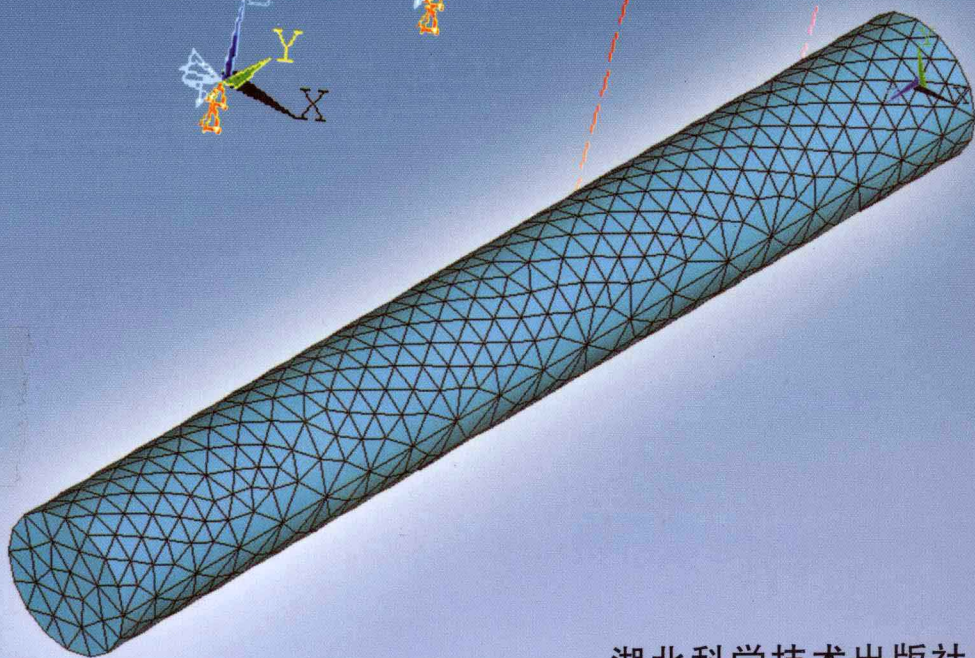


A 弹塑性力学有限元法及 ANSYS 应用

TANSUXING LIXUE YOUXIAN YUANFA JI
ANSYS YINGYONG

黄忠文 李元松 郑贤中 主编
杨 侠 吴艳阳 主审



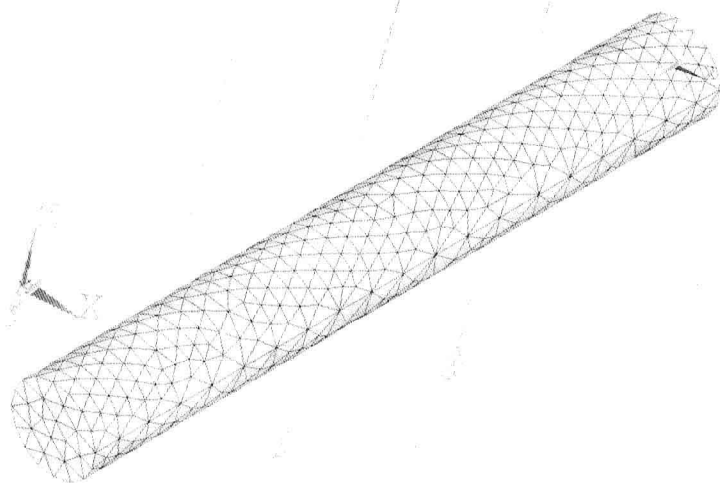
湖北科学技术出版社

普通高等教育“十二五”力学精品教材

A²弹塑性力学有限元法及 ANSYS应用

TANSUXING LIXUE YOUXIAN YUANFA JI
ANSYS YINGYONG

主 编	黄忠文	李元松	郑贤中
主 审	杨 侠	吴艳阳	
参 编	魏化中	夏新念	石大立
	黄志强	马志敏	马季红



湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

弹塑性力学有限元法及 ANSYS 应用 / 黄忠文著. —武汉: 湖北科学技术出版社,
20011.3

ISBN 978-7-5352-4702-5

I. 弹… II. ①黄… III. ①弹性力学—有限元法②塑性理论—有限元法③有限
元分析—应用程序, ANSYS IV. ①O343②O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 023508 号

责任编辑: 高诚毅

封面设计: 喻 杨

出版发行: 湖北科学技术出版社

电话: 027-87679468

地 址: 武汉市雄楚大街 268 号

邮编: 430070

(湖北出版文化城 B 座 12-13 层)

网 址: <http://www.hbstp.com.cn>

印 刷: 石首市印刷一厂

邮编: 434400

787 × 1092 1/16

13 印张 268 千字

2011 年 3 月第 1 版

2011 年 3 月第 1 次印刷

定价: 35.00 元

本书如有印装质量问题 可找本社市场部更换

前 言

有限元法是随着电子计算机的发展而迅速发展起来的一种工程力学问题的数值求解方法。与材料力学、结构力学、弹性力学的方法相比,有限元法可以进一步的解决各种复杂的工程力学问题。

采用有限元法之后,可以把实际结构划分为一个个单元,而单元与单元之间通过节点相连,这样就可以用有限个离散单元组合体的有限元网格计算模型去代替实际结构。随着计算机软硬件技术的发展,单元可以划分得越来越小,网格可以划分得越来越密,使有限元计算模型及计算结果趋于接近实际结构,让实际工程结构设计既安全又经济合理。

由于有限元法的有效性,其理论与应用发展非常迅速。有限元法的应用已经从固体力学领域发展到流体力学、热力学、电磁学、声学、光学、生物学等诸多领域的耦合场问题。通过计算机采用有限元法,可以加快设计或研究问题的进度,并大大提高其安全性、可靠性和经济性,对工业技术的发展起到了巨大的推动作用。

所以,有限元法已经成为工程设计与分析中的现代方法,需要越来越多的工程技术人员掌握这种现代技术。首先应该理解和掌握有限元法的基本原理和基本方法,然后要进一步学会利用有限元工程软件对实际结构进行分析。

本书对弹塑性力学有限元法的基本原理和基本方法的描述由浅入深,循序渐进,重点难点突出。通过不同的问题逐步推导有限元法的计算过程,并配有相应的计算示例以及大型工程软件的使用实例,以加深读者的理解和消化。

ANSYS 软件是应用最为广泛的有限元分析工程软件,本书注重有限元法的基本理论与基本过程的阐述和 ANSYS 程序工程实用性的有机结合,希望使读者对有限元法的基本原理、计算方法和工程应用有一个全面的了解。

本书尽力考虑了面向大多数读者,力求做到概念清晰,层次分明,以便于学习,便于教学。全书中各种工程问题都配有相应的程序应用实例供上机练习时参考,只学不练是学不好有限元法的,所以上机应用工程软件程序解决具体工程问题是一项十分必要的任务。

对于所介绍的各种工程问题,在第 10 章的内容中大部分都配有 ANSYS 程序的结构计算实例。

本书由武汉工程大学力学教研室的黄忠文老师任主编并统稿,黄忠文老师是西安交通大学工程力学专业毕业的学士及华中科技大学固体力学专业毕业的硕士,在武汉工程大学力学教研室长期从事力学类课程的教学与研究工作。

本书由武汉工程大学土木工程教研室的李元松教授和武汉工程大学力学教研室的郑贤中

副教授担任副主编,武汉工程大学力学教研室的魏化中老师、夏新念老师、石大立老师、黄志强老师、马志敏老师、马季红老师等全体老师参编。

本书承蒙武汉工程大学机电工程学院的杨侠副院长与力学教研室的吴艳阳主任担任主审。

另外,武汉工程大学的校领导,武汉工程大学教务处、研究生处、机电工程学院和环境与城市建设学院等,对于本书的编写工作给予了支持与帮助。

本书在编写过程中得到了各界同仁和朋友们的大力支持、鼓励和帮助,并参阅了相关资料,在此作者一并表示衷心感谢!

由于编者水平有限,书中难免存在不当之处,敬请读者不吝批评指教。

联系电子邮箱:hzwen2001@sina.com。

编 者

目 录

第 1 章 弹性力学的基本理论与有限元法的理论基础	(1)
1.1 弹性力学的任务	(1)
1.2 平衡微分方程与应力状态分析	(1)
1.3 几何方程、应变状态分析与应变协调方程	(9)
1.4 线弹性体的物理方程	(12)
1.5 边界条件	(14)
1.6 弹性力学问题的解析法	(15)
1.7 弹性力学平面问题	(18)
1.8 弹性力学基本方程的矩阵表示	(24)
1.9 变形体的虚功原理	(26)
1.10 强度理论及当量应力	(30)
1.11 有限元法的主要理论基础	(31)
习题	(31)
第 2 章 有限元法的基本概念	(32)
2.1 结构分析的方法简介	(32)
2.2 有限元法的基本思想	(32)
2.3 有限元结构分析的分析流程	(33)
2.4 整体坐标系和局部坐标系的概念	(33)
2.5 有限元法的基本步骤	(34)
2.6 有限元法的发展概况	(37)
习题	(43)
第 3 章 杆系结构的有限元法	(44)
3.1 杆系结构的离散化与数据化	(44)
3.2 单位脉冲函数	(45)
3.3 杆系结构中杆端力等物理量的正向规定	(45)
3.4 拉(压)杆单元在局部坐标系中的单元刚度方程	(45)
3.5 扭转杆单元在局部坐标系中的单元刚度方程	(47)
3.6 不计轴向变形的弯曲梁单元在局部坐标系中的单元刚度方程	(48)
3.7 平面刚架的梁单元在局部坐标系中的单元刚度方程	(50)
3.8 平面连续梁的梁单元的单元刚度方程	(50)
3.9 空间刚架的梁单元在局部坐标系中的单元刚度方程	(51)
3.10 单元刚度矩阵的性质	(52)
3.11 坐标变换	(52)
3.12 整体分析集成为结构整体刚度方程	(54)
3.13 结构整体原始刚度矩阵的性质	(56)

3.14	约束(边界条件)处理	(56)
3.15	求解线性方程组	(57)
3.16	内力、应力计算与强度设计	(57)
	习题	(59)
第4章	平面问题的有限元法	(61)
4.1	平面问题的概念	(61)
4.2	位移模式与形函数的概念	(62)
4.3	常应变三角形单元	(62)
4.4	四节点矩形(双线性)单元	(67)
4.5	平面等参数单元的概念	(69)
4.6	四节点任意四边形等参数单元	(69)
4.7	八节点任意曲边四边形等参数单元	(73)
4.8	高斯 Gauss 数值积分计算公式	(76)
	习题	(76)
第5章	空间问题的有限元法	(78)
5.1	四节点四面体单元	(78)
5.2	八节点六面体单元	(81)
5.3	二十节点六面体单元	(82)
5.4	八节点任意直边六面体等参数单元	(82)
5.5	二十节点任意曲边六面体等参数单元	(85)
	习题	(85)
第6章	空间轴对称问题的有限元法	(86)
6.1	空间轴对称问题的概念	(86)
6.2	空间轴对称问题的基本方程	(86)
6.3	空间轴对称问题的单元分析	(87)
	习题	(89)
第7章	板壳问题的有限元法简介	(90)
7.1	弹性薄板的基本理论	(90)
7.2	弹性薄板的矩形薄板单元	(92)
7.3	弹性薄板的任意四边形薄板单元	(93)
7.4	柱壳有限元分析的矩形平面薄壳单元	(94)
	习题	(95)
第8章	结构动力学问题的有限元法简介	(96)
8.1	结构动力学问题的任务	(96)
8.2	结构动力学问题有限元法的分析过程	(96)
8.3	有限元法的动力学方程	(96)
8.4	单元质量矩阵	(97)
8.5	单元阻尼矩阵	(98)
8.6	特征值问题(固有频率及振型)	(98)
8.7	结构动力学方程的求解方法	(99)

习题	(99)
第 9 章 塑性力学问题的有限元法简介	(100)
9.1 非线性的类别	(100)
9.2 塑性力学的基本知识	(100)
9.3 塑性力学的屈服条件	(105)
9.4 塑性力学的全量理论及其有限元法	(107)
9.5 塑性力学的增量理论及其有限元法	(110)
习题	(114)
第 10 章 基于 ANSYS 程序软件的结构分析实例	(115)
10.1 ANSYS 程序软件概述	(115)
10.2 ANSYS 程序软件常用的单元类型	(118)
10.3 ANSYS 程序软件的结构分析步骤与常用命令简介	(119)
10.4 平面桁架的静力分析实例	(124)
10.5 平面刚架的静力分析实例	(127)
10.6 杆系组合结构问题的静力分析实例	(132)
10.7 带孔平板平面应力问题的静力分析实例	(137)
10.8 拉伸试件空间问题的静力分析实例	(141)
10.9 薄壁圆筒空间轴对称问题的静力分析实例	(144)
10.10 平板玻璃板壳问题的静力分析实例	(147)
10.11 机械连杆的静力分析实例	(150)
10.12 六角扳手的静力分析实例	(154)
10.13 轴承支座的静力分析实例	(158)
10.14 弹簧质量系统的动力分析实例	(161)
10.15 带集中质量梁的动力分析实例	(163)
10.16 平面刚架的动力分析实例	(169)
10.17 钢平板的动力分析实例	(174)
10.18 圆盘的塑性变形分析实例	(182)
10.19 金属挤压的塑性变形分析实例	(186)
10.20 土壤的塑性变形分析实例	(193)
参考文献	(199)

第 1 章 弹性力学的基本理论与有限元法的理论基础

有限元法的理论基础主要有两大部分,第一大部分为弹性力学基本理论中的基本方程,第二大部分为弹性力学基本理论中的变形体的虚功原理。

根据弹性力学理论,为了研究线弹性体的解答,首先需要建立微元体的平衡条件、几何关系、应力与应变的关系、边界应满足的条件等,这些方程统称为弹性力学的基本方程。

本书将只对弹性力学的基本理论作简洁的概要介绍。

1.1 弹性力学的任务

1.1.1 弹性力学的任务

弹性力学的任务是研究一般物体(形状可以是任意的)在外界因素(荷载和温度等)的作用下产生弹性变形时的应力、变形和位移的分布规律。

弹性力学是材料力学课程的延续,可以得到比材料力学更加精确更加全面的解答。

1.1.2 弹性力学问题的假设

(1)几何假设即小变形假定。

(2)物理假设包括连续性假定、均匀性假定(指同一类型的均匀的材料即弹性常数不随坐标系的改变而改变)、各向同性假定(指任一点在各个方向的力学性质相同)、完全弹性假定、无初始应力假定。

需要强调指出的是,在弹性力学中假设所研究的变形物体是连续、均匀和各向同性的,在数学上来说,即物体内的位移、应力、应变等都是光滑连续的函数。

1.1.3 弹性力学问题的主要解法

(1)解析法(精确的函数解):包括位移法、应力法等。

(2)近似解法:包括变分法(即能量法)、差分法、有限元法等。

1.2 平衡微分方程与应力状态分析

1.2.1 平衡微分方程与切应力互等定理

材料力学指出,物体中某一点处的应力状态,是指过该点不同方向面上应力的集合。而且,一点处的应力状态可用围绕该点的微元体及其三对互相垂直面上的应力来描述。

在线弹性体中的任意一点的邻域截取一个微六面体,如图 1—1 所示。在这个微六面体中,若微元面的外法线方向与坐标正方向一致,则称为正面;若微元面的外法线方向与坐标正

方向相反,则称为负面。因此有三个正面和三个负面,六个面上都存在应力分量。正面上,与坐标轴同向的应力分量为“+”,反向为“-”;负面上,与坐标轴同向的应力分量为“-”,反向为“+”。

图 1-1 所示微元体中的应力分量均为“+”的方向。

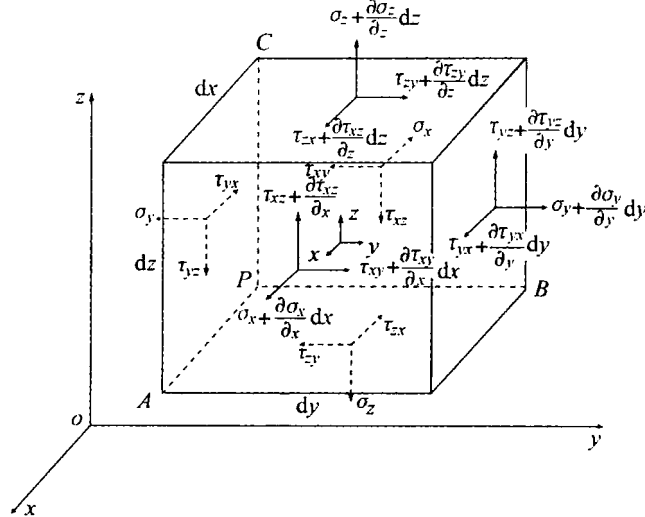


图 1-1 微元体的受力示意图

三个负面上的应力分量分别记为:

x 轴的负面: $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$

y 轴的负面: $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$

z 轴的负面: $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$

由于位移、应力、应变等都是位置坐标 (x, y, z) 的单值连续函数,即有 $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$, 对于 x 轴的正面应该有 $\sigma_x' = \sigma_x(x + dx, y, z)$, 则按 Taylor 级数展开并略去高阶微量各项可得 $\sigma_x' = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, 依此类推。

所以,三个正面上的应力分量分别为:

x 轴的正面: $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx, \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$

y 轴的正面: $\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy, \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy, \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$

z 轴的正面: $\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz, \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz, \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$

物体处在平衡状态,其内部的每一点都应处在平衡状态。

使用一个微六面体代表物体内的一点,则作用在该微六面体上的所有力应满足平衡条件,由此可推导出平衡微分方程与切应力互等定理。

不计惯性力,考虑体积力(例如重力),设微元体的体积力密度(单位体积内的力)表示为列向量

$$\vec{F}_b = \{F_{bx}, F_{by}, F_{bz}\}^T$$

那么微元体平衡方程分别为:

$$\sum F_x = 0, \text{ 即}$$

$$-\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + F_{bx} dx dy dz = 0$$

$\sum F_y = 0$, 即

$$-\sigma_y dx dz + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{zy} dx dy + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy + F_{by} dx dy dz = 0$$

$\sum F_z = 0$, 即

$$-\sigma_z dx dy + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dy dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{yz} dx dz + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz + F_{bz} dx dy dz = 0$$

整理后可得到, 平衡微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_{bx} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_{by} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} = 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

若采用如下的求和约定的表示符号

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} \quad (i = x, y, z) \quad (1-2)$$

则平衡方程可缩写为

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0 \quad (i = x, y, z) \quad (1-3)$$

另外, 考虑图 1-1 中微元体的力矩平衡, 对通过微元体形心点且平行于 x 轴方向的轴取矩, 则有

$$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{xy} dx dy \frac{dz}{2} = 0$$

略去高阶项后只剩两项, 即

$$(\tau_{yz} dx dz) dy - (\tau_{xy} dx dy) dz = 0$$

由此可得

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

同理, 对沿 y 轴和 z 轴方向的形心轴取矩可得

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

写在一起为

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \end{cases} \quad (1-4)$$

这就是切应力(或剪应力)互等定理。

在材料力学中已经给出了切应力互等定理。

切应力互等定理表明:在两个相互垂直的平面上,与两平面的交线垂直的切应力分量的大小相等,方向指向或背离这条交线。

根据切应力互等定理,公式(1-1)中包含的 9 个应力分量中,只有 6 个是独立的,这 6 个应力分量就描述了物体任意一点的应力状态。

如果微元体不平衡,根据达朗贝尔原理,加上惯性力后,则可得运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_{bx} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_{by} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1-5)$$

式中, ρ 为材料的密度, $u(x, y, z, t)$ 、 $v(x, y, z, t)$ 、 $w(x, y, z, t)$ 分别为坐标点 (x, y, z) 在时刻 t 的位移分量。

对于平面二维问题,平衡微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_{bx} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_{by} = 0 \end{cases} \quad (1-6)$$

对于平面二维问题,运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_{bx} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_{by} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1-7)$$

1.2.2 空间应力状态分析

(1) 应力矩阵的概念

将空间三维应力状态的应力分量排列成为一个矩阵,称为应力矩阵或应力张量,表示为

$$[\sigma] = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

根据切应力互等定理,应力矩阵为对称矩阵。

应力矩阵可以完全确定或代表某一点的应力状态。

(2) 任一方向面上的应力

如图 1-2 所示,针对空间三维应力状态的微元体采用截面法得到四面微元体。

设外法线单位方向矢量为 $\vec{\lambda}(l, m, n)$ 的任一斜截面 ABC 上(斜截面 ABC 用 V 标识,也可称为方向面)的应力为 $\vec{P}_V$,其沿坐标轴方向的三个分量为 (X_V, Y_V, Z_V) ,正应力分量为 σ_V ,切应力分量为 τ_V ,则有

$$\begin{aligned} \vec{P}_V &= X_V \vec{i} + Y_V \vec{j} + Z_V \vec{k} \\ P_V^2 &= X_V^2 + Y_V^2 + Z_V^2 = \sigma_V^2 + \tau_V^2 \end{aligned}$$

设斜截面 ABC 的面积为 dA ,则另外三个微元面的面积分别为 ldA, mdA, ndA 。研究四面微元体的平衡,考虑到 $\Delta V = V_{OABC} \rightarrow 0$ 即忽略体积力。

则由平衡方程 $\sum F_x = 0$ 得

$$X_V dA - \sigma_x l dA - \tau_{yx} m dA - \tau_{zx} n dA = 0$$

即为

$$X_V = \sigma_x l - \tau_{yx} m - \tau_{zx} n$$

同理,由平衡方程 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_z = 0$ 可推导得到另外两个类似的方程。

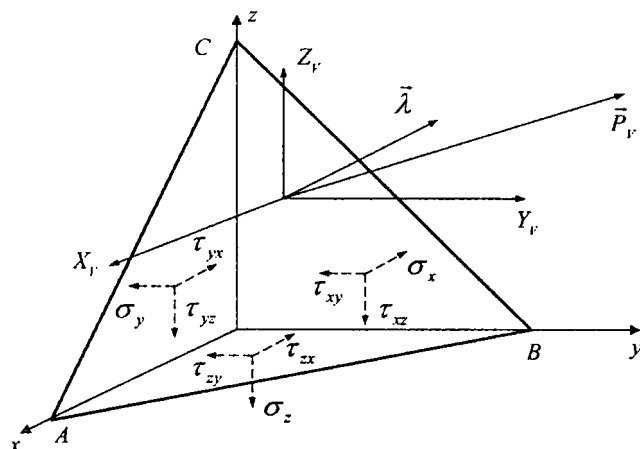


图 1-2 任一方向面上的应力分析的示意图

那么有

$$\begin{cases} X_V = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y_V = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z_V = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (1-9)$$

写成矩阵形式为

$$\{P_V\} = \begin{Bmatrix} X_V \\ Y_V \\ Z_V \end{Bmatrix} = [\sigma]^T \{\lambda\} = [\sigma]^T \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = [\sigma] \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

即为

$$\{P_V\} = \begin{Bmatrix} X_V \\ Y_V \\ Z_V \end{Bmatrix} = [\sigma] \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

上式称为柯西公式。柯西公式表明,根据某一点的应力分量可以求出任意一个方向面上的应力。

进一步可求得该方向面上的正应力和切应力分别为

$$\sigma_V = X_V l + Y_V m + Z_V n = \{\lambda\}^T \{P_V\} = \{\lambda\}^T [\sigma]^T \{\lambda\}$$

$$\tau_V = \sqrt{P_V^2 - \sigma_V^2}$$

(3) 应力矩阵的坐标变换

当坐标系变化时,只要该点相对于物体的空间位置不变,该点的应力状态就不会发生变化,但是在新坐标系中表示该点应力状态的六个应力分量将发生改变。

设原来坐标系为 $Oxyz$, 应力矩阵为 $[\sigma]$, 新的坐标系为 $Ox'y'z'$, 应力矩阵为 $[\sigma']$, x'

在原坐标系中的方向矢量、 y' 在原坐标系中的方向矢量、 z' 在原坐标系中的方向矢量分别为

$$\{\lambda_1\} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}, \quad \{\lambda_2\} = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix}, \quad \{\lambda_3\} = \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

把 x' 或 y' 或 z' 为外法线的微元面分别看成原来坐标系中的一个斜面, 将求出的斜面上应力 $\{P_v\}$ 分别向一个正应力方向和两个切应力方向投影, 最后得到新坐标系中的应力矩阵 $[\sigma']$ 为

$$[\sigma'] = [\lambda][\sigma][\lambda]^T = [\lambda][\sigma][\lambda]^T$$

其中

$$[\lambda] = \begin{Bmatrix} \{\lambda_1\}^T \\ \{\lambda_2\}^T \\ \{\lambda_3\}^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

那么对于任意两个互相垂直的方向有

$$\sigma_{ij'} = \{\lambda_{j'}\}^T [\sigma] \{\lambda_i\}$$

(4) 主应力

材料力学定义: 只有正应力而切应力为 0 的微元面称为主平面, 此时主平面上的正应力称为主应力, 主平面的外法线方向称为主方向。

那么可推导如下:

由 $\tau_v = 0$ 即 $\vec{P}_v = \hat{\sigma}_v = \sigma$ 得

$$\{P_v\} = \begin{Bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_v l \\ P_v m \\ P_v n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma l \\ \sigma m \\ \sigma n \end{Bmatrix} = \sigma [I] \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

根据公式(1-10)有

$$\{P_v\} = \begin{Bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{Bmatrix} = [\sigma] \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

所以可得到

$$([\sigma] - \sigma[I]) \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0$$

此方程组的系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix}$$

另外还有条件

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

主平面是存在的, (l, m, n) 必须有非零解, 所以系数矩阵的行列式必须为零, 根据系数矩阵的行列式等于零就可以求解得到主应力。

从数学上来说, 应力矩阵 $[\sigma]$ 的特征值就是主应力。对称矩阵有三个实数特征值即为三个主应力, 对应的三个特征向量即为三个对应的主方向。

规定三个主应力由大到小进行排列,即

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

上述系数矩阵的行列式等于零,称为特征方程,展开的形式可写为

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0 \quad (1-11)$$

式中

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1-12)$$

由于主应力的大小与坐标系选择无关,那么其中 J_1, J_2, J_3 系数为不变量,称为应力不变量。

如果坐标轴恰好与三个主方向重合,则以三个主应力的方向为坐标轴的几何空间称为主应力空间或主向空间。针对主向空间也可得到应力不变量用三个主应力表示的表达式。

(5)最大切应力

如果坐标轴恰好与主方向重合,则以主应力的方向为坐标轴的几何空间称为主应力空间或主向空间。针对主向空间有

$$\begin{aligned} \{P_V\} = \begin{Bmatrix} X_V \\ Y_V \\ Z_V \end{Bmatrix} &= [\sigma] \{\lambda\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 l \\ \sigma_2 m \\ \sigma_3 n \end{Bmatrix} \\ \sigma_V &= lX_V + mY_V + nZ_V \end{aligned}$$

令拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L &= \tau_V^2 + \lambda f = P_V^2 - \sigma_V^2 + \lambda f \\ &= (\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2) + \lambda(l^2 + m^2 + n^2 - 1) \end{aligned}$$

由 $\frac{\partial L}{\partial l} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial m} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, 可得到如下结果:

若 l, m, n 中有两个为 0, 则为主平面, 此时 τ_V^2 的三个极值均为 0, 即切应力最小值为 $\tau_{\min} = 0$;

若 l, m, n 中有一个为 0, 其余两个的绝对值为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 此时 τ_V^2 三个极值分别为

$$\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2, \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2, \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

因为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

故最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1-13)$$

(6)应力球矩阵(应力球张量)与应力偏矩阵(应力偏张量)

在一般情况下,某一点处的应力状态可分解为两部分,即

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ii} + s_{ij} \quad (1-14)$$

其中

$$\sigma_{ii} = \sigma_m [I] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$, 称为平均应力;

$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ 称为体积应力。

在主向空间, 任一斜面上的应力 $\vec{P}_v = X_v \vec{i} + Y_v \vec{j} + Z_v \vec{k}$ 满足

$$\{P_v\} = \begin{Bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{Bmatrix} = [\sigma] \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 l \\ \sigma_2 m \\ \sigma_3 n \end{Bmatrix}$$

即 $\frac{X_v^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y_v^2}{\sigma_2^2} + \frac{Z_v^2}{\sigma_3^2} = 1$, 称为应力椭球面;

当 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m$ 时, 成为一个球面;

故 σ_m 定义为应力球张量, 而 s_{ij} 称为应力偏张量。

应力偏张量也具有三个不变量 J'_1, J'_2, J'_3 。

[例题 1-1]

设物体内部某一点的应力张量是 $[\sigma] = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(1) 求 $\vec{\lambda} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$ 方向面上的正应力与切应力;

(2) 求主应力与最大切应力。

解: (1) 该方向面上的应力为

$$\{P_v\} = \begin{Bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{Bmatrix} = [\sigma] \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

正应力为

$$\sigma_v = lX_v + mY_v + nZ_v = \frac{11}{3}$$

切应力为

$$\tau_v = \sqrt{P_v^2 - \sigma_v^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(2) 该应力张量的三个不变量分别为

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 = -6$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = -8$$

特征方程为

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0, \text{即}$$

$$\sigma^3 - 3\sigma^2 - 6\sigma + 8 = 0$$

解得3个主应力分别为

$$\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -2$$

最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 3$$

1.3 几何方程、应变状态分析与应变协调方程

1.3.1 小变形的几何方程

物体各点的位移是随各点位置不同而变化的,即各点的位移分量应为坐标的单值连续函数,即

$$u = u(x, y, z)$$

$$v = v(x, y, z)$$

$$w = w(x, y, z)$$

图1-3为平面情况下二维弹性体沿坐标方向所取的两正交微段AB与AC及其位移的示意图。

变形之前A、B、C三点的坐标分别为

$$A(x, y)$$

$$B(x + dx, y)$$

$$C(x, y + dy)$$

变形之后对应的三点的坐标分别为

$$A'(x + u, y + v)$$

$$B'(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx)$$

$$C'(x + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy)$$

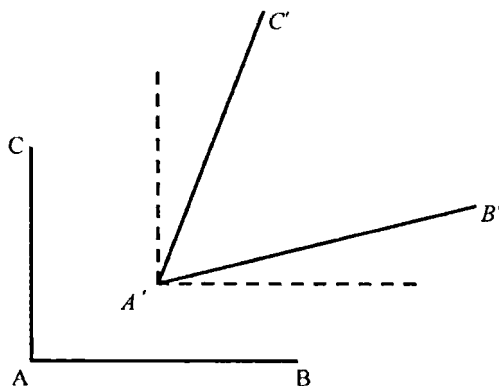


图1-3 两正交微段及位移的示意图

与材料力学一样,线应变定义为:某坐标方向的正应变等于微段的长度改变量除以微段原长。