



电动力学 (第二版)

Electrodynamics

关继腾 郑海霞 编





TEACHING MATERIALS
FOR COLLEGE STUDENTS

高等学校教材

电 动 力 学

(第二版)

关继腾 郑海霞 编



中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

图书在版编目(CIP)数据

电动力学/关继腾,郑海霞编. —2 版. —东营:
中国石油大学出版社,2015.7
ISBN 978-7-5636-4826-9

I. ①电… II. ①关…②郑… III. ①电动力学
IV. ①O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 173138 号

中国石油大学(华东)规划教材

书 名: 电动力学

作 者: 关继腾 郑海霞

责任编辑: 高 颖(电话 0532—86983568)

封面设计: 青岛友一广告传媒有限公司

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)

网 址: <http://www.uppbook.com.cn>

电子信箱: shiyoujiaoyu@126.com

印 刷 者: 沂南县汶凤印刷有限公司

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0532—86981531,86983437)

开 本: 185 mm×260 mm 印张: 16.75 字数: 403 千字

版 次: 2015 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 34.00 元

内 容 简 介

本书是作者在第一版的基础上修订而成的,系统地阐述了经典电动力学的基本概念、基本原理及处理问题的方法。全书内容包括:静电场、稳恒电流的磁场、时变电磁场的普遍规律、电磁波的传播、电磁波的辐射、狭义相对论和相对论电动力学、带电粒子和电磁场的相互作用。每章配有一定数量的习题。

本书可作为高等学校应用物理学专业的教材或参考书,也可供其他有关专业的学生和教师参考。

第二版前言



电动力学主要研究电磁场的基本规律及其与物质的相互作用,以及运用这些规律处理各种电磁问题,研究各种电磁过程。本书第一版于2005年出版。2011年5月,教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会重新制定了《高等学校应用物理学本科指导性专业规范》(2010年版),以适应我国高校应用物理学本科专业人才培养的需要。为了体现应用物理学专业规范的精神,结合“强化应用理科特色、融合物理前沿进展、突出创新能力培养”的电动力学课程教学体系,兼顾分层次教学、多元化培养、研究性学习的需求,对第一版教材进行修订、增补和扩展。在保持第一版教材的体系和特色的基础上,除对个别地方作出修订和校订之外,主要补充的内容有:第6章增加了谐振腔的内容,第7章补充了电磁波衍射的内容,增加了第9章带电粒子和电磁场的相互作用的内容,包括任意运动带电粒子的势和辐射电磁场、带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用、谐振电子的辐射阻尼和光谱线的自然宽度。

通过本书的学习,力求达到以下目标:(1)掌握电磁运动的基本特点、规律和研究方法,深刻理解电磁场与电磁波的物质属性及其存在与运动形态。(2)掌握电磁相互作用的基本规律,较系统地理解经典电动力学的基本思想和基本数学方法,初步掌握处理有关电磁系统的各类实际问题的典型方法。(3)掌握狭义相对论的时空观及相对论电动力学和相对论力学的基本理论,能完整和系统地掌握及理解经典物理与相对论物理的辩证关系。(4)理解带电粒子和电磁场的相互作用,并由此认识把宏观电动力学应用到微观领域的局限性。(5)了解与本课程相关的前沿课题发展动态,激励创新精神。本书更加注重物理模型的建立,突破把物理问题转化为数学问题这一教学难点,强化对数学理论的描述所表示的物理内涵和物理图像的分析与解释,阐明其描述的物理内容。

本书力求概念清晰、层次分明、重点突出、体系统一,注重内容的系统性、科学性和严谨性。本书采用国际单位制(SI),物理量的名称及符号按照最近公布的国家标准和规范书写。例如,以白斜体 A 表示标量,以黑斜体 $\mathbf{A}$ 表示矢量;正弦电磁场的时间因子采用 $e^{-i\omega t}$,以 A 表示有效值;以 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 表示与空间及时间有关的瞬时矢量,以 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 表示仅与空间有关的复矢量。

本书共分9章,其中关继腾编写与修订了第1章至第5章,郑海霞编写与修订了第6章

至第 9 章。习题由郑海霞整理、收编并核对了答案。关继腾负责全书的统稿与整理。

在本书的编写过程中,参阅了许多专著、教材和工具书,并且引用了其中的部分内容,已在本书的参考文献中列出,谨在此一并向这些文献的作者们表示感谢。

本书得到了中国石油大学(华东)“十二五”规划教材出版资助,特此感谢!

由于作者学识与水平有限,书中难免存在不妥与错误之处,敬请阅读本书的广大教师和读者批评指正。

作 者

2015 年 3 月

第一版前言



电动力学作为一门理论物理的基础课程,不仅训练物理与数学相结合的能力,更重要的是还提出了许多新的思维方式与认识问题、分析问题的独特的方法,把形象思维提高到抽象思维,经过电动力学等理论物理课程的训练,将使应用物理学专业的学生与工程学科专业的学生具有明显不同的素质。强大的数学理解与应用能力,严谨、清晰的理性思维方式与技巧,对新兴学科与高新科学技术的学习能力,对科学与工程广泛适应能力,这些素质保证了应用物理学专业学生较强的适应能力与发展潜力。人们常评价应用物理学专业毕业生在工作中有后劲,这主要归功于四大力学课程的积极作用。

本书是为应用物理学专业编写的教材。随着应用物理学专业教学改革,对电动力学课程教学课时进行了压缩,鉴于高等数学、数学物理方程、电磁学等基础课程的调整,考虑到学生实际学习能力与认识规律,也考虑到理工院校应用物理学专业毕业生主要工作在工程技术领域,本书对课程内容做了适当的删减和调整,细化了基础教学,降低了课程的难度。

本书主要介绍电动力学的两个部分。第一部分是电磁场和电磁波的基本属性,电磁场的运动规律,以及用场的观点分析问题与解决问题的方法,常常称为经典电磁场理论。本部分的学习对全面理解电磁理论的发展、工程应用具有重要的价值,对学生理解引力场、流体场、温度场、声波、电磁场与电磁波等宏观场具有重要的意义。第二部分是狭义相对论和相对论电动力学。本部分对理解现代时空观下的物理学理论至关重要。本书还有丰富的、紧扣各章内容的应用例题,例题的求解步骤较为详尽,便于读者自学。

本书适用于应用物理学专业及光信息科学与技术、电子科学与技术、材料物理等相近专业,可供 56~72 学时教学之用。

在本书编写过程中,参阅了许多专著、教材和工具书,并且还引用了其中的部分内容、数据和图表等资料,除了在书末参考文献中列出之外,谨在此一并向有关作者致谢。

本书的编写获得中国石油大学(华东)“十五”规划教材出版资助,特此致谢!

由于编者水平有限,书中取材及论述难免有不妥与错误之处,敬请阅读本书的广大教师 and 读者批评指正。

编 者

2005 年 3 月



第 1 章 矢量分析和场论基础	1
1.1 矢量及其运算	1
1.2 标量场的梯度	3
1.3 矢量场的散度	5
1.4 矢量场的旋度	8
1.5 哈密顿算符 ∇ 及其恒等式	10
1.6 广义正交曲线坐标系	12
1.7 积分变换公式	17
1.8 狄拉克 δ 函数	18
1.9 并矢与张量	20
1.10 亥姆霍兹定理	22
习 题	22
第 2 章 静电场	24
2.1 真空中静电场的基本方程	24
2.2 真空中静电场的势及其微分方程	26
2.3 电介质中静电场的基本方程	29
2.4 静电场中不同电介质分界面上的边值关系	34
2.5 静电场的能量	36
2.6 电多极矩及其与外加电场的相互作用	39
习 题	46
第 3 章 静电场边值问题的求解方法	48
3.1 静电场边值问题的数学模型	48
3.2 唯一性定理	52

3.3	电像法	55
3.4	分离变量法	60
	习 题	66
第4章	稳恒电流的磁场	68
4.1	稳恒电流场的基本方程	68
4.2	稳恒电流场的边值问题	71
4.3	真空中恒定磁场的基本方程	75
4.4	恒定磁场的矢势	79
4.5	磁介质中恒定磁场的基本方程	84
4.6	恒定磁场中不同磁介质分界面上的边值关系	88
4.7	磁标势 磁荷观点	92
4.8	磁场的能量	99
* 4.9	磁多极矩的磁场	102
	习 题	106
第5章	时变电磁场的普遍规律	107
5.1	麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式	107
5.2	时变电磁场的边值关系	112
5.3	电磁场的能量守恒定律	115
	习 题	117
第6章	电磁波的传播	119
6.1	均匀平面电磁波在理想介质中的传播	119
6.2	均匀平面电磁波在两种理想介质分界面上的反射和折射	129
6.3	均匀平面电磁波在导电介质中的传播	140
6.4	导行电磁波	145
6.5	谐振腔	156
	习 题	158
第7章	电磁波的辐射	161
7.1	时变电磁场的矢势和标势	161
7.2	电偶极子的辐射	166
* 7.3	多极辐射	174
* 7.4	电磁波的衍射	177
7.5	电磁场的动量	182
	习 题	185
第8章	狭义相对论	187
8.1	狭义相对论的实验基础	187

8.2 狭义相对论基本原理与相对论时空观	193
8.3 洛伦兹变换的四维形式	204
8.4 相对论电动力学	208
8.5 相对论力学基础	222
习 题	231
第 9 章 带电粒子和电磁场的相互作用	233
9.1 任意运动带电粒子的势和辐射电磁场	233
9.2 带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用	240
9.3 谐振电子的辐射阻尼和光谱线的自然宽度	245
习 题	247
习题答案	249
参考文献	256

第 1 章

矢量分析和场论基础

许多物理领域所研究的物质对象连续分布在一定的空间范围,空间各点处的物理性质、运动状态以及相互作用一般是不相同的。这些物质的物理性质要用适当的物理量来描述,例如静电场用电场强度 $\mathbf{E}$ 来描述,磁场用磁感应强度 $\mathbf{B}$ 来描述,等等。描述这些性质、状态和作用的所有物理量都是空间各点的函数,一定物理量的空间分布称为场,如描述温度分布的温度场,描述流体速度分布的速度场,描述电磁作用的电磁场等。如果某个场的物理量是标量,就称这个场为标量场;如果某个场的物理量为矢量,就称这个场为矢量场。温度场、电势场都是标量场,而电场和磁场都是矢量场。一般情况下这些物理场的物理量均为空间和时间的函数,如果物理量不随时间而变化,则称该物理量的场为静态场;如果物理量随时间变化,则称该物理量的场为时变场。一个物理场的物理性质是物质存在的客观形式,数学描述是人们主观引入的定量化表达方式,物理场的物理性质与是否引入数学描述无关,亦与引入的数学描述方法无关。也就是说,无论采用哪种数学描述方法,所反映的物理场的性质应该是唯一的、客观的。研究场的运动规律,就是研究相应场函数随空间和时间的变化关系。本章介绍数学场论的基础,重点讨论矢量场,分析它的性质和结构。

1.1 矢量及其运算

1.1.1 矢量的表示方法

数学上称只有数值大小的量为标量,如时间、电势、温度、能量等。既有数值大小又有方向的量称为矢量,如力、流体流速、电场强度等。习惯上用黑体符号或在符号上加矢量号来表示矢量,如 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 或 $\vec{A}, \vec{B}$ 。本书的所有矢量均采用黑体表示。模值为 1 的矢量称为单位矢量,由符号 $\mathbf{e}$ 来表示,如用 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 分别表示直角坐标系中的 x, y, z 方向上的单位矢量。

若一个矢量在三个相互垂直的坐标轴上的分量已知,那么这个矢量就确定了。例如在

直角坐标系中, 矢量 $\mathbf{A}$ 的三个分量模值分别是 A_x, A_y, A_z , 则 $\mathbf{A}$ 可表示为:

$$\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1-1)$$

该矢量的模为:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-2)$$

$\mathbf{A}$ 的单位矢量为:

$$e_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = e_x \frac{A_x}{A} + e_y \frac{A_y}{A} + e_z \frac{A_z}{A} = e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma \quad (1-3)$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为 $\mathbf{A}$ 的方向余弦; α, β, γ 分别是 $\mathbf{A}$ 与 x, y, z 轴正向的夹角。

把两个矢量的对应分量相加或相减, 就得到它们的和或差。设 $\mathbf{B} = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z$, 则:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = e_x (A_x \pm B_x) + e_y (A_y \pm B_y) + e_z (A_z \pm B_z) \quad (1-4)$$

1.1.2 标量积和矢量积

矢量的相乘有两种定义: 标量积(点乘)和矢量积(叉乘)。标量积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 是一个标量, 其大小等于两个矢量模值相乘, 再乘以它们的夹角 α (取小角, 即 $\alpha \leq \pi$) 的余弦, 即:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha \quad (1-5)$$

它符合交换律和分配律:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-6)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1-7)$$

并有:

$$e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_z = e_z \cdot e_x = 0, \quad e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = e_z \cdot e_z = 1$$

因而得:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \cdot (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-8)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1-9)$$

矢量积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 是一个矢量, 其大小等于两个矢量的模值相乘, 再乘以它们夹角 α ($\alpha \leq \pi$) 的正弦, 其方向与 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 成右手螺旋关系, 为 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 所在平面的法线方向 $\mathbf{n}$, 即:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{n} AB \sin \alpha \quad (1-10)$$

它不符合交换律。由定义知:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (1-11)$$

但满足分配律:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-12)$$

并有:

$$e_x \times e_x = e_y \times e_y = e_z \times e_z = 0$$

$$e_x \times e_y = e_z, \quad e_y \times e_z = e_x, \quad e_z \times e_x = e_y$$

故:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \times (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= e_x (A_y B_z - A_z B_y) + e_y (A_z B_x - A_x B_z) + e_z (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \quad (1-13)$$

通常,上式写成行列式形式,即:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-14)$$

1.1.3 三重积

矢量的三连乘也有两种。标量三重积为:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1-15)$$

矢量三重积为:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-16)$$

1.2 标量场的梯度

1.2.1 标量场的等值面

一个标量场可以用一个标量函数来表示。例如,在直角坐标系中,某一标量场 u 可以用标量函数 $u = u(x, y, z, t)$ 表示出来。当研究静态的标量场时,标量函数表示为 $u = u(x, y, z)$ 。

为了直观地表示标量 u 在场中的分布状况,可以引入等值面的概念。场中使函数 u 取相同数值的点所构成的曲面称为等值面。若函数 u 代表电势,则其等值面就是等势面;若函数 u 代表温度,则其等值面就是等温面。标量场 u 的等值面方程为:

$$u(x, y, z) = C \quad (C \text{ 为任意常数}) \quad (1-17)$$

常数 C 取不同的数值,便得到不同的等值面,从而构成等值面簇。由于函数 u 是空间坐标的单值函数,显然等值面互不相交,场中一点只有一个等值面通过。

1.2.2 方向导数

在研究标量场时,不仅需要了解标量函数在场中总的分布情况,还常常需要了解标量函数 $u = u(x, y, z)$ 在空间任意一点处沿每个方向的变化情况。为此引入方向导数的概念。

如图 1-1 所示,设 P 为标量场 u 中的任一点,其场值为 $u(P)$,从点 P 出发朝任意方向引一条射线 l ,并在该方向靠近 P 点取一动点 Q ,该点的场值为 $u(Q) = u(P) + \Delta u$, P 点到 Q 点的距离表示为 Δl ,根据偏导数的定义,可以写出:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(Q) - u(P)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} \quad (1-18)$$

$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P$ 就称为标量场 u 在点 P 处沿 l 方向上的方向导数。若 $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$,则标量场 u 沿 l 方向是增加的;若 $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$,则标量场 u 沿 l 方向是减小的;若 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$,则标量场 u 沿 l 方向无变化。

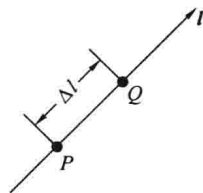


图 1-1 方向导数定义用图

根据方向导数的定义,在直角坐标系中,可直接导出其计算公式:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} \quad (1-19)$$

若矢量 l 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 则上式又可表示成:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-20)$$

1.2.3 标量场的梯度

在标量场 u 中计算某点标量函数 u 沿某个方向的方向导数,即可知道函数 u 在该点沿该方向的变化率。但场中从给定点出发有无穷多个方向,在该点函数 u 沿哪个方向的变化率最大? 为了解决这个问题,引入梯度的概念。

在计算方向导数的公式(1-20)中, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 l 方向上的方向余弦,取 e_l 为 l 方向上单位矢量,即:

$$e_l = e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma \quad (1-21)$$

如果在标量场 u 中定义一个矢量 G , 即令:

$$G = e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-22)$$

则式(1-20)可表示成 G 与 e_l 的标量积:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = G \cdot e_l = |G| \cos(\hat{G}, e_l) \quad (1-23)$$

($\hat{G}, e_l$) 为 P 点处固定矢量 G 与单位矢量 e_l 的夹角。上式表明, P 点处 G 在 l 方向的投影正好等于函数 u 在 l 方向的方向导数,并且当 l 方向与 G 的方向一致即 ($\hat{G}, e_l$) = 0° 时,方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 取最大值,该最大值为 $\frac{\partial u}{\partial l} = |G|$ 。

由此可见, P 点处矢量 G 的方向是函数 u 在该点变化率最大的方向, G 的模也正好等于这个最大变化率的值。因此,给出梯度(gradient)的定义:若在标量场 u 中 P 点处存在矢量 G , 其方向为函数 u 在 P 点处变化率最大的方向,其模等于这个变化率的最大值,则称矢量 G 为函数 u 在 P 点的梯度,记为 $\text{grad } u$, 即:

$$\text{grad } u = G \quad (1-24)$$

梯度的这个定义并未涉及具体的坐标系,这意味着该定义适用于任何坐标系。由前面的推导过程,已得到了直角坐标系中梯度的计算公式:

$$\text{grad } u = e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-25)$$

为了书写简洁,引入读作“del”(德尔)或“Nabla”(那勃勒)的哈密顿(Hamilton)算符 ∇ , 在直角坐标系中算符 ∇ 为:

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-26)$$

显然在直角坐标系中 ∇ 算符具有矢量和微分的双重性质,被称为矢量微分算符。

算符 ∇ 对标量函数 u 的计算结果为一矢量函数,在直角坐标系中:

$$\nabla u = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-27)$$

上式右边恰好是梯度 $\text{grad } u$, 所以在直角坐标系中用算符 ∇ 将梯度记为:

$$\text{grad } u = \nabla u$$

例 1.1 产生场的场源所在的空间位置点称为源点, 记为 (x', y', z') 或 $\mathbf{r}'$; 场所在的空间位置点称为场点, 记为 (x, y, z) 或 $\mathbf{r}$ 。设 R 表示空间场点和源点之间的距离, 记为 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$; 从源点指向场点的矢量记为 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, 如图 1-2 所示。当把 R 表示式中的 (x', y', z') 看作变数而求 R 的梯度时, 我们将哈密顿算符写成“ ∇' ”, 其定义是:

$$\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$$

求证: $\nabla R = -\nabla' R = \frac{\mathbf{R}}{R}$ 。

证明

$$\begin{aligned} \nabla R &= \mathbf{e}_x \frac{\partial R}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial R}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \mathbf{e}_x \frac{x - x'}{R} + \mathbf{e}_y \frac{y - y'}{R} + \mathbf{e}_z \frac{z - z'}{R} \\ &= \frac{\mathbf{e}_x(x - x') + \mathbf{e}_y(y - y') + \mathbf{e}_z(z - z')}{R} = \frac{\mathbf{R}}{R} \\ \nabla' R &= \mathbf{e}_x \frac{\partial R}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial R}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial R}{\partial z'} \\ &= \mathbf{e}_x \frac{-(x - x')}{R} + \mathbf{e}_y \frac{-(y - y')}{R} + \mathbf{e}_z \frac{-(z - z')}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R} \end{aligned}$$

所以:

$$\nabla R = -\nabla' R = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

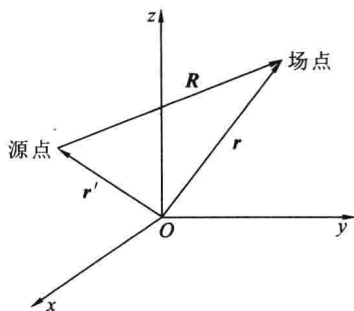


图 1-2 例题 1.1 图

1.3 矢量场的散度

1.3.1 矢量场的矢量线

一个矢量场可以用矢量函数来表示。例如, 在直角坐标系中, 某一矢量场 $\mathbf{A}$ 可以用矢量函数 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z, t)$ 表示。静态场的矢量函数表示为 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ 。也可以用其分量表示为:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x(x, y, z) + \mathbf{e}_y A_y(x, y, z) + \mathbf{e}_z A_z(x, y, z) \quad (1-28)$$

式中, $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$, $A_z(x, y, z)$ 分别是矢量 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 在三个坐标轴上的投影, 我们假定它们都是坐标变量的单值函数, 且具有连续的偏导数。

为了形象地表示场矢量在场中的分布情况,引入矢量线的概念。所谓的矢量线乃是这样的曲线,在矢量场中画出一系列有指向的曲线,使曲线上每一点的切线方向与该点场矢量的方向相同,通过垂直于该点场矢量方向单位面积上矢量线的条数与该矢量场的量值成正比,这样的曲线也叫矢量场的流线。如静电场中的电力线、磁场中的磁力线分别是电场强度和磁感应强度描述的矢量场中的矢量线。

为了精确地绘出矢量线,必须求出矢量线方程。在矢量场 $\mathbf{A}$ 中,设 $P(x, y, z)$ 为矢量线上任意一点,该点的线元矢量 $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$,该点处的场矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x(x, y, z) + \mathbf{e}_y A_y(x, y, z) + \mathbf{e}_z A_z(x, y, z)$ 。根据矢量线的定义,在矢量线上的任一点的切向长度元 $d\mathbf{l}$ 与该点的场矢量 $\mathbf{A}$ 的方向平行,即:

$$\mathbf{A} \times d\mathbf{l} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

展开上式,并根据零矢量的三个分量均为零的性质可得:

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)} \quad (1-29)$$

这就是矢量线应满足的微分方程。解此方程即可得矢量线簇。由矢量场和矢量线的定义可知,矢量线簇充满了矢量场所在的空间,且矢量线互不相交。

1.3.2 通量和散度的概念

人们在研究流体动力学过程中,得到了一套研究矢量场的数学方法。通量和散度的概念,最初就是在研究流体时引入的。在流体动力学中,速度 $\mathbf{v}$ 是一个矢量点函数,即流体中每一点都有一个确定的流速。一般情况下,不同点有不同的流速,整个流体中各点的流速 $\mathbf{v}$ 构成一个流速场。

在流体中取一个小面元 ds ,以 $\mathbf{n}$ 表示其法线方向的单位矢量,记作 $ds = ds\mathbf{n}$ 。设流体密度等于 1,把单位时间内流过面元 ds 的流体质量叫做 ds 面上流速场的通量。因为流速 $\mathbf{v}$ 是流体在单位时间内移过的距离,只有位于图 1-3 所示柱体内部的流体才能在单位时间内流过 ds ,所以 $\mathbf{v}$ 在 ds 上产生的通量 $d\Phi$ 在数值上等于柱体内的体积,即:

$$d\Phi = \mathbf{v} \cdot ds$$

对于流体中的任一有限曲面 S ,其通量 Φ 等于组成这一曲面的每个面元上的通量的代数和,用定积分表示为:

$$\Phi = \int_S \mathbf{v} \cdot ds$$

当 S 为闭合曲面时,则为:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{v} \cdot ds$$

流速场的通量与它的“源头”分布有一定的关系。如果在场域中任取一点 P ,用一个很小的闭合曲面 S 把它包围起来,即取 P 点的一个小邻域,其体积为 ΔV ,那么流速场 $\mathbf{v}$ 在 S

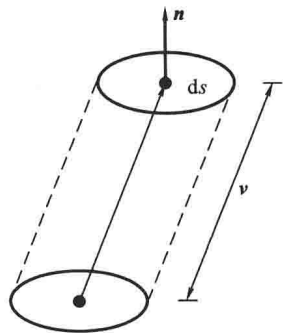


图 1-3 面积元 ds 上的通量

上的通量 $\Delta\Phi$ 与体积 ΔV 的比值为 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}$ 。这一比值的物理意义是:单位时间内从 P 点附近单位体积中流出(流进)的流体质量。当需要精确描述 P 点附近的情况时,令 S 向 P 点无限收缩并取极限,这个比值的极限称为流速场 $\mathbf{v}$ 在 P 点的散度(divergence),记作 $\operatorname{div} \mathbf{v}$,即:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ S \rightarrow 0}} \frac{\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V} \quad (1-30)$$

散度 $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 的意义是明显的,如果 $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$,则表示有流体从 P 点流出,因此 P 点必是流速场的源头;反之,如果 $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$,则表示有流体流入 P 点, P 点必是流速场的尾间,或称负源头;如果 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$,则表示既无流体从 P 点流出又无流体流入 P 点,流体只可能在 P 点经过,因此 P 点既非源头也非尾间。由此可见, $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 的数值大小既反映了流速场的源头及尾间的分布情况,也反映了流体在 P 点流入流出的程度。

1.3.3 矢量场的通量与散度

通量和散度的意义可以推广到任意矢量场,虽然这时的矢量场不再具有流体质量的意义,但其数学意义没有变化,在确定该矢量场在各点邻域中的“源头分布”方面仍起着同样的作用,描述了矢量场各空间点的源头分布情况。

若给定一个矢量场 $\mathbf{A}$,矢量函数 $\mathbf{A}$ 在场中任一曲面 S 上产生的通量为:

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-31)$$

若 S 为闭合曲面,则通量:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-32)$$

在矢量场 $\mathbf{A}$ 中的一点 P ,作一包围 P 点的闭合曲面 S ,设 S 包围的空间区域的体积为 ΔV ,并使 S 所限定的体积 ΔV 以任意方式向 P 点无限收缩并取极限。这个极限称为矢量场 $\mathbf{A}$ 在 P 点的散度,记作 $\operatorname{div} \mathbf{A}$,即:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ S \rightarrow 0}} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V} \quad (1-33)$$

应当注意,这个定义与所选取的坐标系无关。在 P 点,若 $\operatorname{div} \mathbf{A} > 0$,则该点为该矢量场的矢量线的正源头;若 $\operatorname{div} \mathbf{A} < 0$,则该点为矢量线的负源头;若 $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$,则该点无源,矢量线只从该点穿过。若在某一区域内的所有点上矢量场的散度都等于零,则称该区域内的矢量场为无源场。研究任一矢量场时,如果确定了该矢量场的散度,即可以确定它的源头分布以及矢量场的矢量线的起点与终点,这对于深入了解该矢量场的性质具有重要意义。

1.3.4 矢量场散度的表达式

从散度的定义式可见,散度的定义与坐标系的选择无关,但是在不同的坐标系中,散度的具体表达式不同。可以证明,在直角坐标系中,矢量场 $\mathbf{A}$ 的散度计算公式为:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-34)$$