普通高等教育“十三五”规划教材

微分方程数值解

房少梅 王霞 主编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

微分方程数值解

主　编　房少梅　王　霞
副主编　金玲玉　邱　华
编　委　李　朗　郭昌洪　官金兰
陈创泉　陈　洁　文　斌

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书分为三大篇：第 1 篇为常微分方程数值解，包含了两章内容，分别介绍了常微分方程初值问题的理论基础和数值方法；第 2 篇为偏微分方程数值解，包含了六章内容，分别介绍了常用的有限差分、谱方法和有限元方法；第 3 篇为分数阶微分方程数值解，包含了三章内容，介绍了分数阶微积分的相关概念及算法、分数阶常微分方程和分数阶偏微分方程数值解解法. 本书的内容比较全面，基本涵盖了“微分方程数值解”常用的各种方法，将数学理论、数值方法与应用有机地结合起来，并以生动详细的实例为载体，较为详细地介绍了不同方法如何运用于不同的方程.

本书可以作为普通高等院校研究生、本科生的“微分方程数值解”课程的教材，根据不同层次所需的教学学时数选择相应的教学内容；同时也可以作为科研工作者应用数学方法来解决实际问题的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值解/房少梅，王霞主编．—北京：科学出版社，2016. 5

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-047117-8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①房…②王… Ⅲ. ①微分方程解法-数值计算-高等学校-教材 Ⅳ. ①O241. 8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 012075 号

责任编辑：姚莉丽 张中兴 / 责任校对：包志虹

责任印制：徐晓晨 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 5 月第 一 版 开本：720×1000 B5

2016 年 5 月第一次印刷 印张：11 1/2

字数：238 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书是为普通高等院校的研究生、大学生学习“微分方程数值解”这门课编写的教学参考书. 华南农业大学从 2005 年开始设置“微分方程数值解”这门课程，选修该课程的学生来自理、工、农、林、经、文等多个不同学科，这些学生的数学基础和计算机知识参差不齐，面对这种实际问题，我们在实际教学过程中一直在思考：如何教才能满足各类学生学以致用的实际需求，什么样的教材能有很好的实用性和很强的针对性，从而能够进一步培养和提高学生应用数学解决实际问题的能力. 面对这些存在的实际问题和所教学生的具体情况，我们从 2005 年开始尝试编写适用不同层次学生的“微分方程数值解”的讲义，在校内使用. 在使用过程中历经多次修改，逐步完善，最终形成了这本书.

在本书编写过程中，我们广泛地参考了国内外许多“微分方程数值解”的文献和专著，吸取了国内外许多学者和专家研究的新成果，结合自己的教学和科研的实际情况，做到取长补短. 本书的内容比较全面，基本涵盖了“微分方程数值解”常用的各种方法，将数学理论、数值方法与应用有机地结合起来，并以生动详细的实例为载体，较为详细地介绍不同方法如何运用于不同的方程.

在教材具体内容的选取上，我们做了精心设计，以便于读者尽快熟悉微分方程数值解的基本理论，并能结合实际算法，使读者能在较短的时间里学会这些方法的基本概念以及求解方法，尽快能用于解决实际问题. 本书分为三大篇：第 1 篇为常微分方程数值解，包含了两章内容，分别介绍了常微分方程初值问题的理论基础和数值方法；第 2 篇为偏微分方程数值解，包含了六章内容，分别介绍了常用的有限差分、谱方法和有限元方法；第 3 篇为分数阶偏微分方程数值解，包含了三章内容，介绍了分数阶微积分的相关概念及算法、分数阶常微分方程和分数阶偏微分方程数值解解法.

本书由房少梅、王霞负责统编，参加编写的老师有金玲玉、邱华、李朗、郭昌洪、官金兰、陈创泉、陈洁、文斌等.

本书之所以能够出版，首先要感谢科学出版社的大力支持；其次，在编写过程中得到了国内同行专家的热情帮助和鼓励，在此谨向他们表示衷心的感谢；最后，感谢华南农业大学研究生院、教务处和数学与信息学院领导一直以来的关心和支持. 另外，我们还要特别感谢的是，本书在出版过程中得到了广东省研究生教育创新计划项目（项目号：2013SFKC03）以及国家自然科学基金（11271141，11426069）

的资助.

本书可以作为研究生、本科生的“微分方程数值解”课程的教材，根据不同层次所需的教学学时数选择相应的教学内容；同时也可以作为科研工作者应用数学方法来解决实际问题的参考书.

由于编者水平有限，希望读者对本书的不妥和疏漏之处提出批评指正，以便不断修改完善.

编 者

2015 年 10 月于广州

目　　录

第 3 篇 分数阶偏微分方程数值解

第1篇　常微分方程数值解

引　言

自然界中很多事物的运动规律都可以用微分方程来刻画. 常微分方程是研究自然科学、社会科学中事物和物体运动、演化与变化规律最基本的数学理论和方法;物理、化学、生物、工程、航空航天、医学、经济和金融领域中的许多原理和规律都可用适当的常微分方程来描述,常微分方程的理论及其方法为其他学科的理论和应用提供了行之有效的方法.

但是,求解常微分方程的解析解是数学工作者的一项基本且重要的工作,由于问题比较复杂且涉及面广,使得大多数问题的解析解很难求出,有时即使能求出解析解的形式,也往往因计算量太大而不实用,所以,用求解析解的方法来计算常微分方程往往是不适宜的. 因此,研究常微分方程的数值解法具有重要的理论和实践意义.

瑞士数学家 Euler 最早提出 Euler 折线法,它开创了微分方程初值问题的数值解法的开端. 1895 年,德国数学家 Runge 提出了求常微分方程近似解的 Runge-Kutta 方法的思想. 现在,随着计算机技术的发展,微分方程数值解也得以迅速发展.

在本篇,我们主要介绍 Euler 公式、梯形法、Runge-Kutta 法及其线性多步法的数值理论和数值模拟.

第 1 章　常微分方程初值问题的理论基础

由于初值问题

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t_0 \leqslant t \leqslant T, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.0.1}$$

是常微分方程研究的基础，可以通过研究此问题进而研究一阶微分方程组，同时高阶方程又可以化为一阶微分方程组来研究. 在本章中主要通过问题(1.0.1)对微分方程数值解法进行研究. 在给出数值解法之前，解的存在性是解决问题的基础. 下面我们给出微分方程初值问题的解的存在唯一性定理.

定理 1.1　设 $f(t, y)$在域 $D = \{(t, y) \mid t_0 \leqslant t \leqslant T, -\infty < y < \infty\}$上有定义且连续，同时满足如下的 Lipschitz 条件

$$|f(t, y) - f(t, y^*)| \leqslant L|y - y^*|, \quad (t, y) \in D, \ (t, y^*) \in D, \tag{1.0.2}$$

其中 L 为 Lipschitz 常数，则初值问题的解存在且唯一，并且解 $y(t)$连续可微.

下面讨论微分方程的适定性.

例如，考虑如下扰动问题：

$$\begin{cases} v' = f(t, y) + \delta(t), \\ v(t_0) = y_0 + \varepsilon_0, \end{cases} \tag{1.0.3}$$

其中 $\delta(t)$和 ε_0 都是很小的扰动.

定义 1.1　如果存在常数 k, ε，使得当$|\varepsilon_0| < \varepsilon, t_0 \leqslant t \leqslant T, |y| < \infty, |\delta(t)| < \varepsilon$时，扰动问题(1.0.3)满足

$$|y(t) - v(t)| \leqslant k\varepsilon,$$

则称微分方程(1.0.1)对初始条件是适定的.

定理 1.2　如果 $f(t, y)$在(t, y)平面区域 D 中的任一有界闭区域 D_1 上连续且关于 y 满足 Lipschitz 条件，则式(1.0.1)对任何初值条件都是适定的.

注　定理 1.2 表明当 $f(t, y)$满足定理条件时，初值问题和初值的扰动对其解的影响是有限的. 即在实际应用中，建立微分方程数学模型、测定初值及计算时，即使存在一些小的扰动，也不会对解产生太大的影响.

第 2 章　常微分方程初值问题的数值方法

所谓常微分方程初值问题(1.0.1)的数值解法就是将微分方程的连续问题进行离散化(包括空间离散化和微分算子的离散化),并转换成差分方程进行求解的过程,即由初始点 t_0 开始,取一系列离散的点

$$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots$$

进行空间离散化,再在每个离散点上进行微分算子的离散得到初值问题(1.0.1)的相应近似值 $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$,建立求 $y(t_n)$ 近似值 y_n 的递推公式,进而求得式(1.0.1)的解在离散各节点上的近似值 $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$. 称相邻两节点 t_n,t_{n+1} 之间的间距 $h_{n+1}=t_{n+1}-t_n$ 为步长. 当 h_{n+1} 可变化时,称为变步长;h_{n+1} 为常数时,称为定步长,记为 h. $y(t_n)$,$f(t_n,y(t_n))$ 和 y_n,$f(t_n,y_n)$ 分别为初值问题(1.0.1)的精确解和数值解.

2.1　Euler 方法

2.1.1　显式 Euler 法

Euler 方法是最简单的数值方法. 考虑初值问题(1.0.1). 由于 $y(t_0)=y_0$ 是已知的,可以算出 $y'(t_0)=f(t_0,y_0)$. 设 $t_1=t_0+h$,当 h 充分小时,则近似地有

$$\frac{y(t_1)-y(t_0)}{h}\approx y'(t_0)=f(t_0,y_0),$$

从而可取

$$y_1=y_0+hf(t_0,y_0)$$

作为 $y(t_1)$ 的近似值. 类似地,利用 y_1 及 $f(t_1,y_1)$ 又可算出 $y(t_2)=y(t_0+2h)$ 的近似值

$$y_2=y_1+hf(t_1,y_1).$$

一般地,在任意节点 $t_{n+1}=t_0+(n+1)h$ 处,$y(t_{n+1})$ 的近似值由下式给出

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n). \tag{2.1.1}$$

这就是 Euler 方法的计算公式.

Euler 公式有明显的几何意义:如图 2.1 所示,实际上就是用过 (t_0,y_0) 点的一条折线来近似代替问题(1.0.1)过 (t_0,y_0) 的解曲线. 因此,Euler 方法又称折线法.

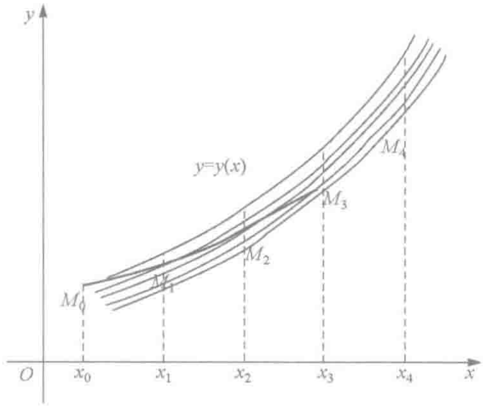

图 2.1　Euler 折线法

为考察 Euler 方法提供的数值解是否有用,我们首先应该知道,当步长充分小时,所得的数值解 y_n 能否准确地逼近初值问题的精确解 $y(x_n)$,即收敛性问题. 除此之外还要估计数值解与精确解之间的误差,在 Euler 方法中,误差有近似代替过程中产生的截断误差和计算过程中数值的舍入产生的误差——舍入误差. 而只有在计算过程最初产生的误差在以后的各步计算中不会无限扩大,方法才具有使用价值. 这称为稳定性问题.

2.1.2　隐式 Euler 方法

将 $y(x_k)$在 $x=x_{k+1}$点进行 Taylor 展开

$$y(x_k)=y(x_{k+1})+h_k f(x_{k+1},y(x_{k+1}))+\frac{y''(\eta_k)}{2!}h_k^2,\quad \eta_k\in[t_k,t_{k+1}].$$

忽略 h_k^2,分别用 y_k, y_{k+1}, $f_{k+1}=f(t_{k+1},y_{k+1})$近似 $y(x_k)$, $y(x_{k+1})$, $f(x_{k+1},y(x_{k+1}))$可得隐式 Euler 方法

$$y_{k+1}=y_k+h_k f(x_{k+1},y_{k+1}),\quad k=0,1,\cdots,n-1. \tag{2.1.2}$$

例　分别用显式 Euler 方法和隐式 Euler 方法解初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-3y+8x-7,\quad y(0)=1.$$

解　由式(2.1.1),该初值问题的显式 Euler 公式为

$$y_{n+1}=y_n+h(-3y_n+8x_n-7).$$

由式(2.1.2),该初值问题的隐式 Euler 公式为

$$y_{n+1}=y_n+h(-3y_{n+1}+8x_{n+1}-7).$$

下面是通过 Matlab 给出的显式和隐式 Euler 方法的数值解和精确解图(图 2.2,图 2.3).

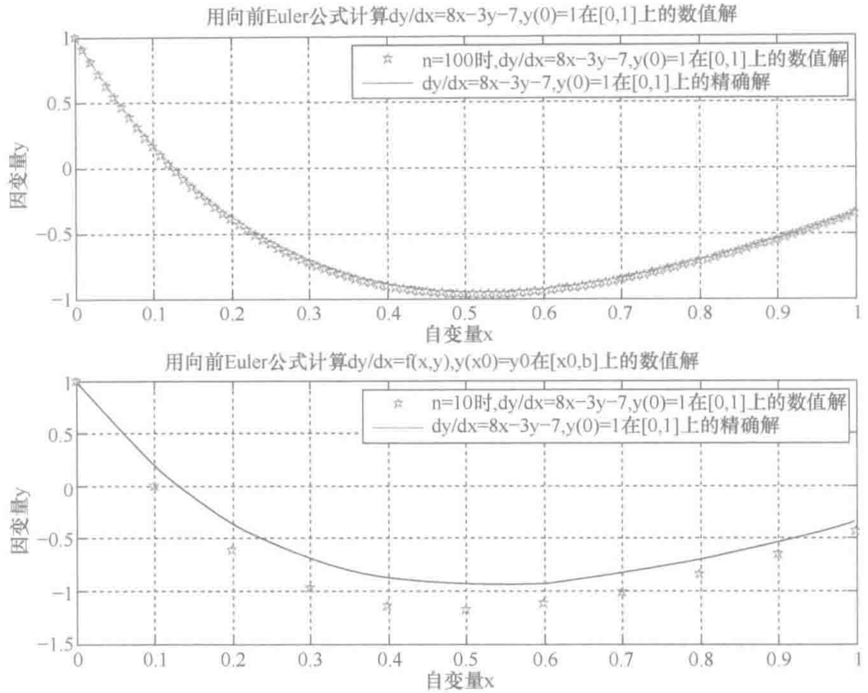
用向前Euler公式计算dy/dx=8x−3y−7,y(0)=1在[0,1]上的数值解
n=100时,dy/dx=8x−3y−7,y(0)=1在[0,1]上的数值解
dy/dx=8x−3y−7,y(0)=1在[0,1]上的精确解
因变量y
自变量x
用向前Euler公式计算dy/dx=f(x,y),y(x0)=y0在[x0,b]上的数值解
n=10时,dy/dx=8x−3y−7,y(0)=1在[0,1]上的数值解
dy/dx=8x−3y−7,y(0)=1在[0,1]上的精确解
因变量y
自变量x

图 2.2

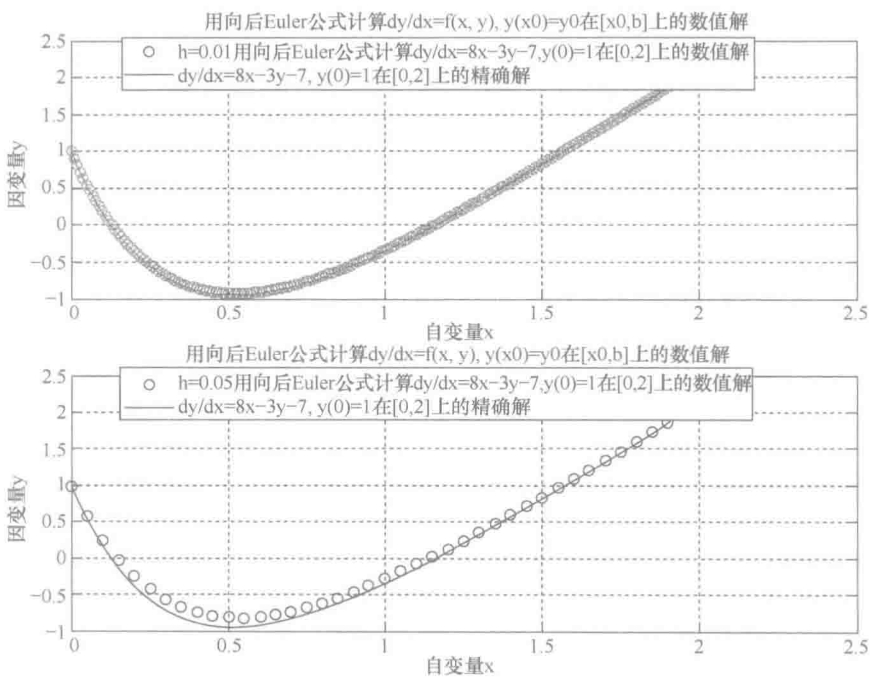
用向后Euler公式计算dy/dx=f(x, y), y(x0)=y0在[x0,b]上的数值解
h=0.01用向后Euler公式计算dy/dx=8x−3y−7,y(0)=1在[0,2]上的数值解
dy/dx=8x−3y−7, y(0)=1在[0,2]上的精确解
因变量y
自变量x
用向后Euler公式计算dy/dx=f(x, y), y(x0)=y0在[x0,b]上的数值解
h=0.05用向后Euler公式计算dy/dx=8x−3y−7,y(0)=1在[0,2]上的数值解
dy/dx=8x−3y−7, y(0)=1在[0,2]上的精确解
因变量y
自变量x

图 2.3