

2013 考研专家指导丛书

# 考研数学 历届真题 考点与题型 分类精解 (数学三)



清华大学  
北京大学  
首都师范大学

王欢  
王德军  
童武

主编



由 [ ] 的专家亲自编写，内容系统、权威  
集结历届真题，覆盖所有考点



赠送MP3盘

考研名师童武教授  
考研数学串讲视频+辅导讲义

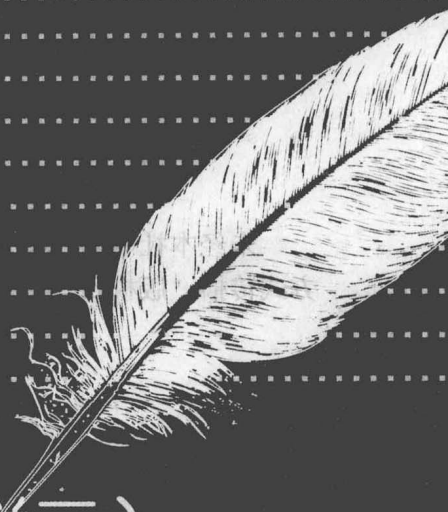
中国石化出版社

[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)

教·育·出·版·中·心

2013 考研专家指导丛书

# 考研数学 历届真题 考点与题型 分类精解 (数学三)



清华大学  
北京大学  
首都师范大学

王欢  
王德军  
童武

主编



卷的专家亲自编写，内容系统、权威  
集结历届真题，覆盖所有考点



赠送MP3盘 考研名师童武教授  
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社

[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)

教·育·出·版·中·心



**图书在版编目(CIP)数据**

考研数学历届真题考点与题型分类精解. 数学三 /  
王欢, 王德军, 童武主编. —北京: 中国石化出版社,  
2012. 2

ISBN 978-7-5114-1376-5

I. ①考… II. ①王… ②王… ③童… III. ①高等数  
学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 011586 号

未经本社书面授权, 本书任何部分不得被复制、抄袭, 或者以任何形式或任何  
方式传播。版权所有, 侵权必究。

**中国石化出版社出版发行**

地址: 北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编: 100011 电话: (010) 84271850

读者服务部电话: (010) 84289974

<http://www.sinopec-press.com>

E-mail: [press@sinopec.com](mailto:press@sinopec.com)

北京科信印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

\*

787 × 1092 毫米 16 开本 14.75 印张 368 千字

2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷

定价: 30.00 元(赠送 MP3 盘)

# 前言

中国加入 WTO 之后,改革开放逐步深化,经济发展速度日益加快,社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进,我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大,这方面的教育也在稳步发展,规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化,考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说,全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试,即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才,又有利于高等学校教学的原则,强调在考查知识的基础上,重点考查考生分析问题和解决问题的能力,并且要采用科学的办法,保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习,顺利通过数学考试、赢取高分,我们根据国家教育部制定的《考试大纲》,基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验,以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路,倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越 135 分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选 1000 题(理工类)》、《考研数学最新精选 1000 题(经济类)》、《考研数学必做客观题 1800 题精析(理工类)》、《考研数学必做客观题 1800 题精析(经济

类)》、《考研数学必做主观题 600 题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题 600 题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

### 1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

### 2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

### 3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编者

# 目 录

## 第一篇 1997 ~ 2012 年考研数学三试题分类解析

|      |                   |       |
|------|-------------------|-------|
| 第一部分 | 微积分 .....         | (3)   |
| 第一章  | 函数、极限、连续 .....    | (3)   |
| 第二章  | 一元函数微分学 .....     | (14)  |
| 第三章  | 一元函数积分学 .....     | (35)  |
| 第四章  | 多元函数微分学 .....     | (50)  |
| 第五章  | 重积分 .....         | (61)  |
| 第六章  | 无穷级数 .....        | (73)  |
| 第七章  | 常微分方程 .....       | (84)  |
| 第二部分 | 线性代数 .....        | (91)  |
| 第一章  | 行列式 .....         | (91)  |
| 第二章  | 矩阵 .....          | (93)  |
| 第三章  | 向量 .....          | (102) |
| 第四章  | 线性方程组 .....       | (110) |
| 第五章  | 特征值与特征向量 .....    | (121) |
| 第六章  | 二次型 .....         | (133) |
| 第三部分 | 概率论与数理统计 .....    | (143) |
| 第一章  | 随机事件与概率 .....     | (143) |
| 第二章  | 随机变量及其分布 .....    | (147) |
| 第三章  | 多维随机变量及其分布 .....  | (152) |
| 第四章  | 随机变量的数字特征 .....   | (164) |
| 第五章  | 大数定律与中心极限定理 ..... | (176) |
| 第六章  | 数理统计的基本概念 .....   | (178) |
| 第七章  | 参数估计 .....        | (185) |

## 第二篇 2003 ~ 2012 年考研数学三试题

|                                |       |
|--------------------------------|-------|
| 2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ..... | (193) |
| 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ..... | (196) |
| 2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ..... | (200) |
| 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ..... | (203) |
| 2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ..... | (207) |
| 2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ..... | (211) |
| 2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ..... | (214) |
| 2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ..... | (218) |
| 2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ..... | (221) |
| 2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ..... | (224) |

# **第一篇**

## **1997 ~ 2012 年考研 数学三试题分类解析**





# 第一部分 微积分

## 第一章 函数、极限、连续

### 考点1 函数的概念及其特征

(2004 年试题,二) 函数  $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$  在下列哪个区间内有界? ( )

- (A)  $(-1, 0)$  (B)  $(0, 1)$  (C)  $(1, 2)$  (D)  $(2, 3)$

【考点】 函数的极限、有界性

【解析】 本题考查函数极限与有界性的关系: 当  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  时, 则  $f(x)$  在  $x_0$  的邻域内无界. 由题设,

$$f(-1^+) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 3}{18}, \quad (1)$$

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 2}{4}, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty, \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty \quad (4)$$

由(1)~(4)式可知,  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$  内  $f(x)$  都是无界的, 所以选(A).

【评注】 一般地, 如果  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

### 考点2 极限概念与性质

1. (2012 年试题, 三)

计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$ .

【考点】 求极限

【解析】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} \cdot \frac{1 - e^{2-2\cos x - x^2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(e^{2-2\cos x - x^2} - 1)}{x^4}$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(2 - 2\cos x - x^2)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2} = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

2. (2007 年试题,二) 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【考点】 求极限

【解析】 因  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2^x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{2^x (\ln 2)^3} = 0$ , 且  $\sin x$  和  $\cos x$  均为有界函数, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = 0$$

3. (2000 年试题,二) 设对任意的  $x$ , 总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  ( ).

(A) 存在且等于零

(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在

(D) 不一定存在

【考点】 函数的极限

【解析】 本题可采取举反例的方法——排除干扰项.

令  $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2 + 1}$ ,  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x + \frac{1}{x^2 + 1}$ , 则  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0,$$

但  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不存在, 从而可排除 (A), (B);

又令

$$\varphi(x) = \arctan(|x| - 1), \quad f(x) = \arctan |x|, \quad g(x) = \arctan(|x| + 1),$$

则  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ ,

因此 (C) 也可排除. 综上,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  可能存在也可能不存在, 所以选 (D).

【评注】 本题考查了极限的夹逼定理, 但注意,  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 不能推出  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$  存在且相等.

### 考点 3 函数极限的计算

求未定式  $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0\right)$  的极限

1. (2012 年试题,二)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【考点】 求极限



【解析】 由于  $(\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = \exp\left[\frac{1}{\cos x - \sin x} \ln(\tan x)\right]$ , 而  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\cos x - \sin x} \xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0} \text{ 型}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x}{-\sin x - \cos x}$   
 $= -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sin x + \cos x) \tan x \cos^2 x} = -\sqrt{2}$ . 因此, 原极限值  $= e^{-\sqrt{2}}$ .

2. (2011 年试题, 三) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$ .

【考点】 极限的计算无穷小量替换

【解析】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - (x+1)}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2\sin x - x^2 - 2x - 1}{x^2 [\sqrt{1+2\sin x} + (x+1)]}$   
 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - 2x - x^2}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

3. (2011 年试题, 二) 设  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$ , 则  $f'(x) =$  \_\_\_\_\_.

【考点】 求一元函数的导数

【解析】 先求出  $f(x)$  的表达式

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}} = x \lim_{t \rightarrow 0} [(1+3t)^{\frac{1}{3t}}]^{3x} = xe^{3x},$$

$$\text{则 } f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (1+3x)e^{3x}$$

4. (2010 年试题, 15) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

【考点】 函数的极限

【解析一】 原式  $= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}} - 1} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}}$   
 $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x(e^{\frac{1}{x}} - 1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x \cdot (\frac{1}{x})}} \quad (\text{利用 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } e^x - 1 \sim x)$   
 $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{\ln x}} = e^{-1}$

【解析二】 设  $f(x) = (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$ , 则  $\ln f(x) = \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{\frac{1}{x}})' }{\frac{1}{x}(x^{\frac{1}{x}} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln x}{x}})' }{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{\frac{\ln x}{x}} (\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2})}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1-\ln x}{x}}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)'}{\left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x - 2}{x^2}}{e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 2}{1 - \ln x} = -1
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$$

【评注】解法二比解法一要复杂些,可见在求极限的过程中,能用无穷小代换的项,尽量先代换了再求解。

5. (2010 年试题,4) 设  $f(x) = \ln^{10} x$ ,  $g(x) = x$ ,  $h(x) = e^{\frac{x}{10}}$ , 则当  $x$  充分大时有 ( ).

- (A)  $g(x) < h(x) < f(x)$  (B)  $h(x) < g(x) < f(x)$   
(C)  $f(x) < g(x) < h(x)$  (D)  $g(x) < f(x) < h(x)$

【考点】无穷大的比较

$$\begin{aligned}
 \text{【解析】} \quad &\text{因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 \cdot \ln^9 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^9 x}{x} \\
 &= 10 \cdot 9 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^8 x}{x} = \cdots = 10! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0
 \end{aligned}$$

所以,当  $x$  充分大时,  $f(x) < g(x)$ .

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{10}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{10} e^{\frac{x}{10}}}{1} = \frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{10}} \rightarrow +\infty,$$

故当  $x$  充分大时,  $h(x) > g(x)$ .

综上可得,当  $x$  充分大时,  $f(x) < g(x) < h(x)$ , 故正确答案为 (C).

$$\begin{aligned}
 \text{【评注】} \quad &\text{也可以这么做: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\frac{10}{\sqrt{x}}} \right)^{10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{10} x^{-\frac{9}{10}}} \right)^{10} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{10 \sqrt{x}} = 0.
 \end{aligned}$$

$$6. (2009 \text{ 年试题,二}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【考点】求函数的极限

$$\begin{aligned}
 \text{【解析】} \quad &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\cos x - 1}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} \\
 &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{3} x^2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2} \\
 &= \frac{3}{2}e
 \end{aligned}$$

7. (2008 年试题, 15) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$ .

【考点】 求函数的极限

【解析一】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left( 1 + \frac{\sin x - x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

【解析二】 由洛必达法则得

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

8. (2005 年试题, 15) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$ .

【考点】 洛必达法则求极限

【解析一】 由洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{1} = 1,$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1,$$

所以

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x) - 1 + e^{-x}}{x(1 - e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(1 - e^{-x})} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1 + e^{-x}}{x(1 - e^{-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{-x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{2x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

【解析二】 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x(1+x)}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x - 1)e^x + 1}{x(e^x - 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x - 1)e^x + 1}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 1 + 2x + 1}{x} e^x$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) = \frac{3}{2}$$

【评注】 本题应用了等价无穷小代换  $e^x - 1 \sim x$ .





9. (2005 年试题,一) 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【考点】 求极限

【解析】 令  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin y = \lim_{x \rightarrow \infty} x y \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin y}{y} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

10. (2004 年试题,三(1)) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$ .

【考点】 洛必达法则、等价无穷小

【解析一】 由题设,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (\sin x \cos x)^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4}(\sin 2x)^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x \cos 2x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{2} \sin 4x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{4}{2} \cos 4x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin 2x)^2}{6x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【解析二】 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x (1 - \sin^2 x)}{x^4} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \right)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} + 1 \\ &= 1 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

【评注】 此类求极限的题目一般先尽可能用无穷小等价代换进行简化,此题用到了  $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ . 但是在用无穷小等价代换时应注意:必须是“整体”代换,即乘除项可以直接代换,加减项化成乘除项才能代换.

## 考点 4 函数极限的逆问题

1. (2010 年试题,1) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$ , 则  $a$  等于( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【考点】 函数的极限

【解析】 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - e^x}{x} + a e^x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} (a e^x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-e^x) + a = a - 1 = 1$$



所以  $a=2$ , 即正确答案为 (C).

2. (2004 年试题, 一) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【考点】 函数的极限

【解析】 由题设, 知  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$ , 则  $a = 1$ ,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = 1 - b = 5,$$

则  $b = -4$

## 考点 5 数列的极限

1. (2006 年试题, 一) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【考点】 数列的极限

【解析一】 令  $u_n = \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

当  $n = 2k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) 时,

$$u_n = \left( \frac{2k+1}{2k} \right)^1 = 1 + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{n};$$

当  $n = 2k-1$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) 时,

$$u_n = \left( \frac{2k}{2k-1} \right)^{-1} = \frac{2k-1}{2k} = 1 - \frac{1}{2k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ .

【解析二】 原式  $= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = e^0 = 1$

2. (2002 年试题, 一) 设常数  $a \neq \frac{1}{2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[ \frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【考点】 数列的极限

【解析】 由题设,

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left[ 1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(1-2a)} = \frac{1}{1-2a}$$

## 考点 6 无穷小量的比较

1. (2011 年试题, 一) (1) 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$  与  $cx^k$  是等价无穷小, 则 ( ).

(A)  $k = 1, c = 4$

(B)  $k = 1, c = -4$

(C)  $k = 3, c = 4$

(D)  $k = 3, c = -4$



**【考点】** 无穷小比较

**【解析】** 根据泰勒展式,有:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin x - \sin 3x \\ &= 3\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right] - \left[3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)\right] \\ &= \frac{(3x)^3}{3!} - 3\frac{x^3}{3!} + o(x^3) = 4x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

故  $c = 4, k = 3$ , 故选(C).

**【评注】** 本题还可以这样做:

因  $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$  与  $cx^k$  题等阶无穷小

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{cx^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x - 3\cos 3x}{kcx^{k-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - 9\sin 3x}{k(k-1)cx^{k-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{27-3}{k(k-1)(k-2)cx^{k-3}} = 1 \end{aligned}$$

即得  $k = 3, c = 4$

2. (2009 年试题,一) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$  为等价无穷小, 则 ( ).

- (A)  $a = 1, b = -\frac{1}{6}$  (B)  $a = 1, b = \frac{1}{6}$   
(C)  $a = -1, b = -\frac{1}{6}$  (D)  $a = -1, b = \frac{1}{6}$

**【考点】** 等价无穷小的运用

**【解析】**  $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$  为等价无穷小, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a\cos ax}{-3bx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cdot ax}{-6bx} = \frac{a^3}{-6b} = 1, \end{aligned}$$

即有  $a^3 = -6b$ . 又  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a\cos ax}{-3bx^2}$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - a\cos ax) = 1 - a = 0$ , 即  $a = 1$ . 代入上式可得

$b = -\frac{1}{6}$ . 故正确答案为(A).

3. (2007 年试题,一) 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是 ( ).

- (A)  $1 - e^{\sqrt{x}}$  (B)  $\ln(1 + \sqrt{x})$  (C)  $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$  (D)  $1 - \cos \sqrt{x}$

**【考点】** 等价无穷小

**【解析】** 常用的等价无穷小(当  $x \rightarrow 0$  时)有:  $e^x - 1 \sim x, \ln(1 + x) \sim x, \sqrt{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{2}, 1 -$