位置)。空间坐标 X 也称为 Euler 坐标。

两种方法在连续介质力学中都是有用的。例如, 当测量固体中某定点的应力时, 采用 Lagrange 坐标, 可把传感器装在物体的该点处。这时, 不管物体在空间中如何运动, 测到的信号都是从物体的那一点发出的。又如当测量流体对喷管的压力时, 装在喷管壁上的传感器所测到的流体压力就是 Euler 意义下的量。

Euler 方法与 Lagrange 方法有一定的联系。在一维情况下, 介质的运动表现为某质点 x 在不同时刻 t 位于不同的空间位置 X 处, 即

$$X = X(x, t) \quad (1-1-1)$$

当运动是单值和连续时, 某空间位置 X 在不同的时刻 t 也一定被某相应质点 x 所占据

$$x = x(X, t) \quad (1-1-2)$$

在数学上, 上两式即为 Lagrange 坐标与 Euler 坐标的转换关系。借此可把介质在不同方法下获得的物理量进行互换。

介质的 Lagrange 坐标是通过对质点依次进行命名而得到的。最通常的方法是取 $t=0$ 时刻各质点所占据的空间位置来命名, 即让 (1-1-1) 满足初始条件

$$x = X(x, 0) \quad (1-1-3)$$

此时 (1-1-1) 又可以表示为

$$X = x + u(x, t) \quad (1-1-4)$$

$u(x, t)$ 表示质点 x 的位移, $u(x, 0) = 0$ 。

在一维问题中, 还有一种对质点进行命名的方法。先选定某个质点 A 作为参考点, 介质

中任一质点 B 的坐标 $h(B)$, 可取为 B 截面到 A 截面之间介质的质量(假定截面积为一个单位)。该某 t 时刻介质的密度在空间中的分布为 $\rho(X, t)$, 则 B 点的 Lagrange 坐标表示为

$$h(B) = \int_{x_A}^{x_B} \rho(X, t) dX \quad (1-1-5)$$

若 B 在 A 的右方, h 取正号; 反之取负号。根据质量守恒定律, 这种定义也能给出每个质点的空间位置

$$X = X_A + \int_{h_A}^{h} \frac{dh}{\rho(h, t)} \quad (1-1-6)$$

一般说来, 当研究一维非定常问题时, 采用 Lagrange 方法比较方便, 所得结果也容易转换为空间坐标系 F 的量。但对于二维或三维非定常的数值分析问题, 两种方法各有优缺点, Euler 方法容易划分网格但处理活动边界条件比较困难; Lagrange 方法对边界条件处理容易, 但介质流动变形大时, 网格扭曲亦大, 以致难于处理。所以对高维问题, 应根据介质边界条件和变形的具体情况来选择方法。

连续介质动力学的任务是研究介质的物理状态随时间与位置的变化规律。当采用不同的坐标系时, 描述质点状态变化的函数表达式也不一样。这里给出三种不同定义的微商。

(1) 物质微商(又称 Lagrange 微商或随体微商), 它是跟随某质点 x 来观察质点的物理状态对时间的变化率

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)_L = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=\text{const}} \quad (1-1-7)$$

例如质点的速度 v 和加速度 a , 定义为质点的空间位置 X 对时间的一阶和二阶变化率, 由 (1-1-4)

$$v = \frac{dX}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1-1-8)$$

$$a = \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1-1-9)$$

(2) 空间微商(又称 Euler 微商), 它是在给定空间点上观察质点的物理状态对时间的变化率。设 $G(X, t)$ 为 Euler 坐标下某物理状态的分布, 注意到 t 变化到 $t+dt$ 时, 位于 X 处的质点会运动到 $X+dX = X+vd t$ 处, 从而 G 的变化率

$$\left(\frac{dG}{dt} \right)_E = \frac{G(X+vd t, t+dt) - G(X, t)}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + v \frac{\partial G}{\partial X} \quad (1-1-10)$$

例如流场中介质加速度用 Euler 方法描述时

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} \quad (1-1-11)$$

不难看出, $\partial v(X, t)/\partial t$ 不是对给定质点进行的微商, 因此不是质点的加速度。

(3) 随波微商。考虑一个例子, 在水池中抛进一个石子, 扰动水波向四周扩散, 在 t 时刻扰动阵面传到 Lagrange 坐标 $x=\varphi(t)$ 处。若不固定某个质点, 而是随着 t 的变化, 观察扰动阵面 $x=\varphi(t)$ 处的质点状态 F 的变化率, 则

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{x=\varphi(t)} = \frac{\partial F}{\partial t} + c \frac{\partial F}{\partial x} \quad (1-1-12)$$

式中 $c=\varphi'(t)$ 为扰动阵面在物质坐标系中的传播速度, 称 Lagrange 波速, 式(1-1-12)即为 Lagrange 坐标下的随波微商。

同理, 若扰动在 Euler 坐标系下的传播轨迹为 $X=\Phi(t)$, 则随波微商为

$$\left. \frac{dG}{dt} \right|_{X=\Phi(t)} = \frac{\partial G}{\partial t} + c_E \frac{\partial G}{\partial X} \quad (1-1-13)$$

上式给出了状态 G 沿轨迹 $X=\Phi(t)$ 上的那些空间点的变化率, 其中 $c_E=\Phi'(t)$ 称为 Euler 波速。

将 $x=\varphi(t)$ 和 $X=\Phi(t)$ 同时代入(1-1-4), 然后对 t 求导, 将得到 Euler 波速与 Lagrange 波速的关系

$$c_E = v + (1 + \varepsilon)c \quad (1-1-14)$$

式中 $v=\partial u/\partial t$ 为质点运动速度; $\varepsilon=\partial u/\partial x$ 为质点附近的应变率。

§ 1—2 应变率无关理论的一维应力波控制方程

考虑一等截面均质杆, 各质点的 Lagrange 坐标 x 取为 $t=0$ 时刻(未变形)质点所占据的空间位置, x 轴取为杆的轴线。首先对杆的运动形态作两个基本假定。

- (1) 杆在变形时横截面保持为平面, 截面上内力只有均布的轴向应力 σ ;
- (2) 材料的应力 σ 是应变 ε 的单值函数

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (1-2-1)$$

根据第一个假定, 杆中各运动参量, 如质点位移 u , 应变 $\varepsilon=\partial u/\partial x$, 应力 σ 及速度 $v=\partial u/\partial t$ 都只是 x 和 t 的函数。注意 ε 与 v 的定义, 若它们是连续可微函数, 得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (1-2-2)$$

上式称为连续方程或运动学条件。

考虑图 1-2-1, 设杆截面积为 A , 拉力为 P , 密度为 ρ_0 , 应用 Newton 第二定律得

$$\rho_0 A dx \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

记工程应力为 $\sigma=P/A$, 得

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1-2-3)$$

此式称为运动方程或动力学条件。这样总共给出了联系 v 、 σ 、 ε 三个未知函数的三个基本方程, 在一定的边界条件和初始条件下可以进行求解。

应当指出, 连续方程(1-2-2)和运动方程(1-2-3)是在函数(v 、 σ 或 ε)连续可微条件下得到的。在某些情况下(例如后面即将讨论的冲击波), 函数会发生间断, 要另外考虑间断的运动学与动力学条件。

以上三个方程可称为 σ 、 v 、 ε 型方程组, 若令 $c^2=(1/\rho_0)(d\sigma/d\varepsilon)$, 消去 σ , 可得 v 、 ε 型方程组

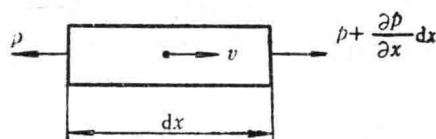


图 1-2-1 杆段微元的受力及运动

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{cases} \quad (1-2-4)$$

若消去 ε , 可得 v 、 σ 型的方程组

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho_0 c^2 \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1-2-5)$$

若消去 ε 、 v , 又可得到关于位移 u 的二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1-2-6)$$

这几种类型的方程组是相互等价的。例如由(1-2-6)求得 u 后, 求导就可得到 v 和 ε , 再由 $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ 求得 σ 。求解具体问题时, 要视具体情况使用比较方便的方程组。

应当指出, 在建立上述方程组时实际上含有两个假定前提。第一个假定是忽略了杆中质点横向运动的惯性作用, 即忽略了杆的横向膨胀或收缩对动能的贡献。当杆受压缩或拉伸时, 总会使表面附近的质点产生横向运动, 造成截面上应力分布的不均匀, 导致横截面发生翘曲。所以, 按此假定建立起来的方程组有一定的近似性。从杆中弹性波的精确解可知, 当杆的横截面尺寸比波长小得多时(例如, 圆杆半径比波长 $a/\lambda < 0.7$), 这一近似引起的误差是允许忽略的。

第二个假定是材料的应力 σ 与应变率 $\dot{\varepsilon}$ 无关。通常这只有在弹性变形范围内才是正确的。对大量材料的冲击试验表明, 当应变率 $\dot{\varepsilon}$ 一定时, $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ 的曲线与准静态曲线基本相似, 只是屈服极限与强度极限要高一些。这样, (1-2-1)可理解为材料在一定应变率范围内(平均意义上)的动态应力应变关系。基于这个假定建立起来的应力波理论称为应变率无关理论。

另外, 若(1-2-1)给出的 σ 与 ε 是线性关系, 即

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1-2-7)$$

则方程组是线性的, 且有

$$c = c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (1-2-8)$$

c_0 称为一维应力的弹性波速。若(1-2-1)是非线性方程, 方程组便是非线性的了。

虽然方程组(1-2-1)至(1-2-3)是从一维杆的拉压问题推导出来的, 它在研究一维固体应力波问题中具有普遍的意义。事实上, 其他许多一维应力波问题的控制方程组都与这个方程组相同或相似。

现以一维薄壁圆管中扭转波的控制方程组为例加以比较。假定薄壁圆管在扭转后, 截面本身不变形(即截面象刚性圆盘一样绕轴转动一个角度), 以 φ 表示截面相对固定参考面的扭转角, a 表示圆管的平均半径, h 表示圆管的壁厚, τ 、 γ 分别表示管壁的剪应力和剪应变, v 表示截面上沿壁切向的质点速度, 并假定 τ 、 γ 、 v 在截面上各点相同。于是

$$v = a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1-2-9)$$

$$\gamma = a \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1-2-10)$$

在 v 和 γ 连续可微时, 有连续方程

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (1-2-11)$$

取一管微元, 长为 dx , 对中心轴应用动量矩定理得

$$\rho_0 (2\pi a h dx) \frac{\partial (av)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (2\pi a^2 h \tau) dx$$

或

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (1-2-12)$$

再作应变率无关假定

$$\tau = \tau(\gamma) \quad (1-2-13)$$

不难看出, 这组方程与(1-2-1)至(1-2-3)是类同的。

值得一提的是, 对于弹性材料(即 $\sigma = E\varepsilon$ 和 $\tau = G\gamma$), 杆的拉压控制方程组与薄壁圆管扭转控制方程组的近似性质有所不同。杆在变形时横截面保持平直的假定具有较大的近似性; 而管扭转时截面不变形的假定更为精确。因此, 利用对薄壁圆管的扭转冲击来测试材料的动态本构关系(1-2-13)可更接近真实性。

§ 1-3 特征线与相容关系

(着重讨论方程组(1-2-5), 将它改写成矩阵的形式

$$AW_t + BW_x = 0 \quad (1-3-1)$$

式中

$$A = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_0 c^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} v \\ \sigma \end{pmatrix} \quad (1-3-2)$$

W_t 、 W_x ——分别为 W 对 t 及 x 的偏微商。

令

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} = c(\sigma) \quad (1-3-3)$$

可以通过考察方程(1-3-1)是否存在特征线来判断方程的类型。

特征线的定义可采用“不定线”的概念来引出。设 Γ 为自变量平面 (x, t) 上的一条曲线, 在 Γ 上给定函数 W 的初值时, W 沿曲线 Γ 的全微商将为

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\Gamma} = W_x \frac{dx}{dt} + W_t = \lambda W_x + W_t \quad (1-3-4)$$

式中 $\lambda = dx/dt$ 为曲线 Γ 的斜率。因此

$$W_t = \left. \frac{dW}{dt} \right|_{\Gamma} - \lambda W_x \quad (1-3-5)$$

代入(1-3-1)得

$$(\lambda A - B)W_x = A \frac{dW}{dt} \Big|_{\Gamma} \quad (1-3-6)$$

由于 W 在 Γ 上给定,即 $(dW/dt)|_{\Gamma}$ 为已知量,在一般情况下,沿 Γ 上的偏导数 W_x 可由方程(1-3-6)唯一确定。但在矩阵 $(\lambda A - B)$ 的行列式为零时, Γ 上的 W_x 则不能确定。对应于这种条件下的曲线 Γ 就是不定线,或称特征线。于是,特征线问题归结为下列代数方程的求根问题,即

$$\|\lambda A - B\| = 0 \quad (1-3-7)$$

满足上式的根 λ 称为特征值。显然, λ 之值决定于控制方程(1-3-1)的系数矩阵 A 与 B 。若(1-3-7)的根 λ 为共轭复根,则特征线 Γ 不存在(因 Γ 的斜率不可能为虚数),方程组(1-3-1)属于椭圆型;如果 λ 是二实根,方程组(1-3-1)属于双曲型,并有相应两根特征线;若 λ 为实重根,方程组(1-3-1)属于抛物型,此时只有一根特征线。这里仅讨论双曲型的微分方程组的问题。

如果由(1-3-7)已解出全部不同的实数特征值 λ ,随之可求出相应于每个特征值的左特征矢量 l ,满足下式的非零解

$$l^T(\lambda A - B) = 0 \quad (1-3-8)$$

式中 l^T 表示 l 的转置。将 l^T 分别乘以(1-3-6)的两边可得

$$l^T(\lambda A - B)W_x = l^T A \frac{dW}{dt} \Big|_{\Gamma} \quad (1-3-9)$$

由式(1-3-8)知上式左端等于零,因此右端也应为零

$$l^T A \frac{dW}{dt} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (1-3-10a)$$

由此可以看出,沿特征线 $dx/dt = \lambda$, W 的值不能随便给出,必须服从(1-3-10),否则就违反了特征线的定义,故称式(1-3-10)为特征线上的相容关系。若 $\lambda \neq 0$,利用(1-3-8)还可得到另一形式的相容关系

$$l^T B \frac{dW}{dt} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (\lambda \neq 0) \quad (1-3-10b)$$

下面对控制方程(1-3-1)进行具体运算。先解特征值,由

$$\|\lambda A - B\| = \begin{vmatrix} \lambda \rho_0 & 1 \\ 1 & \frac{\lambda}{\rho_0 c^2} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2}{c^2} - 1 = 0$$

得到

$$\lambda = \pm c$$

为二不等实根,故方程(1-3-1)为双曲型,有两条特征线,可由

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \text{和} \quad \frac{dx}{dt} = -c$$

积分得到。由于 $c=c(\sigma)$,特征线依赖于函数值 σ ,求解特征线与求解函数 σ 必须同步进行。

左特征向量 $L^T = (l_1, l_2)$ 满足关系式, 即

$$(l_1, l_2) \begin{pmatrix} \lambda \rho_0 & 1 \\ 1 & \frac{\lambda}{\rho_0 c^2} \end{pmatrix} = 0$$

分别将 $\lambda = \pm c$ 代入上式可得两个左特征向量

$$L_+^T = (1, -\rho_0 c); \quad L_-^T = (1, \rho_0 c)$$

如果将 L_+^T 代入(1-3-10b)得

$$(1, -\rho_0 c) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{d\sigma}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

化简得

$$d\sigma = \rho_0 c dv$$

这就是沿特征线 $dx = cdt$, 函数 σ, v 应满足的相容关系式。同理可得沿另一条特征线 $dx = -cdt$ 上的相容关系, 归纳写为

$$\left. \begin{array}{l} \text{沿 } \Gamma_+: dx = cdt, \text{ 成立 } d\sigma = \rho_0 c dv \\ \text{沿 } \Gamma_-: dx = -cdt, \text{ 成立 } d\sigma = -\rho_0 c dv \end{array} \right\} \quad (1-3-11)$$

类似地, 如取 v, ε 型的方程组(1-2-4), 可得如下的特征线及相容方程

$$\text{沿 } dx = \pm cdt, \text{ 成立 } dv = \pm cde \quad (1-3-12)$$

原来是偏微分方程组的(1-3-1), 经过化简, 等价于沿特征线上的两组常微分方程组(1-3-11), 这给计算求解带来了很大的方便。

如图 1-3-1 所示, 设点 1 及点 2 的状态 v, σ (从而 c) 已知, 某一点 3 ($t_3 > t_1$ 及 $t_3 > t_2$) 的状态 v_3, σ_3 可按下列方式求解。从点 1 引出 Γ_+ , 有

$$\left. \begin{array}{l} x_3 - x_1 = c_1(t_3 - t_1) \\ \sigma_3 - \sigma_1 = \rho_0 c_1(v_3 - v_1) \end{array} \right\} \quad (1-3-13)$$

从点 2 引出 Γ_- , 有

$$\left. \begin{array}{l} x_3 - x_2 = -c_2(t_3 - t_2) \\ \sigma_3 - \sigma_2 = -\rho_0 c_2(v_3 - v_2) \end{array} \right\} \quad (1-3-14)$$

联立以上四式可求出点 3 的位置 x_3, t_3 及函数 σ_3, v_3 , 由 σ_3 又可求得 $c(\sigma_3)$ 。如果需要较高的精度, 可继续进行叠代。

求解具体问题, 必须给定初始条件和边界条件。现在考虑一根半无限杆 ($0 \leq x < \infty$), 材料是线弹性的, 有 $c = c_0 = \sqrt{E/\rho_0}$, 即特征线是直线。如图 1-3-2 所示, 从原点引出一条 Γ_+ 特征线 OA 。通常, 区域 Aox 称为 Cauchy 区, 在该区域内任一点的解完全依赖于 $t=0$ 时刻的 x 轴上状态分布, 即 P 点由 Q, R 两点决定, 所以这类问题称为 Cauchy 初值问题。

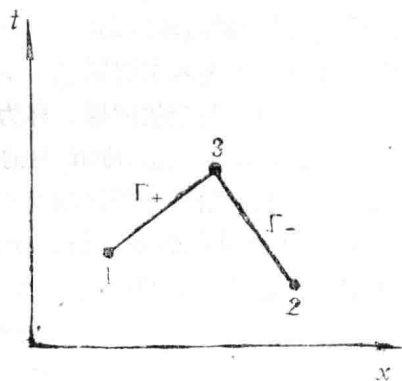


图 1-3-1 (x, t) 平面内的特征线

由(1-3-13)或(1-3-14)不难导出:若 x 轴上初始值是恒值,则整个 Cauchy 区域为恒值区域,特别地,在无初始应力和速度的条件下, Cauchy 区域中的应力和速度恒为零。

区域 Aot 称为 Picard 区域,区域内任一点 N 的解依赖于 M 、 L 两点。 M 点由边界条件可给出一个关系式,另一个关系式由 Γ_- 特征线 MK 得到。 K 点和 L 点的值均可由 Cauchy 区求得。由此可见, Picard 区域的解答既依赖于初值,又依赖于边界值,从而又称 Picard 问题为混合边界问题。

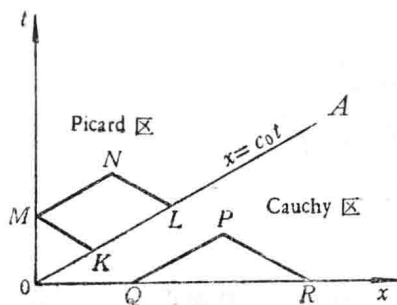


图 1-3-2 半无限杆的特征线求解方法

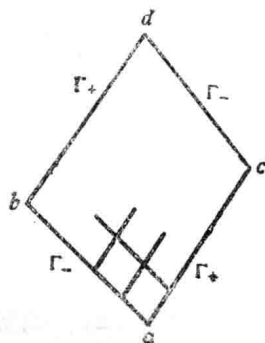


图 1-3-3 特征边界问题的求解方法

Cauchy 问题的初值不一定在 x 轴上给出,也可在其他曲线上给出,只要该曲线上任一点随时间 t 增加时引出的两条特征线都进入求解区域内。这种初值曲线称为类空曲线(类似空间坐标 ox 的曲线)。同样, Picard 问题的边界值不一定在 ot 轴上给定,可在一般的类时曲线(类似于时间轴的曲线)上给定。作为类时曲线,其任一点随 t 增加时引出的两条特征线,仅有一条进入求解区域。显然,类空曲线和类时曲线都是非特征线。

还有一类典型的问题,称为特征边界问题,如图 1-3-3 所示。已知特征线 ab 和 ac 上的函数值,求解四边形 $abcd$ 内的值,其中, bd 为 Γ_+ 特征线, cd 为 Γ_- 特征线。对 ab 和 ac 划分后,就可用特征线法求解该问题了。

在 Picard 问题中,假定杆初始时刻为静止且无空应力,在杆左端以 $\sigma = \sigma_0(t)$ 的规律逐步加载,这里 $\sigma_0(0) = 0$ 。由图 1-3-2,可得如下定解方程式

$$\begin{aligned}\sigma_N - \rho_0 c_0 v_N &= \sigma_M - \rho_0 c_0 v_M \\ \sigma_N - \rho_0 c_0 v_N &= \sigma_L + \rho_0 c_0 v_L = 0 \\ \sigma_M + \rho_0 c_0 v_M &= \sigma_K + \rho_0 c_0 v_K = 0 \\ \sigma_M &= \sigma_0(t_M)\end{aligned}$$

由此解得

$$\begin{aligned}\sigma_N &= \sigma_0(t_M) \\ v_N &= -\frac{1}{\rho_0 c_0} \sigma_0(t_M)\end{aligned}$$

若记 N 点的坐标为 (x, t) , 则 $t_M = t - x/c_0$, 从而

$$\left. \begin{aligned}\sigma(x, t) &= \sigma_0\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \\ v(x, t) &= -\frac{1}{\rho_0 c_0} \sigma_0\left(t - \frac{x}{c_0}\right)\end{aligned} \right\} \quad (1-3-15)$$

可见在此问题中，沿特征线 $t-x/c_0 = \text{const}$ ，应力和速度都是不变的。

最后引入波形曲线与时程曲线两个概念。波形曲线是 $t=\text{const}$ 条件下的 $\sigma(x)$ 、 $v(x)$ 或 $\varepsilon(x)$ 分布曲线；时程曲线是 $x=\text{const}$ 条件下的 $\sigma(t)$ 、 $v(t)$ 或 $\varepsilon(t)$ 分布曲线。它们可通过相应的作图方法获得，如图 1-3-4 所示，其中 $\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ ，等。作出不同时刻 t_i 的波形曲线或不同位置 x_j 的时程曲线，可以直观地观察到应力波的传播过程。

在零初值条件下，由以上分析和杆边界上应力与速度的关系为 (图 1-3-2 M 点)

$$\sigma = -\rho_0 c_0 v$$

令 $\sigma = \sigma_s$ (材料的屈服极限)，可得杆产生塑性应变的临界速度

$$v_s = \frac{|\sigma_s|}{\rho_0 c_0} \tag{1-3-16}$$

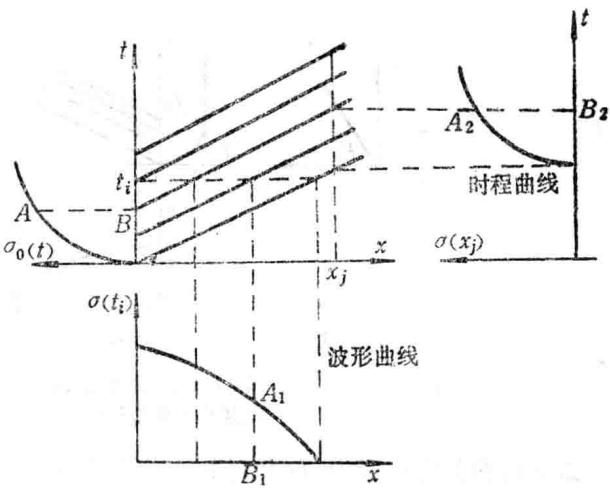


图 1-3-4 波形曲线与时程曲线

§ 1-4 冲击波与间断波关系式

从函数 (如 σ 、 v 、 ε) 的波形曲线 (或时程曲线) 去看，分布函数可以是光滑连续的，或不光滑连续的，也可以是间断的，如图 1-4-1 所示。通常所说的冲击波，是指波形曲线存在间断的应力波；更准确地说，是指该间断面所表征的应力扰动。冲击波也称强间断波。连续波，包括了光滑连续和不光滑连续两种。不光滑连续的应力波，又称为弱间断波，即函数 (σ 、 v 、 ε) 本身连续但其偏导数存在间断的应力波。如果一阶偏导数 ($\partial\sigma/\partial t$ ， $\partial\sigma/\partial x$ 等) 有间断，称为一阶弱间断。如果直到 $(n-1)$ 阶偏导数都连续，而 n 阶偏导数发生间断，则称为 n 阶弱间断。一种特殊的弱间断波是加速度波，它是指速度连续而加速度发生间断的应力波。

冲击波产生的原因来自两个方面：一是边界上施加突加载荷 (强间断加载)；二是材料的本构关系引起的。

考虑一个半无限长的线弹性杆，在边界 $x=0$ 处受一个突加的冲击速度 v^* 的作用。可先作简化分析，认为冲击是在有限时间 t_0 中从零加到 v^* 的，如图 1-4-2(b) 所示。在 t_0 时刻发生的特征线经过之后，杆中速度达到常数 $v=v^*$ 。于是，当 $t_0 \rightarrow 0$ 时，所有特征线都重迭在第一根特征线上，形成图 1-4-2(c) 的冲击波结构。

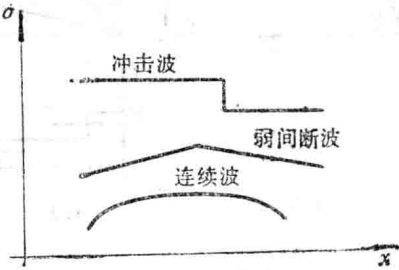


图 1-4-1 各种类型波形曲线