



普通高等教育“十二五”规划教材

高等工程流体力学

GAODENG GONGCHENG LIUTI LIXUE

王松岭 主编



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS



普通高等教育“十二五”规划教材

高等工程流体力学

主编 王松岭
编写 叶学民 吴正人
主审 周云龙

前 言

高等流体力学是动力工程及工程热物理一级学科（工程热物理、热能工程、动力机械及工程、流体机械及工程、制冷及低温工程、化工过程机械）以及相近学科（水利工程，供热、供燃气、通风及空调工程，环境工程，轮机工程，航空宇航科学与技术，核能科学与工程等）的一门重要的基础理论课程。该学科范畴的科学研究都离不开流体力学的基本理论。本教材的目的在于为研究生学习专业课程、从事课题研究提供必需的流体力学基础知识。

在阅读本书时，读者应具备大学本科流体力学的基本知识。作为硕士研究生教材，内容的选择参照了国务院学位委员会编写的《动力工程及工程热物理学科综合水平全国统一考试大纲及指南》中关于“高等流体力学”部分的内容要求，同时根据编者多年的教学经验做了适当调整。本书共分八章，主要包括流体力学的基本概念、流体力学基本方程、纳维-斯托克斯方程的解、流体的旋涡运动、理想不可压缩流体无旋运动、黏性不可压缩流体的紊流运动、不可压缩流体二维边界层、气体动力学基础。限于篇幅，有些内容没有深入展开。另外，阅读本书所需的某些数学知识及某些拓展性知识已编入了附录，供读者使用和参考。

本书作者分工为：第一、二章和附录由吴正人编写，第三、四、八章由叶学民编写，第五~七章由王松岭编写。本书由王松岭统稿。

东北电力大学周云龙教授任本书主审，他对书稿逐字逐句进行了认真审阅，提出了许多宝贵的修改意见，在此表示衷心的感谢！

本书中的部分习题、例题是从所列参考书或其他教材中引用的，在此向有关作者致谢！

本书成书过程虽数易其稿，但因流体力学内容博大精深，受编者学识所限，在内容选择与安排上难免有不当之处，也难免有疏漏之处，敬请读者和同行专家批评指正。

编 者

2011年2月

目 录

前言

第一章 流体力学的基本概念	1
第一节 描述流体运动的两种方法.....	1
第二节 速度分解定理.....	3
第三节 变形速度张量.....	6
第四节 应力张量.....	9
第五节 本构方程.....	13
第六节 旋涡运动的基本概念.....	15
习题.....	17
第二章 流体力学基本方程	19
第一节 雷诺输运定理.....	19
第二节 连续方程.....	20
第三节 运动方程.....	23
第四节 能量方程.....	26
第五节 流体力学方程组及定解条件.....	30
习题.....	32
第三章 纳维-斯托克斯方程的解	35
第一节 黏性流动的相似和无量纲参数.....	35
第二节 平行定常流动.....	36
第三节 平行非定常流动.....	40
第四节 低雷诺数流动.....	41
第五节 楔形区域的流动.....	45
第六节 沿有吹吸作用的壁面上的流动.....	46
习题.....	47
第四章 流体的旋涡运动	51
第一节 涡量动力学方程.....	51
第二节 凯尔文定理和拉格朗日定理.....	53
第三节 涡线及涡管强度保持性定理.....	54
第四节 黏性流体中旋涡的扩散性.....	57
第五节 旋涡场感应的速度场.....	59
习题.....	66
第五章 理想不可压缩流体无旋运动	67
第一节 基本方程组及其性质.....	67

第二节	速度势函数及无旋运动的某些性质	69
第三节	无旋运动的速度势函数和流函数	72
第四节	复位势及平面基本流动	77
第五节	绕圆柱体的流动	80
第六节	镜像法解平面势流问题	85
第七节	保角映射法解平面势流问题	89
第八节	空间轴对称势流	97
	习题	104
第六章	黏性不可压缩流体的紊流运动	108
第一节	紊流的基本概念	108
第二节	紊流运动的基本方程	111
第三节	紊流基本方程的若干导出方程	115
第四节	紊流的半经验理论简介	118
	习题	125
第七章	不可压缩流体二维边界层	126
第一节	边界层的基本概念	126
第二节	二维边界层微分方程	132
第三节	二维边界层动量积分方程	138
第四节	紊流边界层的速度分布	139
第五节	层流边界层的求解	143
第六节	紊流边界层的简单估算方法	149
第七节	边界层分离及边界层控制	152
	习题	155
第八章	气体动力学基础	157
第一节	气体动力学基本方程组	157
第二节	小扰动波在可压缩流体中的传播	158
第三节	有限振幅波的传播	162
第四节	正激波	166
第五节	一维定常等熵流动	171
第六节	平面可压缩流体流动的势流方程及其线性化	173
第七节	亚声速流动中的薄翼型绕流	177
第八节	超声速流动中的薄翼型绕流	180
第九节	超声速气流的普朗特-迈耶流动	184
第十节	斜激波	186
	习题	189
附录 A	梯度、散度、旋度及基本运算公式	191
附录 B	张量及基本运算	199
附录 C	常用正交坐标系中的基本量和基本方程	209
	参考文献	220

第一章 流体力学的基本概念

本章主要介绍描述流体运动的两种方法、流体物理量的随体导数、速度分解定理、变形速度张量和应力张量、本构方程及旋涡运动的基本概念，为展开流体力学问题的讨论提供必要的基础知识。

对于已在本科工程流体力学课程中有所阐述的内容，本章只作扼要的回顾和适度的拓展性叙述。

第一节 描述流体运动的两种方法

在流体力学中，描述流体运动的方法有两种：一种是拉格朗日（Lagrange）法；另一种是欧拉（Euler）法。

一、拉格朗日法

拉格朗日法是从分析各个流体质点的运动状态着手来研究整个流场的流体运动的。该方法的基本思想是：从某个时刻开始跟踪每一个流体质点，记录这些质点的位置、速度、加速度及其他物理参数的变化。这种方法是离散的质点运动描述方法在流体力学中的推广。下面介绍该方法的分析公式。

任一流体质点的位置在直角坐标中可表示为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中： a 、 b 、 c 为初始时刻 t_0 时任意流体质点的坐标。对于某一确定的流体质点， a 、 b 、 c 为常数，式（1-1）则表示其运动轨迹。不同的流体质点在 t_0 时刻处于不同的位置，即 a 、 b 、 c 的值不同。通常称区别不同流体质点的 a 、 b 、 c 为拉格朗日变数，它只是流体质点标号的函数。

由式（1-1）对时间 t 求偏导数，可求得流场中任意流体质点的速度 \vec{v} 和加速度 \vec{a} 。由于 $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ ， $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ，则在直角坐标系中可表示为

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (1-2)$$

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1-3)$$

若以 $\vec{r}(a, b, c, t)$ 表示流体质点的矢径，即 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ，则相应地有

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}(a, b, c, t)}{\partial t} \quad (1-4)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}(a, b, c, t)}{\partial t^2} \quad (1-5)$$

流体的密度 ρ 、压强 p 和温度 T 均可写成 a 、 b 、 c 、 t 的函数： $\rho = \rho(a, b, c, t)$ ， $p = p(a, b, c, t)$ ， $T = T(a, b, c, t)$ 。拉格朗日法初看容易理解，但就某些特定问题来求解方程是很困难的。

二、欧拉法

欧拉法是从分析流场空间点上物理量的变化着手来研究整个流场的流体运动情况的。该方法的基本思想是：研究运动特征量和其他物理量在流场中的分布及随时间的变化规律。显然，该方法与拉格朗日法不同。欧拉法的着眼点不是流体质点，而是流场中的空间点，在不同的时刻有不同的流体质点经过空间某个固定点，由于流场中某个点的速度是可测的，因此速度矢量是用于描述流体变化状态的基本量。于是有

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) \quad (1-6a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t) \\ v_y &= v_y(x, y, z, t) \\ v_z &= v_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (1-6b)$$

其他物理量如压强 p 、温度 T 和密度 ρ 均可写成

$$\left. \begin{aligned} p &= p(x, y, z, t) \\ T &= T(x, y, z, t) \\ \rho &= \rho(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (1-6c)$$

式中： x 、 y 、 z 为欧拉变数。当 x 、 y 、 z 固定而 t 变化时，式 (1-6) 中的函数则表示某固定点处的物理量随时间的变化规律；当 t 固定而 x 、 y 、 z 变化时，式 (1-6) 则表示某一时刻的物理量在流场中的分布规律。

应当指出，由于式 (1-6) 的物理量定义在空间点上是 x 、 y 、 z 的函数，而我们所研究的又是速度场、压力场和温度场等，因此采用欧拉法描述流体运动时，就可以利用场论这一强有力的数学工具。当场内的函数不依赖于 x 、 y 、 z 时，则称为均匀场；反之，称为不均匀场。当场内的函数不依赖于 t 时，则称为定常场；反之，称为不定常场。

由式 (1-6a) 可求得流体质点加速度的表达式为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

或

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (1-8a)$$

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (1-8b)$$

式中： $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ 为哈密尔顿 (Hamilton) 算子；右边的第一项为当地加速度，是由流场的不定常性引起的；第二项为迁移加速度，是由流场的不均匀性引起的。

三、随体导数

在拉格朗日法中，速度对时间的偏导数表示流体质点的速度对时间的变化率，即加速

度；在欧拉法中，速度对时间的偏导数则只表示流场固定点上速度对时间的变化率。为了表示属于某流体质点的物理量（如速度、温度、压强等）随时间的变化率，把在欧拉法中引进的运算符号 $\frac{d}{dt}$ 称为随体导数（或称为质点导数）。随体导数的通用表达式为

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)N \quad (1-9)$$

式中： N 为流场中的任一物理量，它可以是矢量或标量；右边第一项、第二项分别称为当地导数和迁移导数。

通过上述分析可知，采用欧拉法描述流体运动常常比采用拉格朗日法优越，其原因不仅在于采用欧拉法可利用场论分析这一数学工具，更主要的是在解决工程问题时通常没有必要知道每个流体质点的详细历史，因此在流体力学的研究中欧拉法得到了广泛应用。当然，这并不意味着可以忽略拉格朗日法的应用价值，因为在计算流体力学中研究某些问题时采用拉格朗日法还是很方便的。实际上，在欧拉法随体导数的表达式中，已用到了短时间追踪流体质点的拉格朗日观点。

四、欧拉变数与拉格朗日变数之间的相互转换

由于欧拉法和拉格朗日法是从不同的观点出发描述流体运动的两种方法，因此对于同一流体运动，它们之间是可以相互转换的。

设利用拉格朗日法描述流体质点的运动规律已知，其表达式为

$$\vec{r} = \vec{r}(a, b, c, t) \quad (1-10)$$

则速度 \vec{v} 可以表示为

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}(a, b, c, t)}{\partial t} = \vec{v}(a, b, c, t) \quad (1-11)$$

当式 (1-10) 存在单值时，可反解得 3 个标量的方程为

$$a = a(x, y, z, t), \quad b = b(x, y, z, t), \quad c = c(x, y, z, t)$$

代入式 (1-11) 可得

$$\vec{v} = \vec{v}[a(x, y, z, t), b(x, y, z, t), c(x, y, z, t), t] \quad (1-12)$$

式 (1-12) 即为用欧拉变数表示的速度场。

对于同一流场，欧拉法描述的流场运动规律为式 (1-6)，若流场运动规律已知，则将其写成 $\vec{v}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ，并进行积分可得

$$\vec{r} = \vec{r}(d_1, d_2, d_3, t)$$

式中： d_1 、 d_2 、 d_3 为常数，可由 $t=t_0$ 时 $r=r_0$ 的初始条件确定，于是有

$$d_1 = d_1(x_0, y_0, z_0), \quad d_2 = d_2(x_0, y_0, z_0), \quad d_3 = d_3(x_0, y_0, z_0)$$

注意到 \vec{r}_0 的 3 个坐标 (x_0, y_0, z_0) 即为拉格朗日变数 a 、 b 、 c ，于是有

$$\vec{r} = \vec{r}[d_1(x_0, y_0, z_0), d_2(x_0, y_0, z_0), d_3(x_0, y_0, z_0), t] \quad (1-13)$$

式 (1-13) 即为拉格朗日变数下的流体质点运动规律。

第二节 速度分解定理

由理论力学可知，任何一刚体的运动可分解为平动与转动之和，即

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1-14)$$

式中： \vec{v}_0 为刚体中任选一点 O 的平动速度； $\vec{\omega}$ 为刚体绕 O 点转动的瞬时旋转角速度； \vec{r} 为要确定速度的那一点到 O 点的矢径。由于旋转角速度 $\vec{\omega}$ 可以表示为 $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}$ ，则式 (1-14) 还可改写为

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left(\frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \right) \times \vec{r} \quad (1-15)$$

式 (1-15) 即为刚体的速度分解定理。对于流体，其运动要比刚体复杂得多，除平动和转动外，还有变形运动。下面讨论流体微团运动速度的分解。

以最简单的纯剪切流动 ($v_x = ay$, $v_y = v_z = 0$) 为例，速度分布及其流体微团变形如图 1-1 所示。由图 1-1 可知，在某一时刻 t_0 取的正方形流体微团 1234，在经过 δt 时刻后运动到新的位置，且由于速度分布不均匀变成菱形 1'2'3'4'，流体微团的这种变化可看成三种运动的复合：①平动，将微团 1234 右移，并使 3 与 3'、4 与 4' 重合 [见图 1-1 (b)]；②转动，使正方形绕 4 轴转动，直至对角线 42 与 42' 重合 [见图 1-1 (c)]，则其转角为 $\angle 242'$ ；③变形，剪切正方形 1234，并拉伸对角线 4'2'，使 2 与 2' 重合 [见图 1-1 (d)]。由此可见，这种流线都是直线的简单流动，是由平动、转动、变形这三种运动形式复合而成的。

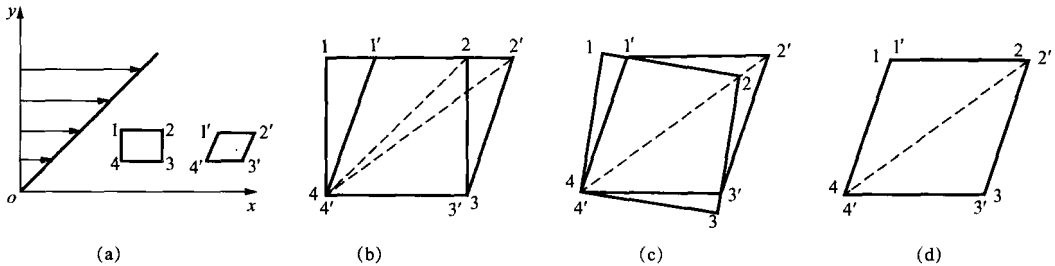


图 1-1 纯剪切流动的运动分解

下面分析一般情况下流体运动的分解。

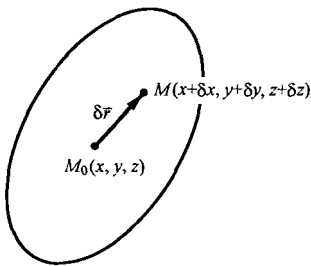


图 1-2 流体微团示意图

在流场中取出任一流体微团，如图 1-2 所示，图中 $M_0(x, y, z)$ 点处的速度为 \vec{v}_0 ， $M(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ 在 M_0 点的邻域内，其速度为 \vec{v} ， δ 表示对坐标的微分， δx 、 δy 、 δz 为一阶无穷小量，于是， M 点处的速度 \vec{v} 可表示为

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \delta z \quad (1-16)$$

利用张量表示法可写成

$$v_i = v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (1-17)$$

其中， $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 为一个二阶张量，它可以进一步分解为一个对称张量和一个反对称张量，即

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-18)$$

将式 (1-18) 右边第一项用 ϵ_{ij} 表示，称为变形速度张量 (或变形率张量)，在直角坐标系下展开，可得

$$\begin{aligned}
 [\epsilon] = [\epsilon_{ij}] &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1-19)
 \end{aligned}$$

式中： $\epsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ 、 $\epsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}$ 、 $\epsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$ 称为线变形速率； $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$ 、 $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$ 、 $\epsilon_{zx} = \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$ 称为剪切变形速率。由此可见， $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ 为一对称张量，它只有6个独立的分量。

将式(1-18)右边第二项用 a_{ij} 表示，在直角坐标系下展开，可得

$$\begin{aligned}
 [a] = [a_{ij}] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & \omega_y \\ \omega_x & 0 & -\omega_z \\ -\omega_y & \omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (1-20)
 \end{aligned}$$

可见，式(1-20)中 $a_{ij} = -a_{ji}$ 为一反对称张量，它只有3个独立的分量，其对应的物理量表示流体微团的旋转角速度 $\vec{\omega}$ 。将式(1-19)、式(1-20)代入式(1-18)，得

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + a_{ij}$$

因此，式(1-17)可写成

$$v_i = v_{0i} + \epsilon_{ij} \delta x_j + a_{ij} \delta x_j \quad (1-21)$$

将式(1-21)写成矢量形式，并注意到 $a_{ij} \delta x_j$ 为反对称张量右点乘一矢量（参见附录B张量的代数运算），可写成 $\vec{\omega} \times \delta \vec{r}$ 或 $\left(\frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \right) \times \delta \vec{r}$ ，于是

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\epsilon] \cdot \delta \vec{r} + \left(\frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \right) \times \delta \vec{r} \quad (1-22)$$

即为亥姆霍兹（Helmholtz）速度分解定理的一般形式，它描述了流体微团上任意点与参考点之间的速度关系。其中， \vec{v}_0 为平动速度； $[\epsilon] \cdot \delta \vec{r}$ 为变形速度，由流体微团变形引起，其特征量是二阶对称张量 $[\epsilon]$ ，这也是称 $[\epsilon]$ 为变形速度张量的由来； $\left(\frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \right) \times \delta \vec{r}$ 为转动速度，由流体微团绕通过 M_0 点的瞬时轴线旋转而产生。因此，亥姆霍兹速度分解定理可叙述为：流体微团的运动速度为平动速度、转动速度和变形速度三部分之和（矢量和）。该

定理的重大意义在于，它把流体的变形运动和旋转运动从一般运动中分离出来，这对研究流体的运动规律是非常重要的。因为当研究流体受力时，其作用面上的表面力与流体的变形速度直接相关；当流体无旋流动时，可应用势流理论去研究流体的运动。

第三节 变形速度张量

将变形速度张量式 (1-19) 改写成如下形式

$$[\epsilon] = [\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\theta_{xy} & \frac{1}{2}\theta_{xz} \\ \frac{1}{2}\theta_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\theta_{yz} \\ \frac{1}{2}\theta_{zx} & \frac{1}{2}\theta_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

其中

$$\theta_{xy} = \theta_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\theta_{yz} = \theta_{zy} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

$$\theta_{zx} = \theta_{xz} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

称为角变形速度。

首先，分析式 (1-23) 中对角线上各元素的物理意义。

取图 1-3 所示的微元线段 $\delta\vec{r}$ ，并作 $\delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ，如图 1-3 (a) 所示，则 $\delta\vec{r}$ 的随体导数为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta\vec{r} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \vec{v} - \vec{v}_0 = \delta\vec{v} \end{aligned} \quad (1-24)$$

式 (1-24) 表明，微分符号 $\frac{d}{dt}$ 与 δ 可

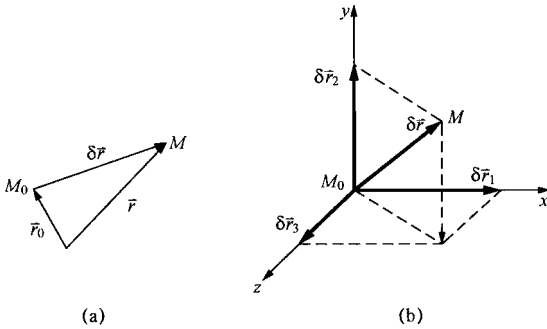


图 1-3 微元线段示意图

以对换，又可写成

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta\vec{r} &= \delta\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \delta\vec{v} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\delta z \end{aligned} \quad (1-25)$$

可见， $\delta\vec{r}$ 的随体导数反映了同一时刻内 M_0 与 M 两点间的速度差。过 M_0 点作直角坐标系，如图 1-3 (b) 所示， $\delta\vec{r}$ 在坐标轴上的投影分别为 $\delta\vec{r}_1$ 、 $\delta\vec{r}_2$ 、 $\delta\vec{r}_3$ ，则

$$\delta\vec{r}_1 = \delta x \vec{i}, \quad \delta\vec{r}_2 = \delta y \vec{j}, \quad \delta\vec{r}_3 = \delta z \vec{k} \quad (1-26)$$

根据式 (1-25) 和式 (1-26)，分别求 $\delta\vec{r}_1$ 、 $\delta\vec{r}_2$ 、 $\delta\vec{r}_3$ 的随体导数，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_1 &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \delta x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \delta x \vec{k} \\ \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_2 &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \delta y = \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \delta y \vec{k} \\ \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_3 &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \delta z = \frac{\partial v_x}{\partial z} \delta z \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \delta z \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

用式 (1-26) 的第一式与式 (1-27) 的第一式点乘, 得

$$\delta \vec{r}_1 \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_1 = \delta x \left(\frac{d}{dt} \delta x \right) = \delta x \delta \left(\frac{dx}{dt} \right) = \delta x \delta v_x = \delta x \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x$$

$$\text{即} \quad \epsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt} \delta x \quad (1-28)$$

同理可得

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{\delta y} \frac{d}{dt} \delta y$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\delta z} \frac{d}{dt} \delta z$$

式 (1-28) 进一步说明, 变形速度张量对角线元素 ϵ_{xx} 、 ϵ_{yy} 、 ϵ_{zz} 称为线变形速度或线变形速率, 其物理意义分别为: 过 M_0 点且分别与 x 、 y 、 z 轴平行的微元线段 δx 、 δy 、 δz 在单位时间内的相对伸长量或相对压缩量。将式 (1-28) 中的三项相加, 并注意到 $\delta x \delta y \delta z$ 等于微元体积 δV_s , 得

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} &= \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt} \delta x + \frac{1}{\delta y} \frac{d}{dt} \delta y + \frac{1}{\delta z} \frac{d}{dt} \delta z \\ &= \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \frac{d}{dt} (\delta x \delta y \delta z) = \frac{1}{\delta V_s} \frac{d}{dt} \delta V_s \end{aligned} \quad (1-29)$$

$$\text{于是有} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\delta V_s} \frac{d}{dt} \delta V_s = \nabla \cdot \vec{v} \quad (1-30)$$

$\nabla \cdot \vec{v}$ 就是大家熟知的相对体积膨胀率。当 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ 时, 即相对体积膨胀率为零, 是流体不可压缩的条件。

其次, 分析式 (1-23) 中非对角线上各元素的物理意义。将式 (1-27) 的第一式、第二式分别与式 (1-26) 的第二式、第一式点乘, 并将两式相加, 有

$$\delta \vec{r}_2 \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_1 = \delta y \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x, \quad \delta \vec{r}_1 \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_2 = \delta x \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y \quad (1-31)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta x \delta y &= \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_1 \cdot \delta \vec{r}_2) = \frac{d}{dt} (\delta x \delta y \cos \gamma_{xy}) \\ &= \cos \gamma_{xy} \frac{d}{dt} (\delta x \delta y) - \delta x \delta y \sin \gamma_{xy} \frac{d \gamma_{xy}}{dt} \end{aligned} \quad (1-32)$$

如图 1-4 所示, 由于 γ_{xy} 为两条正交流体边 δx 、 δy 的夹角 (即 x 轴与 y 轴的夹角) 等于 90° , 因此 $\cos \gamma_{xy} = 0$ 、 $\sin \gamma_{xy} = 1$, 整理式 (1-32) 可得

$$\theta_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{d \gamma_{xy}}{dt} \quad (1-33)$$

同理得

$$\theta_{yz} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} = - \frac{d \gamma_{yz}}{dt}$$

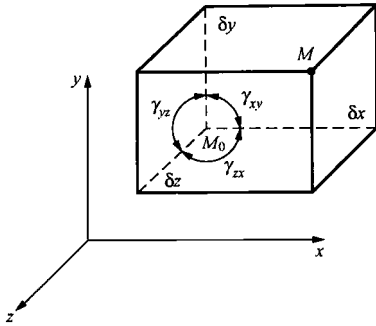


图 1-4 微元线段与坐标轴的夹角

$$\theta_{xz} = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{d\gamma_{xz}}{dt}$$

由此可见, 变形速度张量的非对角线元素 θ_{xy} 、 θ_{yz} 、 θ_{zx} 的物理意义为: 过 M_0 点且与坐标轴平行的微元正交线段夹角在单位时间内的减少量, 称为角变形速度或剪切角速度。

变形速度张量有 3 个不变量, 变形速度张量的各分量在某一固定的坐标系下, 其大小是固定的。当坐标系旋转到另一位置时, 其分量将发生变化; 但它有 3 个不随坐标系的旋转而改变的不变量, 即

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \nabla \cdot \vec{v} \\ I_2 &= \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + \epsilon_{zz}\epsilon_{xx} - \epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{yz}^2 - \epsilon_{zx}^2 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

根据对称张量的性质, 存在着一个使得非对角线上的分量均为零的坐标系位置, 称这个位置的 3 个坐标轴为主轴, 此时的 ϵ_{xx} 、 ϵ_{yy} 、 ϵ_{zz} 改用 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 表示, 称为主相对拉伸速度或变形率主值。变形速度张量变为标准形式

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

而 3 个不变量可写成

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ I_2 &= \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1 \\ I_3 &= \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-36)$$

有关正交曲线坐标系下的变形速度张量参见附录 B。

【例 1-1】 设平面剪切运动速度分布为 $v_x = ay$, $v_y = v_z = 0$ 。试求:

- (1) 流体微团的旋转角速度 $\vec{\omega}$ 和旋转速度 \vec{v}_ω [$\vec{v}_\omega = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v}) \times \delta \vec{r}$];
- (2) 变形速度张量 $[\epsilon]$ 及变形速度 \vec{v}_ϵ ($\vec{v}_\epsilon = [\epsilon] \cdot \delta \vec{r}$);
- (3) 主值及变形速度张量的标准形式。

解 (1) 流体微团的旋转角速度为

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{k} = -\frac{a}{2} \vec{k} \end{aligned}$$

由式 (1-22) 可得旋转速度为

$$\vec{v}_\omega = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v}) \times \delta\vec{r} = \vec{\omega} \times \delta\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\frac{a}{2} \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix} = \frac{a}{2}\delta y \vec{i} - \frac{a}{2}\delta x \vec{j}$$

(2) 由式 (1-19) 和式 (1-22) 可得

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_\epsilon = [\epsilon] \cdot \delta\vec{r} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \frac{a}{2}\delta y \vec{i} + \frac{a}{2}\delta x \vec{j}$$

或
$$\vec{v}_\epsilon = \vec{e}_i \epsilon_{ij} \delta x_j = \vec{e}_1 \frac{a}{2} \delta y + \vec{e}_2 \frac{a}{2} \delta x = \frac{a}{2} \delta y \vec{i} + \frac{a}{2} \delta x \vec{j}$$

(3) 由式 (1-34) 可知, $[\epsilon]$ 的 3 个不变量为

$$I_1 = 0, I_2 = -\frac{a^2}{4}, I_3 = 0$$

于是可确定主值的特征方程为

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = \lambda^3 - \frac{a^2}{4} \lambda = 0$$

可解得
$$\lambda_1 = \frac{a}{2}, \lambda_2 = -\frac{a}{2}, \lambda_3 = 0$$

因此, 在主轴坐标系中变形速度张量的标准形式为

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第四节 应力张量

本节主要分析作用在所研究流体上的力及其性质。

一、质量力和表面力

在运动流体中取一封闭的曲面, 其界面为 A , 体积为 V , 如图 1-5 (a) 所示, 则作用在所研究流体上的力可分为两大类, 即质量力 \vec{f} 和表面力 $\vec{\tau}$ 。

质量力对均质流体又称体积力, 它作用在流体的每个质点上, 大小与质量成正比, 是空间坐标 x, y, z 和时间 t 的函数, 可用力的分布密度矢量表示, 其定义式为

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m} = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{F}}{dV} \quad (1-37)$$

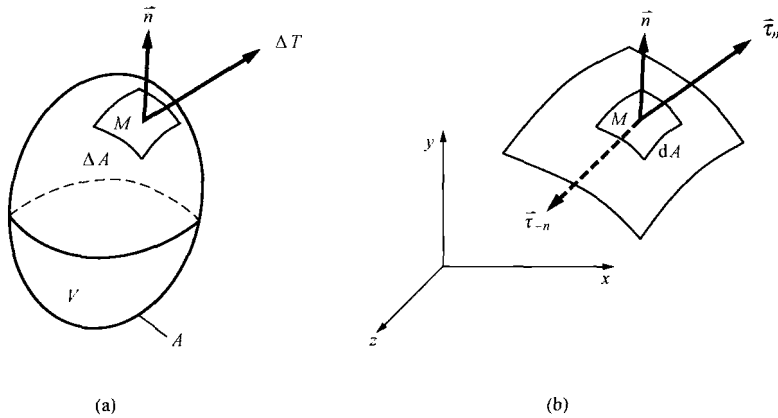


图 1-5 作用在界面上的表面力和应力

作用在有限体积 V 上的质量力为 $\iiint_V \vec{f} \rho dV$ ，则 \vec{f} 常称为作用在单位质量流体上的质量力。同样，表面力也可由其表面上的力分布密度或应力表示，即

$$\vec{\tau} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta A} = \frac{d\vec{T}}{dA} \tag{1-38}$$

式中： $\Delta \vec{T}$ 为作用在界面上包围 M 点的某一小面积 ΔA 上的力。式 (1-38) 表示作用在 M 点上以 \vec{n} 为外法线的单位面积上的表面力（即应力）。

在静止流体中，作用在单位面积上的表面力沿作用面的内法线方向，其大小与作用面所处的方位无关，即静止流体中某一点的静压强各方向均相等，只是空间坐标的函数。

对于运动的理想流体，由于忽略了黏性，因此不存在切向应力，只有垂直于作用面的法向应力（即压强），且其数值也与作用面所处的方位无关。但对于运动的黏性流体，在作用面上除法向应力外，还存在切向应力。因此在黏性流体中，应力的大小和方向不仅取决于作用面所处的方位，而且还随着空间点的不同而变化，即表示黏性流体中的应力需要两个矢量，一个是作用面的法线方向，另一个是应力本身的方向。

下面来规定作用面的法线方向和相关应力下标的定义。若微元面积 dA 是封闭曲面的一部分，则取其外法线方向为 dA 的正方向；若微元面积 dA 所处的曲面不封闭，可规定某一法线方向为正，则作用在 dA 正方向上的应力以 $\vec{\tau}_n$ 表示，反方向的应力以 $\vec{\tau}_{-n}$ 表示，如图 1-5 (b) 所示，显然有

$$\vec{\tau}_n = -\vec{\tau}_{-n} \tag{1-39}$$

在直角坐标系中，应力矢量 $\vec{\tau}_n$ 在 3 个坐标轴上的投影可分别以 τ_{nx} 、 τ_{ny} 、 τ_{nz} 表示。这样，应力分量便有两个下角标，第一个角标表示应力作用面的法线方向，第二个角标表示应力的投影方向。由于黏性的原因，应力 $\vec{\tau}_n$ 一般不垂直于作用面，它在法线方向和切线方向均有投影，称为法向应力 τ_{nn} 和切向应力 $\tau_{n\tau}$ 。另外需说明， $\vec{\tau}_n$ 没有选择指向

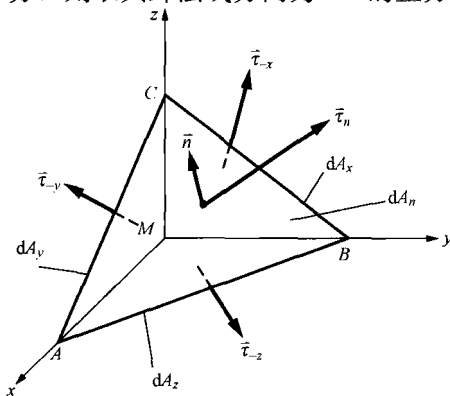


图 1-6 微元四面体的受力分析

作用面是为了讨论问题的方便，并不表明流体承受拉力。

二、应力张量

在运动的黏性流体中取四面体 $MABC$ ，如图1-6所示， M 点为3个相互垂直的微元面的交点，由于这3个面的外法线方向与坐标轴的方向相反，因此作用在其上的表面应力的下角标以负值表示。现分析该四面体的受力情况：表面力有 $\vec{\tau}_{-x} dA_x$ 、 $\vec{\tau}_{-y} dA_y$ 、 $\vec{\tau}_{-z} dA_z$ 、 $\vec{\tau}_n dA_n$ ；质量力为 $\vec{f}\rho dV$ ，惯性力为 $-\frac{d\vec{v}}{dt}\rho dV$ 。根据达朗贝尔 (D'Alembert) 原理，上述各种力应处于平衡状态。当微元四面体向 M 点收缩时，由于质量力和惯性力与表面力相比是高一阶小量，因此可不考虑其作用。该分析也说明，流体在运动时，作用在所研究微元面上的表面力的合力应保持平衡，即

$$\vec{\tau}_{-x} dA_x + \vec{\tau}_{-y} dA_y + \vec{\tau}_{-z} dA_z + \vec{\tau}_n dA_n = 0 \quad (1-40)$$

由式 (1-39)，式 (1-40) 可写成

$$\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_x \frac{dA_x}{dA_n} + \vec{\tau}_y \frac{dA_y}{dA_n} + \vec{\tau}_z \frac{dA_z}{dA_n} \quad (1-41)$$

由于 $\frac{dA_x}{dA_n} = \cos(n, x) = n_x$ ， $\frac{dA_y}{dA_n} = \cos(n, y) = n_y$ ， $\frac{dA_z}{dA_n} = \cos(n, z) = n_z$

则代入式 (1-41) 得

$$\vec{\tau}_n = n_x \vec{\tau}_x + n_y \vec{\tau}_y + n_z \vec{\tau}_z \quad (1-42)$$

在直角坐标系中则有

$$\left. \begin{aligned} \vec{\tau}_x &= \tau_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \\ \vec{\tau}_y &= \tau_{yx} \vec{i} + \tau_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} \\ \vec{\tau}_z &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \tau_{zz} \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (1-43)$$

式中： \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 为 x 、 y 、 z 轴方向上的单位矢量，于是式 (1-42) 的分量形式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{nx} &= n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} \\ \tau_{ny} &= n_x \tau_{xy} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{zy} \\ \tau_{nz} &= n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \tau_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (1-44)$$

式 (1-42) 表明，当微元四面体向 M 点收缩时，任意法线方向为 \vec{n} 的微元面积上的应力 $\vec{\tau}_n$ ，可由相交于 M 点3个互相垂直的微元面积上的应力 $\vec{\tau}_x$ 、 $\vec{\tau}_y$ 、 $\vec{\tau}_z$ 线性地表示，而 $\vec{\tau}_x$ 、 $\vec{\tau}_y$ 、 $\vec{\tau}_z$ 只取决于 M 点的坐标和时间 t ，而与 \vec{n} 无关，因此这3个应力矢量（或9个分量）的组合为

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (1-45)$$

式 (1-45) 完全描述了 M 点的应力状态， $[\tau]$ 称为应力张量。根据力矩平衡原理或应用动量矩原理，可以证明 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ， $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ， $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ，因此应力张量 $[\tau]$ 为一对称张量。它又可以写成并矢的形式

$$[\tau] = \vec{i} \vec{\tau}_x + \vec{j} \vec{\tau}_y + \vec{k} \vec{\tau}_z = \vec{e}_i \tau_{ij} \vec{e}_j \quad (1-46)$$

式中： \vec{e}_i 、 \vec{e}_j 为单位矢量， $i, j=1, 2, 3$ 时分别表示 \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 。

利用式 (1-45), 式 (1-42) 还可以写成

$$\vec{\tau}_n = \vec{n} \cdot [\tau] \quad (1-47)$$

根据张量分析, 二阶对称应力张量的 3 个法向应力之和 $\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}$ 与坐标系的选择无关, 为一张量不变量。现给出平均压强 p_m 的定义式为

$$p_m = -\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) \quad (1-48)$$

式中: “-” 表示压强的指向为作用面的内法线方向。

式 (1-48) 表明: 过一点 3 个互相垂直的微元面上, 法向应力的平均值为该点的平均压强。

现在分析平均压强 p_m 与热力学压强 p 之间的关系。对于不可压缩流体 (液体和低速运动的气体), $p_m = p$; 对于可压缩流体 (高速运动的气体), 由于 $\nabla \cdot \vec{v} \neq 0$, 因此流体的体积在运动过程中发生膨胀或压缩, 将引起平均压强 p_m 值发生 $\mu' \nabla \cdot \vec{v}$ 的变化, μ' 称为第二黏性系数。对于单原子气体在压强不太高的条件下和像空气这样的双原子气体在温度不太高的情况下, 可近似地认为 $\mu' = 0$ 。因此, 对于一般性的表达式, 式 (1-48) 需改写为

$$\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) = -p + \mu' \nabla \cdot \vec{v} \quad (1-49)$$

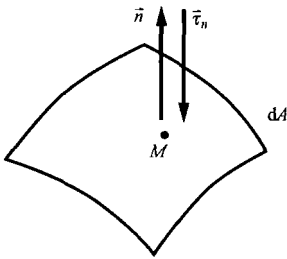


图 1-7 微元面应力分析

$\vec{\tau}_n = 0$ 。又由于流体不承受拉力, 因此法向应力只能沿作用面 dA 的内法线方向而指向作用面, 如图 1-7 所示。

由于 $\vec{\tau}_n$ 的方向与法线方向 \vec{n} 重合, 因此在直角坐标系 3 个坐标面上的应力 $\vec{\tau}_x$ 、 $\vec{\tau}_y$ 、 $\vec{\tau}_z$ 的法向应力 $\vec{\tau}_{xx}$ 、 $\vec{\tau}_{yy}$ 、 $\vec{\tau}_{zz}$ 不等于零, 而切向应力 $\vec{\tau}_{xy} = \vec{\tau}_{yz} = \vec{\tau}_{zx} = 0$ 。由式 (1-44) 可得

$$\tau_{nx} = n_x \tau_{xx}, \tau_{ny} = n_y \tau_{yy}, \tau_{nz} = n_z \tau_{zz}$$

因为 $\vec{\tau}_n$ 可写为 $\vec{\tau}_m$, 将 $\vec{\tau}_m$ 在 3 个坐标轴方向上投影, 则有

$$\tau_{nx} = n_x \tau_m, \tau_{ny} = n_y \tau_m, \tau_{nz} = n_z \tau_m$$

比较上述两组式子, 可得

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_m$$

又由于法线方向 \vec{n} 是任取的, 因此证明了在理想流体内部, 同一点上来自各个不同方向的法向应力是相等的。令这个共同的法向应力值以 p 表示, 则有

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_m = -p$$

式中: p 为理想流体中的压强, $p = p(x, y, z, t)$; p 前取负号是由于压强的作用方向与法线方向 \vec{n} 相反, 于是在理想流体中的应力张量为

$$[\tau] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p[I]$$

【例 1-2】 试证明理想流体与静止流体中的应力张量为

$$[\tau] = -p[I]$$

其中, $[I]$ 为单位张量, $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

证明 由于理想流体对切向变形没有任何抵抗能力, 因此作用在任一微元面 dA 上的应力 $\vec{\tau}_n$ 只有法向分量 $\vec{\tau}_m$, 切向分量