文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书

传承辉煌的历史 **2009版** 开启成功的未来

考研数学
题型集粹与练习题集

陈文灯 黄先开 编著

（理工类）

题型集训 以一敌百
技巧丰富 好题荟萃

世界图书出版公司

传承辉煌的历史 **2009版** 开启成功的未来

考研数学
题型集粹与练习题集

陈文灯　黄先开　编著

（理工类）

题型集训　以一敌百

技巧丰富　好题荟萃

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与练习题集. 理工类 / 陈文灯,黄先开编著. —11版. —北京:世界图书出版公司北京公司,2004.1
ISBN 978-7-5062-5212-6

Ⅰ. 数... Ⅱ. ①陈...②黄... Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第015003号

数学题型集粹与练习题集(理工类)
(2009版)

主　　编: 陈文灯　黄先开
责任编辑: 世　华
封面设计: 章　良

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街137号　电话:88861708　邮编:100089)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 北京铁建印刷厂

开　　本: 787 × 1092 毫米　1/16
印　　张: 27.75
字　　数: 448 千字
版　　次: 2008年2月第11版　2008年2月第1次印刷

ISBN 978-7-5062-5212-6/O · 333　　**定价:44.80元**

服务热线: 010 - 88861708

前　　言

《题型集粹与练习题集》(理工类)作为《数学复习指南》(理工类)的姐妹篇,自第一版问世以来已近十载,受到越来越多的读者欢迎。许多考生选择将本书和《数学复习指南》配套使用,作为考研数学复习的主要参考书籍,被有的读者戏称"双剑合璧"。

《题型集粹与练习题集》旨在强化读者对《数学复习指南》中知识点的理解和运用,将知识点与考查题型结合起来,锻炼读者的实际解题能力。本书是作者多年评阅试卷和在文登培训学校考研辅导的经验之作,所讲例题及所选习题都是从多年教学中总结出来的有代表性的试题。通过本书的学习和训练,能帮助读者达到吃透规律,举一反三的目的。

本书特点以及使用建议:

题型归纳和精讲:

本书将考研数学所要求的知识点按题型进行归类。针对每种题型,给出相应的方法和规律,同时给出若干道典型例题进行精讲,帮助读者理解具体的解题技巧。同时配合了题型演练,强化读者的理解和实际答题能力。建议读者仔细体会方法和规律部分,在做题的过程中有意识地加以应用。

阶梯化训练题:

根据难度及综合性把习题分为基础能力题和综合提高题,题量适中,选题科学,适合读者在复习的不同阶段进行训练,逐步提高解题能力。建议读者能独立去解答这些习题,有意识地应用例题中学到的方法去解题,尽量不要从一开始就依赖答案,养成独立思考的习惯。在参考答案部分,我们给出了题型训练和阶梯化训练的详细解答,读者可以借鉴和参考其中的思路和方法。

四套模拟试题:

依据大纲的难度和要求,我们为读者精编了四套模拟试卷。每套试卷都给出了详细的解答,包括分析、详解和评注,建议读者严格按照考试时间完成试卷并及时查缺补漏,以达到模拟演练的目的。

本书如有不当和错误之处,恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

编者

2008 年 2 月

目　　录

第2篇 线性代数

第3篇　概率论与数理统计初步*

注：带 * 篇、章，数二考生不作要求。

第1篇　高 等 数 学

第1章　函数·极限·连续

命题特点：

函数部分一般和其他考点联合出题，如求函数的表达式；关于函数的性质出单项选择题的可能性较大；极限部分一般出填空题或与其他部分联合出题，函数的连续部分一般出单项选择题或计算题.

题型归纳与精讲

题型1　函数奇偶性的判别

方法和规律： 判别函数奇偶性的方法：(1) 主要依据奇偶性的定义. 有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；偶函数之积为偶函数；偶数个奇函数之积为偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数. (2) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法. (3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数的定义域关于原点不对称，则函数就无奇偶性可言.

典例精析 判别函数的奇偶性：

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\text{其中} f(x) \text{为连续的偶函数.}$$

【分析】利用变量代换求出 $F(-x)$，然后比较 $F(x)$ 与 $F(-x)$ 的关系.

【解】$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u) \xlongequal[\text{偶函数}]{f(x)\text{为}} -\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$，

$\because\quad F(x)+F(-x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$，

$\therefore\quad F(x)$ 为奇函数.

※ **题型演练1**　判别函数的奇偶性：$F(x)=f(x)+\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，其中 $f(x)$ 是连续的奇函数. 奇.

题型2　函数有界性的判别

方法和规律： 证明或判别函数有界性的思路：(1) 利用有界性定义. (2) 闭区间上连续函数

的有界性. (3) 有极限数列必有界. (4) $x\to x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

典例精析 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ (l 为有限数),试证: $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【分析】 本题运用闭区间上的连续函数必有界,即可得证.

【证】 $\because\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, $\therefore$ 对于取 $\varepsilon=\dfrac{|l|}{2}$, $\exists X>a$,

当 $x>X$ 时,恒有 $|f(x)-l|<\dfrac{|l|}{2}$,

又 $|f(x)-l|\geqslant|f(x)|-|l|$,所以 $|f(x)|-|l|<\dfrac{|l|}{2}$,

即 $|f(x)|<\dfrac{3}{2}|l|$.

$\because$ $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续,由闭区间上连续函数有界性,可知 $\exists S$,使 $\forall x\in[a,X]$,恒有 $|f(x)|<S$.

取 $M=\max\left\{S,\dfrac{3}{2}|l|\right\}$,则对 $\forall x\in[a,+\infty)$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,

即 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

※ **题型演练 2** 试证 $f(x)=e^{-x^2}\int_0^x te^{t^2}dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

题型 3 求复合函数表达式

方法和规律: 利用函数性质,可采用代入法,分析法或图示法等求解.

典例精析 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$,求 $f[f(x)]$, $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

【分析】 本题为初等函数复合,可采用代入法.

【解】 $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-f^2(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}=\dfrac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$,

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{f^2(x)}{f^2(x)-1}=\frac{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2-1}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【评注】 如果是初等函数与分段函数的复合,或两个分段函数的复合,可采用分析法;如果是两个分段函数的复合,可采用图示法.

※ **题型演练 3** 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n\text{次}}$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

题型4　已知数列的前几项数值及通项的表达式,求数列的极限

方法和规律: 利用单调有界数列必有极限定理求解(求解程序:① 判断极限的存在性 $\begin{cases}\text{单调性}\\\text{有界性}\end{cases}$,方法可用数学归纳法或不等式的放缩法;② 先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后通过解关于 l 的方程,求得 l 的值,从而得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$). 或者利用数列极限的定义求解(先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后在通项的两边取极限得出 l 的数值,再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n-l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

典例精析 设 $x_1=2,x_2=2-\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 利用数列的单调有界性判断数列极限的存在性,然后通过解方程求出极限.

【解】 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性:

$x_1=2>1$,若 $x_n>1$,则 $0<\dfrac{1}{x_n}<1$,从而 $x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}>1$,因此 $x_{n+1}>1$.

$x_2-x_1=-\dfrac{1}{x_1}=-\dfrac{1}{2}<0$,设 $x_n-x_{n-1}<0$,那么

$$x_{n+1}-x_n=2-\frac{1}{x_n}-2+\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}\cdot x_n}<0,$$

因此 $x_{n+1}<x_n$,

即 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在 $x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限得

$l=2-\dfrac{1}{l}$,即 $l^2-2l+1=0,l=1$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,

【评注】 该类题目通常是先用数学归纳法证明数列极限的存在性.

※ **题型演练4**　设 $x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

题型5　求解 $n\to\infty$ 时,n 项和的极限

方法和规律: 方法有:(1) 特殊级数求和法. (2) 利用幂级数求和法. (3) 利用定积分定义求极限. (4) 利用夹逼定理.

个通项表

若数列的每一项可提出一个因子 $\dfrac{1}{n}$,剩余的可用一个通项表示,则用定积分定义求解数列的极限;若数列的各项虽可提出一个因子 $\dfrac{1}{n}$,而剩余的不能用一个通项表示,但其各项是按递增或递减排列的,则用夹逼定理求极限.

典例精析 求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}$.

【分析】本题直接求解比较不便,利用夹逼定理转换函数形式,然后利用定积分的定义求解.

【 解 】$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}$,

$\because\quad \frac{i^2}{n^2}\leqslant\frac{i^2+1}{n^2}\leqslant\frac{(i+1)^2}{n^2}$,

$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}$.

又 $\because\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{(n+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+(n+1)^2}=\arctan x\Big|_0^1+0=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4},\quad 故原极限=\frac{\pi}{4}.$$

※ **题型演练 5** 求极限:$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

题型 6 求 $n\to\infty$ 时,n 项乘积的极限

方法和规律: 解法有:(1) 分子,分母同乘以一个因子,使之出现连锁反应;(2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式,在整个相乘过程中中间项相消,从而化简为易求极限;(3) 利用夹逼定理;(4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

典例精析 求极限:$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$.

【分析】本题利用夹逼定理即可求解.

【 解 】

$$\left.\begin{array}{l}\because 1\cdot 3<2^2\\ \quad 3\cdot 5<4^2\\ \quad\cdots\cdots\\ \quad(2n-1)(2n+1)<(2n)^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow 1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1)<2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2\\ \Rightarrow 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{2n+1}<2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\\ \cdots\cdots\\ \Rightarrow 0<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\end{array}$$

又 $\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$, 故 由夹逼定理,原极限 $=0$.

※ **题型演练 6** 求极限:$\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

题型7 通项为积分形式的数列的极限

方法和规律：注意：一般地$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b [\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x$，求解$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$的方法：(1) 利用不等式放缩法对$I_n = \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$进行估值，再用夹逼定理求极限. (2) 利用积分中值定理求极限.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

【分析】本题可利用放缩法对$I_n = \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$进行估值.

【 解 】∵ 在[0,1]上，$x^n \geqslant 0$，且$\frac{1}{1+x}$连续，

$$\therefore\quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1},$$

其中$0 \leqslant \xi \leqslant 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1} = 0.$

※ **题型演练7** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$.

题型8 求$\frac{0}{0}$型未定式的极限

方法和规律：求解$\frac{0}{0}$型极限的方法：(1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子，然后用连续函数的性质求极限；(2) 利用等价无穷小和泰勒公式求极限；(3) 利用洛必达法则求极限（这是求$\frac{0}{0}$型极限最有效的方法）；(4) 利用变量替换（通常是令$x = \frac{1}{t}$或$x = \frac{1}{t^2}$）求极限.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1}$

【分析】本题可利用等价无穷小量的代换求解.

【 解 】将根式有理化，于是有

$$\text{原极限} = \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{(e^x-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$$

$$\xlongequal[\text{代换}]{\text{由等价无穷小}} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})} = 1.$$

※ **题型演练8** 求极限：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

题型9 求$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的极限

方法和规律：求解$\frac{\infty}{\infty}$型极限的方法：(1) 洛毕达法则；(2) 变量替换.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^{2x}e^{t^2}dt\right)^2}{\int_{3x}^{0}e^{2t^2}dt}$.

【分析】本题可利用洛必达法则求解.

【 解 】原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^{2x}e^{t^2}dt\cdot 2e^{4x^2}}{-3e^{18x^2}}=-\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^{2x}e^{t^2}dt}{e^{14x^2}}$

$$=-\frac{4}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}}=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{14}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{10x^2}}=0.$$

【评注】求 $x\to+\infty$ 时的极限，通常以"抓大头"的办法解决为好(所谓抓大头就是取分子、分母中趋向于 $+\infty$ 最快的项).

※ **题型演练 9** 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{x}(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt}{x}$.

$(1+x^2)$ $-(1+x^2)e^{-2x}$

题型 10 求 $\infty-\infty$ 型未定式的极限

方法和规律： 转化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$，再运用洛必达法则求解，或"抓大头"法求解.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$.

【分析】本题可转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型极限.

【 解 】原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x\cos x)}{x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

※ **题型演练 10** 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

题型 11 求 $0\cdot\infty$ 型未定式的极限

方法和规律： $0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 再用法则求解.

设 $\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$，则

$$\lim f(x)g(x)\quad(0\cdot\infty)=\lim\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

注意： 一般讲，对数函数和反三角函数一般不"下放"，因为下放后的导数比原来的复杂，违背数学运算的原则.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

【分析】本题可换成$\frac{\infty}{\infty}$的形式.

【解】原极限 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{\tan\frac{\pi}{2}x}{(1-x)^{-1}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2}}{(1-x)^{-2}}=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-x)^2}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to1}\frac{-2(1-x)}{-2\cos\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}=2\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sin\pi x}=2\lim_{x\to1}\frac{-1}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}.$$

※ 题型演练 11 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x})$

题型 12 求 $1^\infty,0^0,\infty^0$ 型未定式的极限

方法和规律：基本思路是通过对数恒等式将其化为$0\cdot\infty\Rightarrow\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$，再用法则.

关于1^∞型极限有两种求法：

(1) 利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$或$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$(适用于底为$1\pm f(x)$或易化为$1\pm f(x)$形式的幂指函数的极限. 其解法：设$\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$，则$\lim[1\pm f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln[1\pm f(x)]}=\mathrm{e}^{\lim g(x)[\pm f(x)]}$.

用语言叙述为：括号中1后的变量(包括符号)与幂乘积的极限就是1^∞这种未定式极限的幂，其底为e.

(2) 利用对数恒等式$\Rightarrow\mathrm{e}^{\infty\cdot\ln1}=\mathrm{e}^{\infty\cdot0}\Rightarrow\mathrm{e}^{(\frac{\infty}{\infty}或\frac{0}{0})}$.

设 $\lim f(x)=1,\lim g(x)=\infty$，则 $\lim[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\ln[f(x)]^{g(x)}}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}$

(适用于底为单因子的呈1^∞型幂指函数的极限的求法).

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{\arcsin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$.

【分析】本题属于1^∞型未定式，可化为$\frac{0}{0}$型求解.

【解】原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{\arcsin x-x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$,

$$\because\quad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{1}{6}$$

$\therefore$ 原极限 $=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$.

※ 题型演练 12 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}(\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}}$