应用型本科院校“十二五”规划教材/数学

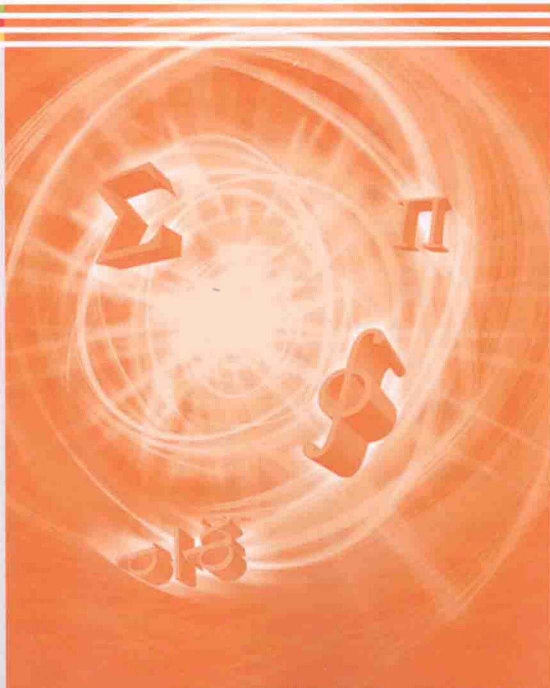
主编 洪港

高等数学

下册

Advanced Mathematics

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业



哈爾濱工業大學出版社

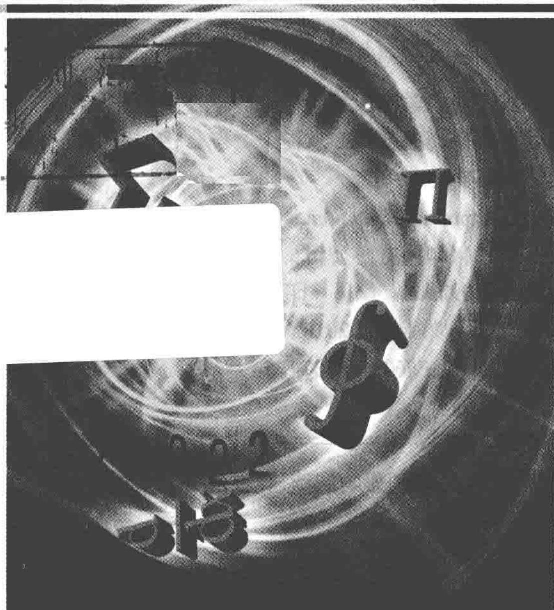
应用型本科院校“十二五”规划教材/数学

主　编　洪　港
副主编　于莉琦　杨　磊　顾　贞
主　审　张法勇

高等数学

下册

Advanced Mathematics



哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书是高等院校应用型本科系列教材，根据编者多年的教学实践，按照新形势教材改革精神，并结合教育部高等院校课程教学指导委员会提出的《高等数学课程教学基本要求》及应用技术大学培养目标编写而成.下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、上机计算(Ⅱ)五章.书末附有习题答案与提示，配备了学习指导书，并对全书的习题做了详细解答，同时也配备了多媒体教学课件，方便教学.本书结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂，突出了应用性.

本书可供应用型本科院校各专业学生及工程类、经济管理类院校学生使用，也可供工程技术、科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下/洪港主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

应用型本科院校"十二五"规划教材

ISBN 978-7-5603-5837-6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①洪…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材

Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 006164 号

策划编辑　杜　燕
责任编辑　李长波
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　肇东市一兴印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14　字数 320 千字
版　　次　2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5837-6
定　　价　30.00 元

序

哈尔滨工业大学出版社策划的《应用型本科院校“十二五”规划教材》即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的《应用型本科院校“十二五”规划教材》，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标

及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用讲授理论，做到"基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用"。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

《应用型本科院校"十二五"规划教材》的编辑出版，是适应"科教兴国"战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

前　言

为了贯彻国家中长期教育改革与发展规划纲要和落实教育部关于抓好教材建设的指示，为了更好地适应培养高等技术应用型人才的需要，促进和加强应用技术大学"高等数学"的教学改革和教材建设，由黑龙江东方学院、黑龙江大学等院校的部分教师参与编写了本书.

在编写中，我们依据教育部课程教学委员会提出的"高等数学教学基本要求"，结合应用技术大学的培养目标，努力体现以应用为目的，以掌握概念、强化应用为教学重点，以必需够用为度的原则，并根据我们的教改与科研实践，在内容上进行了适当的取舍. 在保证科学性的基础上，注意处理基础与应用、经典与现代、理论与实践、手算与电算的关系. 注意讲清概念，建立数学模型，适当削弱数理论证，注重两算（笔算与上机计算）能力以及分析问题、解决问题能力的培养，重视理论联系实际，叙述通俗易懂，既便于教师教，又便于学生学.

本书是在哈尔滨工业大学出版社出版的《高等数学》（孔繁亮版）的基础上，根据近几年教学改革实践，为进一步适应应用技术大学总体培养目标的需要，进行全面修订而成的. 在修订中，我们保留了原教材的系统与独特风格，既将数学的相关知识与实际应用联系起来，在每一部分数学知识的讲述中引进应用模型等优点，同时注意吸收当前教材改革中一些成功的改革经验及一线教师的反馈意见与建议，摒弃一些陈旧的例子及复杂运算过程，代之计算机数学软件引入.

本书 90 学时可讲完主要部分，加 * 号的部分可根据专业需要选用（另加学时），或供学生自学. 本书除供高等工科院校工程类、经济类、管理类等专业的高等数学教材使用外，也可供成人教育学院等其他院校作为教材，还可作为工程技术人员、企业管理人员的参考书.

本书由洪港任主编，于莉琦、杨磊、顾贞任副主编，黑龙江大学张法勇教授审阅了本书书稿，并提出了宝贵意见，在此表示感谢！谨此，向支持本书编写和出版的各界同仁表示衷心的感谢.

由于水平所限，本书的不当之处在所难免，恳请读者批评指正，以便进一步修改完善.

编　者

2015 年 12 月

目　　录

第 8 章

向量代数与空间解析几何

向量在数学、物理、力学及工程技术中有着广泛的应用，是一种重要的数学工具，空间解析几何是用代数方法来研究空间几何图形的，它在许多学科及工程技术上有着重要应用，尤其是讨论多元函数微积分不可缺少的基础. 本章先介绍向量代数的基本知识，然后以向量为工具研究空间解析几何.

8.1 向量代数

1. 向量的概念

在研究物理学和工程应用中遇到的量可以分为两类，一类完全由数值的大小决定，如质量、温度、面积、体积、密度等，将这类量称为数量（或标量）；另一类量不仅要研究其数值、大小，还要研究方向，如力、速度、加速度等，将这种既有大小又有方向的量称为向量（或矢量）.

在空间中以 A 为起点，B 为终点的线段称为有向线段（图 1），记为向量$\overrightarrow{AB}$.

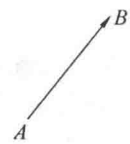


图 1

如果不强调起点和终点，向量也用一个黑体字来表示，例如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{r}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$ 等，将向量$\overrightarrow{AB}$的长度记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$，称为向量的模.

模等于零的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$，零向量的方向可以看作是任意的；模等于 1 的向量称为单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^0$. 在直角坐标系中，以坐标原点 O 为起点，向一个点 M 引向量$\overrightarrow{OM}$，这个向量称为点 M 对于点 O 的向径，用 $\boldsymbol{r}$ 表示，显然，空间点 M 与向径$\overrightarrow{OM}$ 是一一对应的.

在实际问题中，只研究与起点无关的向量，即只考虑向量的大小与方向，而不论它的起点在什么地方，这样的向量称为自由向量.

定义 1　如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的长度相等且方向相同，则称这两个向量是相等向量，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

对于若干个向量，将它们的起点平移到同一个点后，如果它们的起点和终点都位于同一条直线上，则称这些向量是共线的；如果它们的起点和终点都位于同一平面上，则称这

些向量是共面的. 不论长度大小,只要两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 显然,向量与任何向量都是共线的;两个向量共线的充分必要条件是这两个向量相互平行.

2. 向量的加法

定义 2　设两个向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形对角线所表示的向量 $\overrightarrow{AC}$(图 2(a)) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

即

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$

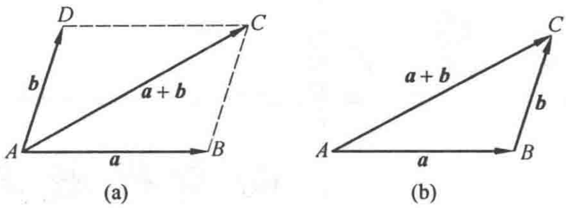


图 2

这即为两个向量加法的平行四边形法则(图 2(a)).

若以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点,则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,这即为向量加法的三角形法则(图2(b)).

显然向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(图 3);

(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(图 4).

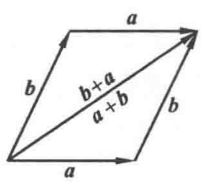


图 3

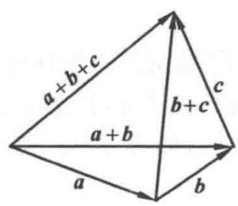


图 4

两个向量相加的三角形法则可以推广到 n 个向量相加,设有 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加,可以将 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点与 $\boldsymbol{a}_2$ 的起点相接,$\boldsymbol{a}_2$ 的终点与 $\boldsymbol{a}_3$ 的起点相接……$\boldsymbol{a}_{n-1}$ 的终点与 $\boldsymbol{a}_n$ 的起点相接, 最后从 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点的有向线段就是这 n 个向量的和, 即 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$.

3. 向量的减法

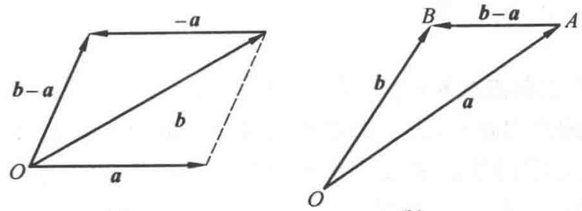
定义 3　设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$,由此,规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$, 即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上,便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 5).

特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

4. 向量与数的乘法

定义 4　规定实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的数量乘法 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模规定为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,其方向规定为:当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反;当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,此时其方向是任意的.



(a)　　(b)

图 5

设 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \lambda\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OB}$，数量乘法的几何意义如图 6 所示.

(a)　　(b)

图 6

数量乘法有如下运算规律：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$，其中 λ 与 μ 是数量；

(2) 对于数量加法的分配律：$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$；

(3) 对于向量加法的分配律：$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法和数量乘法统称为向量的线性运算.

例 1　化简 $(3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - (4\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b})$.

解　$(3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - (4\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}) =$

$3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} =$

$(3 + 2 - 4)\boldsymbol{a} + (1 - 1 + 3)\boldsymbol{b} =$

$\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$

设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，我们有

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{a}^0$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

定理 1　设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

证　**充分性**　设 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，当 $\lambda \neq 0$ 时，由数量乘法的定义知 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$；当 $\lambda = 0$ 时，必然有 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，由于零向量的方向可以看作是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行.

必要性　设 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向要么相同，要么相反，取 $\lambda = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，且当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，反向时 λ 取负值，此时，$\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向并且有

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$$

因此两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 方向相同，大小相等，根据向量相等的定义知 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

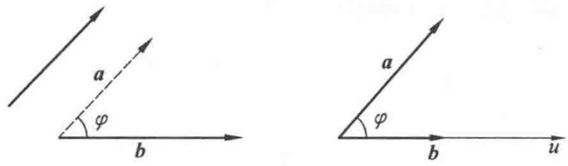
下面证 λ 的唯一性，若存在实数 μ，使得 $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$，则 $(\lambda - \mu)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，即 $|\lambda - \mu||\boldsymbol{a}| = 0$，

因$|\boldsymbol{a}| \neq 0$,必有$\lambda = \mu$. 即λ唯一.

5. 向量的投影

将非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的起点放在一起,它们之间的夹角$\varphi$记为$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,规定$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$(图7(a)). 由于零向量的方向是任意的,规定零向量与任何向量的夹角φ可取$[0,\pi]$中的任何值. 给定数轴u及非零向量$\boldsymbol{a}$,在u上取与数轴u正向的非零向量$\boldsymbol{b}$,规定$\boldsymbol{a}$与数轴u的夹角为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角,记为$\langle \boldsymbol{a},u\rangle$(图7(b)).

若非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \dfrac{\pi}{2}$,则称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直,规定零向量与任何向量垂直.



(a)　　(b)

图 7

给定向量$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$及数轴$u$,过点$A$与$B$向数轴$u$作垂线,设垂足分别为$A',B'$,这两个点在数轴$u$上的坐标分别为$u_A$与$u_B$,分别称$A',B'$为点$A,B$在数轴$u$上的投影点;称向量$\overrightarrow{A'B'}$为$\overrightarrow{AB}$在数轴$u$上的投影向量;记$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} = u_B - u_A$,称为向量$\overrightarrow{AB}$在数轴$u$上的投影(图8).

如果平移向量$\overrightarrow{AB}$,则它在数轴u上的投影不变,这就是说,向量在数轴u上的投影具有平移不变性,从而相同向量的投影值是唯一的.

显然有下列性质:

(1) 对于任意非零向量$\boldsymbol{a}$,有$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$,其中$\varphi$是向量$\boldsymbol{a}$与数轴$u$的夹角(图9);

(2) 投影的线性性质:

① $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$,

$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} - \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$;

② 设λ是数量,则$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

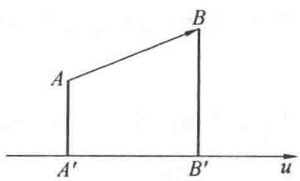


图 8

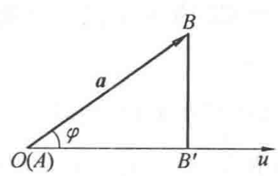


图 9

例如,设$\boldsymbol{e}$是与数轴u同方向的单位向量,$\overrightarrow{AB}$在数轴u上的投影向量为$\overrightarrow{A'B'}$,$\lambda = \mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$,则$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\boldsymbol{e}$.

6. 空间直角坐标系

过空间定点 O 作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且取相同的长度单位，由此所得三个数轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴. 其正向规定为，以右手握住 z 轴，让右手的四指从 x 轴的正向以$90°$ 的角度转向 y 轴的正向，此时大拇指所指的方向即为 z 轴的正向（图 10），称为右手系规则，这就构成了空间直角坐标系. 三条坐标轴中的任意两条都可以确定一个平面，称为坐标面. 由 x 轴及 y 轴所确定的平面称为 xOy 平面；由 y 轴及 z 轴所确定的平面称为 yOz 平面；由 z 轴及 x 轴所确定的平面称为 zOx 平面. 以上三个相互垂直的坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限（图11），位于 x,y,z 轴的正半轴的卦限称为第 Ⅰ 卦限，从第 Ⅰ 卦限开始，在 xOy 平面上方的卦限按逆时针方向依次称为第 Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 卦限；第 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 卦限下方的卦限依次为第 Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 卦限.

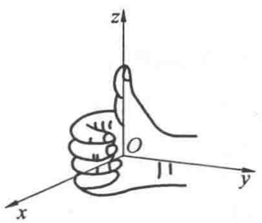


图 10

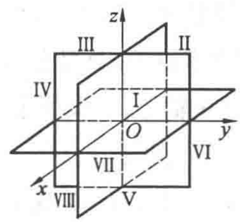


图 11

7. 空间点的坐标

建立了空间直角坐标系后，空间点 M 可以用坐标系来确定，过 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，它们与三条坐标轴分别相交于 P,Q,R 三点（图 12），设三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z，则点 M 唯一确定了一组有序数 x,y,z；反之给定一组有序数 x,y,z，设它们在 x 轴、y 轴、z 轴上依次对应的点为 P,Q,R，过这三个点分别作平面垂直于坐标轴，则这三个平面唯一的交点就是点 M，这样，空间中的点 M 就可以与一组有序数 x,y,z 建立一一对应关系，有序数组 x,y,z 称为点 M 的坐标，记为 $M(x,y,z)$，其中 x,y,z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

显然，原点 O 的坐标为$(0,0,0)$；坐标轴上的点至少有两个坐标为0，以 x 轴为例，x 轴上点的坐标为 $P(x,0,0)$；坐标面上的点至少有一个坐标为 0，以 xOy 平面为例，xOy 面上的点的坐标为$(x,y,0)$，读者可以自行归纳出其他坐标轴、坐标面上的点的坐标特征.

8. 空间两点间的距离

设空间中两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，求它们之间的距离.

过 P_1,P_2 各作三个平面分别垂直于三个坐标面，形成图 13 所示的长方体，这两点之间的距离就是长方体的体对角线长度，由于长方体的三个棱长分别是

$$a=|x_2-x_1|,\quad b=|y_2-y_1|,\quad c=|z_2-z_1|$$

所以

$$|P_1P_2|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1}$$

特别地，点 $P(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2}$$

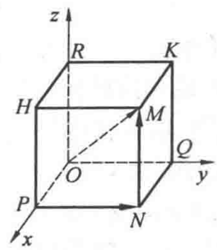


图 12

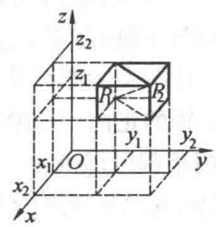


图 13

例 2　求两点 $P(1,2,3)$ 与 $Q(2,-1,4)$ 的距离 $|PQ|$.

解　由公式(1) 得

$$|PQ| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{11}$$

例 3　在 x 轴上求点 P,使得它与点 $Q(4,1,2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.

解　因为 P 在 x 轴上,可设所求的点为 $P(x,0,0)$,则应有 $|PQ| = \sqrt{30}$,即

$$\sqrt{(4-x)^2 + (1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{30}$$

$(4-x)^2 = 25, 4-x = \pm 5, x = -1$ 或 $x = 9$,所以所求点 P 的坐标为 $(-1,0,0)$ 或 $(9,0,0)$.

9. 向量的坐标

(1) 向量的分量及向量的坐标

在空间直角坐标系中与 x 轴、y 轴、z 轴三个坐标轴同方向的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称为基本单位向量.

给定空间中的点 $M(x,y,z)$,向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为向径,显然,$\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$\mathrm{Prj}_x \overrightarrow{OM} = x, \quad \mathrm{Prj}_y \overrightarrow{OM} = y, \quad \mathrm{Prj}_z \overrightarrow{OM} = z$$

如图 14 所示,点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影点分别为点 A、点 B、点 C,则向量

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OB} = y\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OC} = z\boldsymbol{k}$$

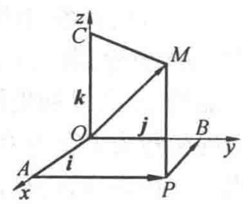


图 14

称为 $\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的分向量,设点 P 是 M 在 xOy 平面上的投影点,则 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PM}$,由向量的加法法则有

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$$

从而有

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

即

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{3}$$

称式(3) 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的分解式.

对于空间中的两点 $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$,则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴三个坐

标轴上的投影分别为 $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$，可将 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 平移为向径 $\overrightarrow{OM}$，于是 $\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，其中 x, y, z 为 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴三个坐标轴上的投影. 可知

$$\overrightarrow{M_1M_2} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \tag{*}$$

式（*）说明任何向量都可以用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的线性运算表示出来，这种表示法是唯一的.

如果 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，也可写为 $\{a_x, a_y, a_z\} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$.

(2) 向量的模、方向角、方向余弦

设有点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $B(x_2, y_2, z_2)$，则点 A 与点 B 间的距离 $|AB|$ 就是 $\overrightarrow{AB}$ 的模，即

$$|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

非零向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 与三个坐标轴的夹角 α, β, γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角；$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦. 由投影定理 $\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}|\cos\alpha$，$\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}|\cos\beta$，$\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}|\cos\gamma$，再根据向量坐标的定义得

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{r} = x,\quad \mathrm{Prj}_y\boldsymbol{r} = y,\quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{r} = z$$

于是，可得

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta = \frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma = \frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

即

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{4}$$

显然有 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

将非零向量 $\boldsymbol{r}$ 单位化得到

$$\boldsymbol{r}^0 = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\{x, y, z\} =$$

$$\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right\} \tag{5}$$

由式(5)及坐标表示的唯一性可得 $\boldsymbol{r}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$，可见 $\boldsymbol{r}^0$ 的三个坐标就是 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦.

例 4　已知两点 $A(4, \sqrt{2}, 1)$，$B(3, 0, 2)$，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦及方向角，并将 $\overrightarrow{AB}$ 单位化.

解

$$\overrightarrow{AB} = \{3 - 4, 0 - \sqrt{2}, 2 - 1\} = \{-1, -\sqrt{2}, 1\}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\quad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3},\quad \beta = \frac{3\pi}{4},\quad \gamma = \frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{AB}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

例5　小河同侧有两个村庄A,B,计划在河上建一水电站供两个村庄使用,已知A,B两村庄到河边的垂直距离分别为300 m和700 m,且两个村庄相距500 m,问:水电站建在何处,送电到两村电线用料最省?

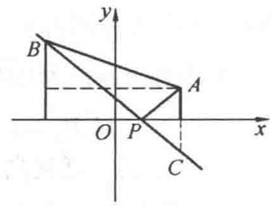


图15

解　如图15建立直角坐标系,以河为x轴,A,B两村到河边的垂足连线的中点为坐标原点建立直角坐标系,则A,B两点的纵坐标分别为300和700,$|AB|=500$,易求得$A(150,300)$,$B(-150,700)$,作点A关于x轴的对称点C,点C坐标为$(150,-300)$,则直线BC与x轴的交点P即为所求(因为$|AP|+|BP|=|CP|+|BP|$,而两点间距离最短),由B,C两点坐标可求得直线BC的方程为$10x+3y-600=0$,从而点P的坐标为$P(60,0)$,即为水电站所建位置.

习题8.1

1. 分别求点$M(-3,4,5)$到原点及三个坐标轴的距离.
2. 在x轴上求一点,使它到点$(-3,2,-2)$的距离为3.
3. 证明以点$A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.
4. 已知向量$\overrightarrow{AB}=\{4,-4,7\}$,它的终点坐标为$B(2,-1,7)$,求它的起点$A$的坐标.
5. 已知点$M(0,-2,5)$和$N(2,2,0)$,求向量$\overrightarrow{MN}$的模、方向余弦及方向角.
6. 已知$\boldsymbol{a}=\{2,2,1\}$,$\boldsymbol{b}=\{1,-1,4\}$,求$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.
7. 已知向量$\boldsymbol{a}$与三个坐标轴的夹角相等,求它的方向余弦.
8. 求平行于向量$\boldsymbol{a}=\{6,7,-6\}$的单位向量.
9. 一边长为a的正方体放置在xOy面上,其底面中心在坐标原点,底面的顶点在x轴和y轴上,求其各顶点的坐标.

8.2　向量的数量积、向量积和混合积

8.2.1　向量的数量积

1. 引例

已知力$\boldsymbol{F}$与x轴的夹角为α,其大小为F,在力$\boldsymbol{F}$的作用下,一质点M沿x轴由点A移动到点B处(图1),求力$\boldsymbol{F}$所做的功.

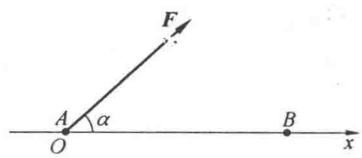


图1

解　力F水平方向的分力大小为$|\boldsymbol{F}_x|=|\boldsymbol{F}|\cos\alpha$,力$F$使质点$M$沿$x$轴方向所做的功可写成

$$W=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\alpha \tag{1}$$

现实生活中,还有许多量可以表示成"两向量之模与其夹角余弦之积",为此引入数量积的概念.