普通高等教育"十二五"规划教材

线性代数

余启港　欧阳露莎　张军好　主编

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

科学出版社

·普通高等教育“十二五”规划教材·

线性代数

余启港　欧阳露莎　张军好　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书按照48课时“线性代数”课程教学要求编写，在精简教学内容的同时，保持了课程体系完整，理论严谨，并注重解题方法的讲解和题型体系的研究，力求提高读者的解题能力. 全书共6章，内容包括行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵特征值与特征向量、二次型等. 书中附有大量习题.

本书可作为非数学专业“线性代数”课程教材，也可供自学者、科技工作者等阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/余启港，欧阳露莎，张军好主编. 一北京：科学出版社，2011.7
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-031796-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①余…②欧…③张… Ⅲ. ①线性代数一高等学校一教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第131748号

责任编辑：张颖兵 / 责任校对：梅 莹
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
http://www.sciencep.com
京山德兴印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011年7月第 一 版 开本 B5(720×1000)
2011年7月第一次印刷 印张：11
印数：1—4 000 字数：212 000

定价：22.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

编 者 的 话

成功就是把复杂的事情简单做,简单的事情重复做. 把所有的问题简单化,简单到最后只剩下直奔成功.

线性代数教材建设的成功就在于如何理清知识结构,使概念更清晰明了,结论更条理统一,方法更规范合理,从而让读者学以致用.

本书编写过程中,我们采取了两点特别的措施:一是将矩阵运算与性质分离,直接给出运算公式,而对运算的众多性质,重点只讲如何发现性质和证明性质的方法;二是各种解题方法的总结,将它们都标准程序化了. 这些既是我们教学改革实践的经验总结,也是新编教材的一种尝试.

本书共 6 章,内容分别是 n 阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型. 全书每节后有相应的基本习题,方便教学中布置课后作业;每章后还有综合题,方便读者复习时练习.

本书可供高等院校文理科各专业使用,教学时数约需 48 学时. 对于学时更少的课堂,教师可删去某些结论的证明. 本书也适合各类读者自学.

本书由余启港、欧阳露莎、张军好主编,胡军浩、余纬、李学锋任副主编.

读者对本书提出的宝贵意见和建议,以及指正书中的不足,即使是一个很微小的疏忽,也是对我们莫大的鼓励. 请读者通过电子邮箱 xxds123456@163. com 与我们联系.

二〇一〇年十月于武昌南湖畔

目　　录

第 1 章　n 阶行列式

n 阶行列式理论是线性代数中最基本的内容之一，它产生于线性方程组求解公式——克莱姆法则，又自成体系，形成了自己的核心内容：定义、性质、计算方法. 本章重点要掌握行列式定义和计算方法——化三角形法. 学习的困难之处在于行列式的定义的理解和展开性质的应用.

1.1　二阶行列式与三阶行列式

在中学，大家学习了线性方程组的加减消元法和代入消元法求方程组的解. 例如，解二元线性方程组

$$\begin{cases}3x+4y=7; & ①\\ 5x+6y=11. & ②\end{cases}$$

就可以这样解：①×6－②×4，得

$$x=\frac{7\times6-11\times4}{3\times6-5\times4},$$

①×5－②×3，得

$$y=\frac{7\times5-11\times3}{4\times5-6\times3}=\frac{11\times3-7\times5}{3\times6-5\times4}.$$

现在的问题是，怎样记住解 x,y 的分子、分母呢？

首先，从 x,y 变形以后的分母看到 3,6,5,4 就是方程组中 x,y 的系数，因此，我们能想到规定记号

$$\begin{vmatrix}3&4\\5&6\end{vmatrix}\triangleq3\times6-5\times4,$$

这样，我们就有了一种新的方法. 例如，

$$\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=2\times5-4\times3=10-12=-2,$$

$$\begin{vmatrix}-3&2\\5&7\end{vmatrix}=(-3)\times7-5\times2=-21-10=-31.$$

其次，观察 x,y 的分子，我们看到 x 的分子

$$7\times6-11\times4=\begin{vmatrix}7&4\\11&6\end{vmatrix}$$

是用常数项“取代”了分母中的 x 的系数；y 的分子

$$11\times 3-7\times 5=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 5 & 11\end{vmatrix}$$

是用常数项“取代”了分母中的 y 的系数. 显然，对于一般的二元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1;\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2.\end{cases}$$

的解，规定公分母为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

当 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，则有如下求解公式：

$$x=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

同样，我们也可以运用消元法求出三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2;\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$$

的解. 其公分母为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\triangleq a_{11}a_{22}a_{23}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1.2}$$

故可得到如下求解公式：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}.$$

由以上线性方程组的求解已经看到了新的解法中，式(1.1)和式(1.2)中的记号的作用. 我们分别把这种记号称为**二阶行列式**和**三阶行列式**.

大家可能很想继续再解出4元、5元、…、n元一次方程组的解的公分母而规定4阶、5阶、…、n阶行列式. 那么，一方面，每次找公分母的工作量巨大；另一方面，由于我们的消元法每一步只能消去一个未知量——1元，对于一般的n元一次方程组，消元法难于完成.

另外，我们规定的n阶行列式还必须满足如下要求：n个方程的n元一次方程组的解的公分母就是n阶系数行列式，而每个未知量的分子就是用常数项“取代”分母中它的系数而得到的n阶行列式！

练　习　1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $D=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$；　　(2) $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$；　　(4) $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12; \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

1.2　排列及其对换

为了定义n阶行列式，我们先给出n级排列的概念.

定义 1.1　由数字$1,2,3,\cdots,n$组成的有序数组$i_1i_2i_3\cdots i_n$称为一个n级排列，简称为排列. 特别地，n级排列$123\cdots n$称为**n级自然排列**或**n级标准排列**.

对于一个n级排列中的两个数字，以它们在标准排列中的位置次序为“标准”给出它们在这个排列中的“序关系”如下：

定义 1.2　在一个n级排列$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n\,(s<t)$中的两个数字$i_s,i_t$，如果$i_s>i_t$，则称它们构成一个逆序. 排列$i_1i_2i_3\cdots i_n$中全部逆序的总个数称为排列的逆序数，记作$N(i_1i_2i_3\cdots i_n)$.

例 1.1　求排列514362的逆序数.

解　该排列中，5后面有1,4,3,2,这4个比5小；1后面有0个比1小；4后面有3,2,这2个比4小；3后面有2,这1个比3小；6后面有2,这1个比6小，这是全部构成逆序的数字，共有$4+0+2+1+1=8$对，因此$N(514362)=8$.

一般地，求排列的逆序数的方法如下：

对排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$，数出每个数字 i_t 后面比 i_t 小的数字的个数 N_t，$t=1,2,\cdots,n-1$，则 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 的逆序数

$$N(i_1i_2i_3\cdots i_n)=\sum_{t=1}^{n-1}N_t.$$

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如，1234 的逆序数是偶数 0，是偶排列；4123 的逆序数是奇数 3，是奇排列.

定义 1.4 在排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果对调其中两个数字 i_s 与 i_t 的位置，其他数字的位置不变，得到一个新排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，称这样的变换为**对换**，记作 (i_s,i_t). 对换过程记作

$$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n\xrightarrow{(i_s,i_t)}i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n.$$

如果对调的两个数字的位置是相邻的，称这样的对换为**相邻对换**.

例 1.2 将排列 52134 经对换变成标准排列 12345.

解 $52134\xrightarrow{(5,1)}12534\xrightarrow{(5,3)}12354\xrightarrow{(5,4)}12345.$

一般地，任何一个 n 级排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 都可经过一系列这种“归位”对换：第 1 位置数字与 1 对换，再对新排列中的第 2 位置数字与 2 对换……逐步将数字 k 移到第 k 位置而变成标准排列.

关于对换与排列奇偶性之间的关系，有如下性质：

性质 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 设旧排列 $\cdots i_sj_1\cdots j_pi_t\cdots$ 经过一次对换 (i_s,i_t) 变成新排列 $\cdots i_tj_1\cdots j_pi_s\cdots$ ($p=0$时表示相邻对换). 我们来考察两个排列中数字之间的序关系：仅 i_s 与 i_t 之间和 i_s,i_t 分别与 $j_1,\cdots,j_p$ 的每一个之间的序关系发生了改变，共 $2p+1$ 次. 设其中有 q_1 次是由逆序变成不是逆序，有 q_2 次是从不是逆序变成逆序，则

$$q_1+q_2=2p+1.$$

因此，新排列的逆序比旧排列的逆序增加了 q_2-q_1 个(当 $q_2<q_1$ 时是减少了 q_1-q_2 个). 而

$$q_2-q_1=q_2+q_1-2q_1=2(p-q_1)+1\quad (q_1-q_2=q_1+q_2-2q_2=2(p-q_2)+1)$$

为奇数，故新旧两个排列的逆序数的奇偶性相反，从而对换改变了排列的奇偶性.

练 习 1.2

1. 计算下列排列的逆序数，并判断排列的奇偶性：

(1) 32514；　　(2) 31524；

(3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

1.3　n 阶行列式的定义

利用排列的理论，我们可以给出 n 阶行列式的定义如下：

定义 1.5　由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 **n 阶行列式**. 其中，a_{ij} 表示第 i 行第 j 列位置上的数字，称为第 i 行第 j 列元素.

n 阶行列式表示所有取自不同行、不同列的 n 个数的乘积并按照如下方法带上正号或负号的代数和：每项乘积中的 n 个数按行号排成标准排列时，其列号排列的奇偶性决定该项的符号，奇排列时为负号，偶排列时为正号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.3}$$

其中，求和 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 取遍所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$；而 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为**行列式的一般项**. 特别地，当 $n=1$ 时，规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

行列式有时也简记作 $|a_{ij}|$，其值是一个数.

当 $n=2,3$ 时，按照定义 1.5 计算的 2,3 阶行列式的值与前面规定的 2,3 阶行列式值式(1.1) 和式(1.2) 正好吻合一致. 其实，n 阶行列式的定义就是从分析 2,3 阶行列式的共同规律，由特殊到一般地推广得到的.

根据 n 阶行列式的定义计算行列式将要计算 $n!$ 项，$n=4$ 时，$4!=24$；$n=5$ 时，$5!=120$. 如此多项的计算很麻烦，但当这些项中很多都等于 0，仅有少量的项不等于 0，特别仅有 1,2 项不等于 0 时，我们只需要把这些不等于 0 的项计算出来就可以了.

行列式的一般项是取自不同行、不同列的 n 个数的乘积的代数和，故只有当这 n 个数都不等于 0 时，该项才可以不等于 0.

例 1.3　计算 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{vmatrix}$$

(在行列式中,某些位置数字 0 不写更能反映其分布时,就不写).

解　这个行列式按定义计算时第 4 行只能取 a_{44},从而第 3 行只能取 a_{33},进而第 2 行只能取 a_{22},最后就知道第 1 行只能取 a_{11},于是,这个行列式的不等于 0 的项只能是这 4 个数字的乘积,其前显然带正号,故原行列式 $= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**. 主对角线下(上)方数字全为 0 的行列式称为**上(下)三角形行列式**,统称为**三角形行列式**. 主对角线以外的数字全为 0 的行列式称为**对角形行列式**.

仿上例可证:三角形行列式和对角形行列式的值都等于主对角线上的数字的乘积.

行列式 $|a_{ij}|$ 的一般项还可以写成

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

这是因为 n 个数 $a_{i_1j_1},a_{i_2j_2},\cdots,a_{i_nj_n}$ 是取自不同行不同列的,从而 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 分别是行号排列和列号排列. 交换乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中因子数字之间的次序,相当于对两个排列同时作相同位置上数字的对换,即对 $i_1i_2\cdots i_n$ 作 (i_s,i_t) 对换时,就对 $j_1j_2\cdots j_n$ 作 (j_s,j_t) 对换.

这样,若经过 T 次对换,将 $i_1i_2\cdots i_n$ 变成了标准排列 $12\cdots n$,则这 T 次对换相应地把 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成了排列 $k_1k_2\cdots k_n$;根据性质 1.1,于是有

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^T=(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}.$$

又由于 $12\cdots n$ 为偶排列,则 T 的奇偶性与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的奇偶性相同,于是有

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}=(-1)^T,$$

进而

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}=(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n},$$

就是行列式的一般项.

于是,我们有如下行列式的等价定义:

定义 1.5′　定义 1.5 中的 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 可定义为

$$|a_{ij}|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

这是一个将各项乘积中的 n 个数按列号排成标准排列,其行号排列的奇偶性确定该项的符号的定义.

于是,我们有了行列式的如下一种变形:把行列式的行与列互换,即把原来在第 i 行第 j 列位置的元素换到第 j 行第 i 列位置上去,所得到的行列式称为原来行列式的**转置行列式**,记 D 的转置行列式为 D^{T}. 例如 $D=\begin{vmatrix}2&7&6\\1&3&4\\5&-2&-1\end{vmatrix}$ 时,

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

根据行列式的两个等价定义就知道，如下性质成立：

性质 1.2　将行列式转置，行列式的值不变.

因此，在行列式中行与列的地位相同，凡是对行成立的性质，对列也同样成立. 以下我们以行为例研究行列式的性质.

练　习　1.3

1. 写出 4 阶行列式 $D = |a_{ij}|_{4\times4}$ 中含 $a_{13}a_{42}$ 的项.

2. 计算下列行列式的值：

(1) $D = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$；　(2) $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.4　行列式的性质

为了计算行列式的值，我们有必要先研究一下将行列式变形成“好计算”的行列式. 如前所述，三角形行列式就“好计算”. 那么如何对行列式作变形？变形后行列式的值有什么变化呢？

我们是要用行列式来表示方程组的解的，而方程组求解是用消元法. 由于消元法前后方程组是“同解”的，但这时表示解的分子、分母行列式已经变形了，它们的比值却要“保持不变”——“同解”. 因此，我们可以想到：变形前后的分子之间、分母之间一定是有某些共同的规律.

消元法对方程组的变形，大致可以归结为如下三种：

(1) **换方程**，即对换方程组中两方程的位置；

(2) **倍方程**，即对某一方程两边同时乘以一个非零数；

(3) **倍方程加**，即对某一方程两边同时乘以一个数加到另一个方程上.

我们把这三种变形称为**方程组的初等变换**. 此时，分子、分母行列式也跟着发生如下三种变形：

(1) **换行**,即交换两行的位置,记 $r_1 \leftrightarrow r_j$ 为交换第 i 行与第 j 行;

(2) **倍行**,即对某一行乘以一个非零数,记 $kr_i(k \neq 0)$ 为将第 i 行 k 倍;

(3) **倍行加**,即对某一行乘以一个数加到另一行上去,记 $r_i + kr_j$ 为将第 j 行的 k 倍加到第 i 行.

我们通常把这三种变形称为**行列式的初等行变换**.

同样,将"行"字改成"列"字,将"r"改成"c",就是**行列式的初等列变换**. 它们合称为**行列式的初等变换**.

初等变换是线性代数课程中最基本的变换,例如:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{经 } r_1 \leftrightarrow r_2 \text{ 变为} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \text{经 } 4r_1 \text{ 变为} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 16 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{经 } c_1 - c_3 \text{ 变为} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

那么,初等变换前后的行列式值究竟发生了什么变化呢?我们有行列式的如下三个基本性质.

性质 1.3　行列式的行初等变换性质:

(1) **换行**,值反号;

(2) **倍行**,倍值;

(3) **倍行加**,值不变.

例如:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{3r_2} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 6 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 3r_1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

至此,我们只要利用行列式的初等变换性质,像解方程组时化成三角形方程组一样,把行列式化成三角形,就可以计算出行列式的值了.

例 1.4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

解 利用初等变换化成三角形行列式：

$$\text{原式} \xlongequal[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{① 第 1 行}(-2)\text{ 倍加到第 2 行} \\ \text{② 第 1 行}(-1)\text{ 倍加到第 3 行} \end{array}\right)$$

$$\xlongequal{r_4 - 3r_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 25 \end{vmatrix} \quad (\text{③ 第 2 行}(-3)\text{ 倍加到第 4 行})$$

$$\xlongequal{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} \quad (\text{④ 第 3 行}(-1)\text{ 倍加到第 4 行})$$

$$= 2 \times 1 \times 2 \times 24 = 96.$$

现在，我们来证明性质 1.3 的(1) 和(2).

证 利用式(1.3) 来证明.

(1) 换行后，设交换了第 i 行与第 k 行($i < k$) 的行列式 D_1 按式(1.3) 计算，注意到第 i 行取第 j_k 列数字为 a_{kj_k}，而第 k 行取第 j_i 列数字为 a_{ij_i}，就得

$$D_1 = \sum_{\cdots j_k \cdots j_i \cdots} (-1)^{N(\cdots j_k \cdots j_i \cdots)} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots,$$

根据性质 1.1 一次对换改变排列的奇偶性知 $(-1)^{N(\cdots j_k \cdots j_i \cdots)} = -(-1)^{N(\cdots j_i \cdots j_k \cdots)}$，而乘积 $\cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots = \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots$，又排列 $\cdots j_k \cdots j_i \cdots$ 与 $\cdots j_i \cdots j_k \cdots$ 是一一对应的，因此

$$D_1 = -\sum_{\cdots j_i \cdots j_k \cdots} (-1)^{N(\cdots j_i \cdots j_k \cdots)} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots = -D;$$

(2) 倍行后，设第 i 行 k 倍后的行列式 D_1 按式(1.3) 计算，注意到第 i 行取第 j_i 列数字为 ka_{ij_i}，就得

$$D_1 = \sum_{\cdots j_i \cdots} (-1)^{N(\cdots j_i \cdots)} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots = k \sum_{\cdots j_i \cdots} (-1)^{N(\cdots j_i \cdots)} \cdots a_{ij_i} \cdots = kD.$$

应用中我们要计算的是原行列式 D，因此，倍行时要求倍数非零，这样 $D_1 = kD$，

$k \neq 0$,才能有 $D = \frac{1}{k}D_1$,这个等式很好记:D_1 是在 D 里面某一行乘了 k 倍,从而 D_1 的外面就要乘以 $\frac{1}{k}$ 倍,才能与原来的 D 相等.

但是,另一方面,前面的证明中得到 $D_1 = kD$,我们并没有利用 $k \neq 0$,因此,无论因子 k 是否等于 0,$D_1 = kD$ 总是成立的,而这时的 k 又可看成是从 D_1 中的某一行里提取出来的公因子,这样就得到了行列式的一个非常好的性质:

性质 1.4　提取一行公因子,即可以把行列式中某一行所有元素的公因子提取出来放到行列式外面作为因子.

这个性质特别在讨论含参数的问题中,可使讨论变得简便.

利用性质 1.3 的(1)和(2)及性质 1.4 容易得到如下三个零值行列式的结论.

性质 1.5　具有如下特征之一的行列式,其值为 0:

(1) 有一行元素全为 0;

(2) 有两行元素对应相等;

(3) 有两行元素对应成比例.

证　(1) 在原来行列式 D 的全为 0 的行乘以 2 得到的新行列式 D_1,一方面,$0 \times 2 = 0$,$D_1 = D$;另一方面,根据性质 1.3 的(2),$D_1 = 2D$,故 $D = 2D$,$D = 0$.

(2) 交换原来行列式 D 中对应相等的这两行,得到的新行列式 D_1,一方面还是 D:$D_1 = D$;另一方面,根据性质 1.3 的(1)$D_1 = -D$,$D = -D$,故 $D = 0$.

(3) 若对应成比例的比值为 k,则在原来这个行列式 D 中将比例的分子行的因子比值 k 提取出来,就得到一个新的行列式 D_1,其中原来成比例的两行数字对应相等,故由前面已证明了的(2)知 $D_1 = 0$,又根据性质 1.4,$D = kD_1$,得 $D = 0$.

为了证明性质 1.3 的(3),人们发现了行列式的如下一种变形:拆一行,即把行列式的某一行的数字拆开成两个数字的和,分别放在两个行列式对应的位置上去,而其他行数字不变,这样得到两个行列式.例如

$$\begin{vmatrix} 4+2 & 3+7 & -2+5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \text{拆第 1 行变成} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

并且还发现如下性质:

性质 1.6　拆行拆值,即把一个行列式的某一行拆开所得到的两个行列式的值之和就等于原行列式的值.

证　还是利用式(1.3)来证明.这个性质就是要证明

$$\begin{vmatrix} & \vdots & & \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_n \\ & \vdots & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & \vdots & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \vdots & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \vdots & & \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ & \vdots & & \end{vmatrix},$$

其中未写出来的数字,在三个行列式对应的位置上是相等的,

$$\begin{aligned}左 &= \sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_2)}\cdots(a_i+b_i)\cdots \\ &= \sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_2)}\cdots a_i\cdots+\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_2)}\cdots b_i\cdots \\ &= 右.\end{aligned}$$

现在,我们可以证明性质 1.3 的(3)了.

证 设 D 中第 i 行的 l 倍加到第 j 行上去后,得到的行列式为 D_1,我们来证明 $D_1=D$. 首先,将 D_1 中第 j 行拆开得到两个行列式 D_2 和 D_3,由性质 1.6 知 $D_1=D_2+D_3$,D_2 就是原来的 D,而 D_3 中第 j 行是第 i 行的 l 倍,即第 j 行与第 i 行成比例,故 $D_3=0$. 这样就证明了 $D_1=D$.

至此,性质 1.3 的证明完成.

前面我们已经举例说明了计算行列式的化三角形方法:

首先,若第 1 个对角元 a_{11} 及其下方(即第 1 列)的数字都等于 0,则行列式等于 0,否则,经过初等行变换把 a_{11} 化成非零数,并把其下方的 a_{i1} 都化成 0,$i=2,3,\cdots,n$;其次,再考虑第 2 个对角元,若第 2 个对角元 a_{22} 及其下方的数字都等于 0,则行列式的值也等于 0,否则,经过初等行变换把 a_{22} 化成非零,并把其下方的 a_{i2} 都化成 0,$i=3,\cdots,n$;接着再考虑第 3 个对角元……这样,逐步将每个对角元下方都化成了 0,行列式就化成三角形了.

如果在某步,对角元及其下方都为 0,则行列式等于 0;否则,化成了三角形行列式,由此可计算出原行列式的值.

下面我们再举几例.

规定:①每次变形对每个元素至多只能改变一次;②每次变形所做的多个初等变换按自上而下的次序.

例 1.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\\1&2&3&4\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\2&3&4&1\\0&1&2&3\end{vmatrix}\qquad(化\ a_{11}\ 为非零)$$

$$\xlongequal[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-3)r_1}-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-2&-8&-10\\0&-1&-2&-7\\0&1&2&3\end{vmatrix}\qquad(化\ a_{11}\ 下方为零)$$