



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



传承辉煌的历史 **2009 版** 开启成功的未来

考研数学

题型集粹与练习题集

陈文灯 黄先开 编著

(理工类)

题型集训 以一敌百
技巧丰富 好题荟萃

世界图书出版公司

传承辉煌的历史 **2009 版** 开启成功的未来

考研数学

题型集粹与练习题集

陈文灯 黄先开 编著

(理工类)

题型集训 以一敌百
技巧丰富 好题荟萃

图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与练习题集. 理工类 / 陈文灯, 黄先开编著. —11 版. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2004. 1

ISBN 978-7-5062-5212-6

I. 数... II. ①陈... ②黄... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 015003 号

数学题型集粹与练习题集(理工类) (2009 版)

主 编: 陈文灯 黄先开

责任编辑: 世 华

封面设计: 章 良

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话: 88861708 邮编: 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 北京铁建印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 27.75

字 数: 448 千字

版 次: 2008 年 2 月第 11 版 2008 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5212-6/O · 333

定价: 44.80 元

服务热线: 010 - 88861708

前言

《题型集粹与练习题集》(理工类)作为《数学复习指南》(理工类)的姐妹篇,自第一版问世以来已近十载,受到越来越多的读者欢迎。许多考生选择将本书和《数学复习指南》配套使用,作为考研数学复习的主要参考书籍,被有的读者戏称“双剑合璧”。

《题型集粹与练习题集》旨在强化读者对《数学复习指南》中知识点的理解和运用,将知识点与考查题型结合起来,锻炼读者的实际解题能力。本书是作者多年评阅试卷和在文登培训学校考研辅导的经验之作,所讲例题及所选习题都是从多年教学中总结出来的有代表性的试题。通过本书的学习和训练,能帮助读者达到吃透规律,举一反三的目的。

本书特点以及使用建议:

题型归纳和精讲:

本书将考研数学所要求的知识点按题型进行归类。针对每种题型,给出相应的方法和规律,同时给出若干道典型例题进行精讲,帮助读者理解具体的解题技巧。同时配合了题型演练,强化读者的理解和实际答题能力。建议读者仔细体会方法和规律部分,在做题的过程中有意识地加以应用。

阶梯化训练题:

根据难度及综合性把习题分为基础能力题和综合提高题,题量适中,选题科学,适合读者在复习的不同阶段进行训练,逐步提高解题能力。建议读者能独立去解答这些习题,有意识地应用例题中学到的方法去解题,尽量不要从一开始就依赖答案,养成独立思考的习惯。在参考答案部分,我们给出了题型训练和阶梯化训练的详细解答,读者可以借鉴和参考其中的思路和方法。

四套模拟试题:

依据大纲的难度和要求,我们为读者精编了四套模拟试卷。每套试卷都给出了详细的解答,包括分析、详解和评注,建议读者严格按照考试时间完成试卷并及时查缺补漏,以达到模拟演练的目的。

本书如有不当和错误之处,恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

编者

2008年2月

目 录

第1篇 高等数学

第1章 函数·极限·连续 1

题型归纳与精讲 1

题型1 函数奇偶性的判别 1

题型2 函数有界性的判别 1

题型3 求复合函数表达式 2

题型4 已知数列的前几项数值及通项的表达式,
求数列的极限 3

题型5 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限 3

题型6 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限 4

题型7 通项为积分形式的数列的极限 5

题型8 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限 5

题型9 求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限 5

题型10 求 $\infty - \infty$ 型未定式的极限 6

题型11 求 $0 \cdot \infty$ 型未定式的极限 6

题型12 求 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的极限 7

题型13 无穷小量的比较 8

题型14 极限式中常数值确定 8

题型15 函数连续性的讨论(重点) 9

题型16 确定函数的间断点及其类型 9

题型17 分段函数式中参数的确定(重点)
..... 10

阶梯化训练题 11

基础能力题 11

综合提高题 13

参考答案 15

题型演练答案 15

基础能力题答案 18

综合提高题答案 22

第2章 导数与微分 29

题型归纳与精讲 29

题型1 求函数在某点处的导数 29

题型2 求函数方程 29

题型3 求复合函数的导数 30

题型4 求参数方程所确定的函数的导数 31

题型5 隐函数求微分 31

题型6 分段函数求导 32

题型7 高阶导数的计算 33

阶梯化训练题 34

基础能力题 34

综合提高题 36

参考答案 37

题型演练答案 37

基础能力题答案 38

综合提高题答案 42

第3章 不定积分 46

题型归纳与精讲 46

题型1 分式有理函数的积分 46

题型2 简单无理函数的积分 46

题型3 三角有理式的积分 47

阶梯化训练题 48

基础能力题 48

综合提高题 49

参考答案 50

题型演练答案 50

基础能力题答案 51

综合提高题答案 53

第4章 定积分 59

题型归纳与精讲 59

题型1 含变上限积分的题型求解 59

题型2 含有绝对值符号的定积分的计算 60

题型3 含奇偶函数与周期函数的定积分计算

.....	60
题型4 含三角有理式的定积分计算.....	61
题型5 分母为两项,而分子为分母中其中一项的 积分.....	61
题型6 含定积分等式的证明.....	62
题型7 定积分不等式的证明.....	63
题型8 反常积分的计算.....	65
阶梯化训练题	66
基础能力题	66
综合提高题	67
参考答案.....	69
题型演练答案	69
基础能力题答案	71
综合提高题答案	73
第5章 中值定理	80
题型归纳与精讲	80
题型1 结论为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题的证明	80
题型2 含 $f^{(n)}(\xi)$ 等式的证明	81
题型3 区间 (a,b) 内 $\exists \xi, \eta$ 满足某种关系式的命 题的证明.....	82
阶梯化训练题	83
基础能力题	83
综合提高题	83
参考答案.....	84
题型演练答案	84
基础能力题答案	85
综合提高题答案	87
第6章 一元微积分的应用	91
题型归纳与精讲	91
题型1 函数不等式的证明.....	91
题型2 求函数的极值与最值.....	92
题型3 关于方程根的讨论.....	92
题型4 函数图形在区间I上凹凸性的判别	94
题型5 渐近线的计算.....	94
题型6 求平面图形的面积.....	95
题型7 求立体体积.....	96

阶梯化训练题	97
基础能力题	97
综合提高题	98
参考答案	100
题型演练答案	100
基础能力题答案	102
综合提高题答案	105
第7章 向量代数与空间解析几何*	113
题型归纳与精讲	113
题型1 向量的运算	113
题型2 求平面方程	114
题型3 求空间直线方程	114
题型4 平面与平面、平面与直线、直线与直线的 关系	115
题型5 线性代数中线性相关性在解析几何中的 应用	116
题型6 投影线方程	117
题型7 旋转面方程	117
阶梯化训练题	118
基础能力题	118
综合提高题	119
参考答案	119
题型演练答案	119
基础能力题答案	121
综合提高题答案	122
第8章 多元函数微分学	125
题型归纳与精讲	125
题型1 讨论极限的存在性	125
题型2 讨论可导函数的可微性	125
题型3 求抽象的复合函数的偏导数	126
题型4 隐函数方程组求微分	127
题型5 多元函数微分学在几何中的应用	128
题型6 多元微分学的有关证明题	129
题型7 多元函数的极值	130
阶梯化训练题	131
基础能力题	131

综合提高题	131
参考答案	132
题型演练答案	132
基础能力题答案	134
综合提高题答案	135
第9章 重积分	139
题型归纳与精讲	139
题型1 更换积分次序	139
题型2 积分域为圆环或扇域的二重积分	139
题型3 分段函数的二重积分	140
题型4 二重积分不等式的证明	140
题型5 三重积分的计算*	141
阶梯化训练题	142
基础能力题	142
综合提高题	144
参考答案	145
题型演练答案	145
基础能力题答案	147
综合提高题答案	149
第10章 曲线曲面积分*	153
题型归纳与精讲	153
题型1 对弧长的曲线积分的计算	153
题型2 对坐标的曲线积分计算(重点)	154
题型3 对面积的曲面积分计算	156
题型4 对坐标系的曲面积分计算	157
题型5 曲面面积的计算	159
题型6 场论的相关计算	160
阶梯化训练题	161
基础能力题	161
综合提高题	162
参考答案	163
题型演练答案	163
基础能力题答案	166
综合提高题答案	168
第11章 无穷级数*	173
题型归纳与精讲	173

题型1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0)$ 的判敛	173
题型2 任意项级数收敛性的判断	174
题型3 有关数项级数的命题的证明	175
题型4 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 求收敛域, 幂级数求收敛域、收敛半径 R	176
题型5 求函数的幂级数展开式	177
题型6 级数求和	178
题型7 傅立叶级数	179
阶梯化训练题	181
基础能力题	181
综合提高题	181
参考答案	183
题型演练答案	183
基础能力题答案	185
综合提高题答案	186
第12章 常微分方程	191
题型归纳与精讲	191
题型1 一阶微分方程求解	191
题型2 可降阶的高阶微分方程的求解	192
题型3 高阶常系数线性微分方程的求解	193
题型4 欧拉方程的求解*	195
题型5 微分方程在几何和力学中的应用	196
阶梯化训练题	197
基础能力题	197
综合提高题	198
参考答案	199
题型演练答案	199
基础能力题答案	201
综合提高题答案	203

第2篇 线性代数

第1章 行列式	209
题型归纳与精讲	210
题型1 确定用行列式表示的多项式 $f(x)$ 中, 关	

于 x 的最高次数及 x 的各次幂前的系数	210
题型 2 3~5 阶行列式的计算	210
题型 3 证明抽象行列式等于零	211
题型 4 n 阶行列式的计算	212
阶梯化训练题	213
基础能力题	213
综合提高题	215
参考答案	216
题型演练答案	216
基础能力题答案	217
综合提高题答案	220
第 2 章 矩阵	223
题型归纳与精讲	223
题型 1 关于矩阵的基本性质及初等变换的命题	223
题型 2 有关 $\alpha^T \alpha$ 与 $\alpha \alpha^T$ 命题的求解与论证	224
题型 3 求 n 阶方阵 A 的 k 次幂 A^k	225
题型 4 求满秩矩阵的逆矩阵	226
题型 5 求解矩阵方程	227
题型 6 关于矩阵 A 存在逆矩阵的证明	228
题型 7 与方阵 A 的伴随矩阵 A^* 有关的命题的计算与证明	228
题型 8 矩阵秩的求法及有关矩阵秩的等式与不等式的证明	230
阶梯化训练题	231
基础能力题	231
综合提高题	232
参考答案	233
题型演练答案	233
基础能力题答案	236
综合提高题答案	238
第 3 章 向量	241
题型归纳与精讲	241
题型 1 有关向量的概念及其性质的命题	241
题型 2 有关线性表出判别的命题	242

题型 3 向量线性相关性的证明	243
题型 4 向量组的极大线性无关组及向量组秩的相关命题	244
题型 5 求过渡矩阵与向量的坐标*	245
题型 6 有关正交矩阵命题的证明*	245
阶梯化训练题	246
基础能力题	246
综合提高题	247
参考答案	248
题型演练答案	248
基础能力题答案	249
综合提高题答案	251
第 4 章 线性方程组	254
题型归纳与精讲	254
题型 1 含有参数的线性方程组解的讨论	254
题型 2 有关基础解系的命题证明	255
题型 3 涉及两个方程组解之间关系的命题的讨论	256
阶梯化训练题	257
基础能力题	257
综合提高题	260
参考答案	261
题型演练答案	261
基础能力题答案	263
综合提高题答案	267
第 5 章 矩阵的特征值与特征向量	271
题型归纳与精讲	272
题型 1 特征值的计算与相关证明	272
题型 2 矩阵 $(kE - A)$ 是否可逆的证明	273
题型 3 矩阵相似的证明	273
题型 4 已知 $P^{-1}AP = \Lambda$ 中两者求第三者	274
阶梯化训练题	275
基础能力题	275
综合提高题	277
参考答案	278

题型演练答案	278
基础能力题答案	280
综合提高题答案	285
第6章 二次型	288
题型归纳与精讲	289
题型1 有关二次型概念及性质的命题	289
题型2 将二次型化为标准形	290
题型3 二次型与其标准形中参数的确定及正交变换	291
题型4 有关正定矩阵命题的证明	292
阶梯化训练题	293
基础能力题	293
综合提高题	294
参考答案	294
题型演练答案	294
基础能力题答案	296
综合提高题答案	299

第3篇 概率论与数理统计初步*

第1章 事件的概率	302
题型归纳与精讲	302
题型1 利用条件概率与乘法公式概率计算	302
题型2 利用全概公式和逆概公式(贝叶斯公式)计算概率	303
阶梯化训练题	304
基础能力题	304
综合提高题	305
参考答案	306
题型演练答案	306
基础能力题答案	307
综合提高题答案	308
第2章 随机变量及其分布	310
题型归纳与精讲	310
题型1 求一维随机变量的分布函数及分布密度	310
题型2 求二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及其	

密度	311
题型3 求一维随机变量函数 $Y = g(X)$ 分布律(分布密度)	312
题型4 求二维随机变量 (X, Y) 函数 $g(X, Y)$ 的分布律(分布密度)	313
阶梯化训练题	315
基础能力题	315
综合提高题	317
参考答案	317
题型演练答案	317
基础能力题答案	319
综合提高题答案	323
第3章 随机变量的数字特征	326
题型归纳与精讲	326
题型1 求一维随机变量的数字特征	326
题型2 求一维随机变量函数的数字特征	327
题型3 求二维随机变量的数字特征	328
题型4 求二维随机变量 (X, Y) 函数 $Z = g(X, Y)$ 的数字特征	330
题型5 求多维随机变量的数字特征	330
阶梯化训练题	332
基础能力题	332
综合提高题	332
参考答案	333
题型演练答案	333
基础能力题答案	335
综合提高题答案	336
第4章 大数定律和中心极限定理 ...	340
题型归纳与精讲	340
题型1 估算随机事件的概率	340
题型2 试验次数 n 的确定	341
阶梯化训练题	343
基础能力题	343
综合提高题	343
参考答案	344
题型演练答案	344

基础能力题答案	345
综合提高题答案	345
第5章 数理统计初步	348
题型归纳与精讲	348
题型1 样本容量 n , 样本均值 $\bar{X}$ 及样本方差 S^2 的数字特征和概率的计算	348
题型2 求抽样分布	350
题型3 统计量的点估计	350
题型4 正态总体均值与方差的区间估计	351
题型5 估计量的相关命题	353
题型6 一个正态总体均值的假设检验	354
题型7 一个正态总体方差 $D(X) = \sigma^2$ 的假设检 验	355
题型8 两个正态总体均值的检验	356
阶梯化训练题	358
基础能力题	358

综合提高题	359
参考答案	360
题型演练答案	360
基础能力题答案	362
综合提高题答案	362

第4篇 模拟题及参考答案

数学1 模拟试卷(一)及参考答案	366
数学1 模拟试卷(二)及参考答案	378
数学2 模拟试卷(一)及参考答案	393
数学2 模拟试卷(二)及参考答案	404

附录

2008 年硕士研究生入学考试数学试题 一、二及参考答案	415
---------------------------------------	-----

注:带*篇、章,数二考生不作要求。

第1篇 高等数学

第1章 函数·极限·连续

命题特点:

函数部分一般和其他考点联合出题,如求函数的表达式;关于函数的性质出单项选择题的可能性较大;极限部分一般出填空题或与其他部分联合出题,函数的连续部分一般出单项选择题或计算题.

题型归纳与精讲

题型1 函数奇偶性的判别

方法和规律: 判别函数奇偶性的方法:(1) 主要依据奇偶性的定义.有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;偶函数之积为偶函数;偶数个奇函数之积为偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.(2) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,则函数就无奇偶性可言.

典例精析

判别函数的奇偶性:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为连续的偶函数.}$$

【分析】 利用变量代换求出 $F(-x)$, 然后比较 $F(x)$ 与 $F(-x)$ 的关系.

$$\text{【解】 } F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t = -u} \int_0^x f(-u) (-du) \xrightarrow{\substack{f(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} - \int_0^x f(u) du,$$

$$\therefore F(x) + F(-x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = 0,$$

$\therefore F(x)$ 为奇函数.

※ 题型演练1 判别函数的奇偶性: $F(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 是连续的奇函数. 奇

题型2 函数有界性的判别

方法和规律: 证明或判别函数有界性的思路:(1) 利用有界性定义.(2) 闭区间上连续函数

的有界性. (3) 有极限数列必有界. (4) $x \rightarrow x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

典例精析

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (l 为有限数), 试证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【分析】 本题运用闭区间上的连续函数必有界, 即可得证.

【证】 $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \therefore$ 对于取 $\varepsilon = \frac{|l|}{2}, \exists X > a,$

当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2},$

又 $|f(x) - l| \geq |f(x)| - |l|,$ 所以 $|f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2},$

即 $|f(x)| < \frac{3}{2}|l|.$

$\because f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 由闭区间上连续函数有界性, 可知 $\exists S,$ 使 $\forall x \in [a, X],$ 恒有 $|f(x)| < S.$

取 $M = \max\left\{S, \frac{3}{2}|l|\right\},$ 则对 $\forall x \in [a, +\infty),$ 恒有 $|f(x)| \leq M,$

即 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

※ 题型演练 2 试证 $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x te^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

题型3 求复合函数表达式

方法和规律: 利用函数性质, 可采用代入法, 分析法或图示法等求解.

典例精析

设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2},$ 求 $f[f(x)], f\left[\frac{1}{f(x)}\right].$

【分析】 本题为初等函数复合, 可采用代入法.

【解】 $f[f(x)] = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$

$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}.$

【评注】 如果是初等函数与分段函数的复合, 或两个分段函数的复合, 可采用分析法; 如果是两个分段函数的复合, 可采用图示法.

※ 题型演练 3 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n \text{ 次}},$ 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)].$

题型4 已知数列的前几项数值及通项的表达式,求数列的极限

方法和规律: 利用单调有界数列必有极限定理求解(求解程序:①判断极限的存在性

$\left\{ \begin{array}{l} \text{单调性} \\ \text{有界性} \end{array} \right.$,方法可用数学归纳法或不等式的放缩法;②先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$,然后通过解关于 l 的方程,求得 l 的值,从而得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$).或者利用数列极限的定义求解(先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$,然后在通项的两边取极限得出 l 的数值,再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性.此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

典例精析 设 $x_1 = 2, x_2 = 2 - \frac{1}{x_1}, \dots, x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$,求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【分析】 利用数列的单调有界性判断数列极限的存在性,然后通过解方程求出极限.

【解】 先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性:

$x_1 = 2 > 1$,若 $x_n > 1$,则 $0 < \frac{1}{x_n} < 1$,从而 $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} > 1$,因此 $x_{n+1} > 1$.

$x_2 - x_1 = -\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{2} < 0$,设 $x_n - x_{n-1} < 0$,那么

$$x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{x_n} - 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot x_n} < 0,$$

因此 $x_{n+1} < x_n$,

即 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界,故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$,在 $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限得

$$l = 2 - \frac{1}{l}, \text{即 } l^2 - 2l + 1 = 0, l = 1.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$,

【评注】 该类题目通常是先用数学归纳法证明数列极限的存在性.

※ 题型演练4 设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1+x_1}, \dots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

题型5 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限

方法和规律: 方法有:(1)特殊级数求和法.(2)利用幂级数求和法.(3)利用定积分定义求极限.(4)利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\frac{1}{n}$,剩余的可用一个通项表示,则用定积分定义求解数列

的极限;若数列的各项虽可提出一个因子 $\frac{1}{n}$,而剩余的不能用一个通项表示,但其各项是按递增或递减排列的,则用夹逼定理求极限.

典例精析 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2}{n}}$.

【分析】本题直接求解比较不便,利用夹逼定理转换函数形式,然后利用定积分的定义求解.

$$\text{【解】} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\therefore \frac{i^2}{n^2} \leq \frac{i^2+1}{n^2} \leq \frac{(i+1)^2}{n^2},$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$\text{又} \therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} = \arctan x \Big|_0^1 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}, \quad \text{故原极限} = \frac{\pi}{4}.$$

※ 题型演练 5 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

题型6 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限

方法和规律: 解法有: (1) 分子, 分母同乘以一个因子, 使之出现连锁反应; (2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式, 在整个相乘过程中中间项相消, 从而化简为易求极限; (3) 利用夹逼定理; (4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

典例精析 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$

【分析】本题利用夹逼定理即可求解.

【解】

$$\left. \begin{aligned} \because 1 \cdot 3 &< 2^2 \\ 3 \cdot 5 &< 4^2 \\ &\dots\dots\dots \\ (2n-1)(2n+1) &< (2n)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1) < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2 \\ &\Rightarrow 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{2n+1} < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \\ &\dots\dots\dots \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{又} \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0, \quad \text{故 由夹逼定理, 原极限} = 0.$$

※ 题型演练 6 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1}.$

题型 7 通项为积分形式的数列的极限

方法和规律: 注意:一般地 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$, 求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ 的方法:

(1) 利用不等式放缩法对 $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ 进行估值, 再用夹逼定理求极限. (2) 利用积分中值定理求极限.

典例精析 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

【分析】 本题可利用放缩法对 $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ 进行估值.

【解】 $\because$ 在 $[0, 1]$ 上, $x^n \geq 0$, 且 $\frac{1}{1+x}$ 连续,

$$\therefore 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1},$$

$$\text{其中 } 0 \leq \xi \leq 1, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1} = 0.$$

※ 题型演练 7 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

题型 8 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限

方法和规律: 求解 $\frac{0}{0}$ 型极限的方法: (1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子, 然后用连续函数的性质求极限; (2) 利用等价无穷小和泰勒公式求极限; (3) 利用洛必达法则求极限 (这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法); (4) 利用变量替换 (通常是令 $x = \frac{1}{t}$ 或 $x = \frac{1}{t^2}$) 求极限.

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1}$

【分析】 本题可利用等价无穷小量的代换求解.

【解】 将根式有理化, 于是有

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{(e^x - 1)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} \\ &\stackrel{\substack{\text{由等价无穷小} \\ \text{代换}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} = 1. \end{aligned}$$

※ 题型演练 8 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

题型 9 求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

方法和规律: 求解 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法: (1) 洛毕达法则; (2) 变量替换.

典例精析

求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^{2x} e^{t^2} dt\right)^2}{\int_{3x}^0 e^{2t^2} dt}$.

【分析】本题可利用洛必达法则求解.

【解】原极限 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^{2x} e^{t^2} dt \cdot 2e^{4x^2}}{-3e^{18x^2}} = -\frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{2x} e^{t^2} dt}{e^{14x^2}}$

$$= -\frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}} = -\frac{4}{3} \times \frac{1}{14} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^{10x^2}} = 0.$$

【评注】求 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限,通常以“抓大头”的办法解决为好(所谓抓大头就是取分子、分母中趋向于 $+\infty$ 最快的项).

※ 题型演练 9 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2} dt}{x(1+t^2) - (1+x^2) \cdot 2x}$

题型 10 求 $\infty - \infty$ 型未定式的极限

方法和规律: 转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$, 再运用洛必达法则求解, 或“抓大头”法求解.

典例精析

求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$.

【分析】本题可转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限.

【解】原极限 = $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x \cos x)}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

※ 题型演练 10 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$

题型 11 求 $0 \cdot \infty$ 型未定式的极限

方法和规律: $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 再用法则求解.

设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则

$$\lim f(x)g(x) \quad (0 \cdot \infty) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

注意: 一般讲, 对数函数和反三角函数一般不“下放”, 因为下放后的导数比原来的复杂, 违背数学运算的原则.

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$.

【分析】 本题可换成 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式.

$$\begin{aligned} \text{【解】原极限} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \frac{\pi x}{2}}{(1-x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}}{(1-x)^{-2}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^2}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(1-x)}{-2\cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin \pi x} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

※ 题型演练 11 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{1+x} \right)$

题型 12 求 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的极限

方法和规律: 基本思路是通过对数恒等式将其化为 $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$, 再用法则.

关于 1^∞ 型极限有两种求法:

(1) 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ (适用于底为 $1 \pm f(x)$ 或易化为 $1 \pm f(x)$ 形式的幂指函数的极限. 其解法: 设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则 $\lim [1 \pm f(x)]^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln [1 \pm f(x)]} = e^{\lim g(x) [\pm f(x)]}$.

用语言叙述为: 括号中 1 后的变量 (包括符号) 与幂乘积的极限就是 1^∞ 这种未定式极限的幂, 其底为 e .

(2) 利用对数恒等式 $\Rightarrow e^{\infty \cdot \ln 1} = e^{\infty \cdot 0} \Rightarrow e^{(\frac{\infty}{\infty} \text{ 或 } \frac{0}{0})}$.

设 $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$, 则 $\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim [f(x)]^{g(x)} \ln f(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}$ (适用于底为单因子的呈 1^∞ 型幂指函数的极限的求法).

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

【分析】 本题属于 1^∞ 型未定式, 可化为 $\frac{0}{0}$ 型求解.

【解】 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\arcsin x - x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}},$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2 \sqrt{1-x^2} (1 + \sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{6} \\ \therefore \text{原极限} &= e^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

※ 题型演练 12 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}}$