考研数学一

提高与冲刺

陈启浩　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学一
提高与冲刺

陈启浩　编著

机械工业出版社

本书帮助考研的同学利用好最后三个多月的复习时间，有效掌握一些数学方法和技巧，提高解题速度和正确率.

本书分为两篇，第一篇为近三年真题的解题方法示范；第二篇为快捷解题方法，包含了有关高等数学、线性代数和概率论与数理统计的116种解题方法技巧.

本书适合参加硕士生入学考试考数学一的同学阅读，需要同学们至少经过一轮基础知识复习.

图书在版编目（CIP）数据

考研数学（一）提高与冲刺/陈启浩编著.—北京：机械工业出版社，2011.10

ISBN 978-7-111-36097-1

Ⅰ.①考… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第207528号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 昔玉花
责任校对：张 媛 封面设计：路恩中 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2012年1月第1版第1次印刷
184mm×260mm·30.75印张·761千字
标准书号：ISBN 978-7-111-36097-1
定价：55.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销售一部：（010）68326294
销售二部：（010）88379649
读者购书热线：（010）88379203

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

前　　言

本书帮助考研的同学利用好最后三个多月的复习时间，有效掌握一些数学方法和技巧，提高解题速度和正确率．

本书分为两篇，第一篇是2009年、2010年和2011年三年真题的解答，重在解法．同学们通过这一篇的阅读，可再次把握考研数学考题的难易程度，通过对比作者给出的解法和自己的解法，体会方法和技巧对解题的重要性，检测自己对知识的融会领悟的程度，并依此酌情安排第二篇内容的阅读．第二篇是116种快捷解题方法．每天安排学习3种方法，可用一个月左右学完本书．每种方法后都配有例题和练习，只要同学们认真理解，很容易学会这些方法和技巧．

作者仔细梳理过近十五年的考研题目，发现每年近一半的题目是基本题目，一般考生都能拿到分数．另外一半有一定难度的题目，往往可用教科书上的一般解题思路和方法，但比较麻烦、绕远，原因是教科书是为初学者所写，前后融会往往不足．教科书上的方法之外，有很多更省时、更清晰的解题方法，只是需要前后联系，利用好已经学过但还没有意识到能如此应用的定理和性质．有的难题若在平时注意多总结一些常见的情况和对策，解法也会变得明朗．

作者汇集在多年教学中揣摩和总结的解题方法，针对在考研复习培训中发现的同学们普遍需要解决的问题，编成本书，希望对考研的同学有所帮助．

本书适合考数学一的同学阅读，需要同学们至少经过一轮基础知识复习．

祝同学们取得好的成绩！

北京邮电大学　陈启浩

目　　录

第一篇　考研真题(数学一)与解答

这里给出2009—2011年全国硕士生入学考试题及其解答，其中许多试题的解答都使用了第二篇中所述的快捷解题方法. 因此阅读本篇将使你初步领略快捷解题方法的优点，也使你经历一次快捷解题方法的训练.

每道试题的解答都由【精解】与【附注】组成.

【精解】中，给出了该道试题清晰、精确的解答，并蕴含解题的技巧性.

【附注】中，除基本题(即可利用基本概念、基本理论和基本计算方法直接求解的问题)外，都指明问题是按第二篇中的哪一个快捷解题方法求解的.

A. 2009年真题与解答

一、选择题：第1~8小题，每小题4分，共32分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合试题要求.

1. 当$x\to 0$时，$f(x)=x-\sin ax$，$g(x)=x^2\ln(1-6x)$是等价无穷小，则

(A) $a=1$，$b=-\frac{1}{6}$.　　(B) $a=1$，$b=\frac{1}{6}$.

(C) $a=-1$，$b=-\frac{1}{6}$.　　(D) $a=-1$，$b=\frac{1}{6}$.

【精解】 先考察选项A：

当$a=1$，$b=-\frac{1}{6}$时，由于

$$f(x)=x-\sin x=x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right)=\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\sim\frac{1}{6}x^3(x\to 0),$$

$$g(x)=x^2\ln\left(1+\frac{1}{6}x\right)\sim x^2\cdot\frac{1}{6}x=\frac{1}{6}x^3(x\to 0),$$

所以，$f(x)\sim g(x)(x\to 0)$.

因此，本题选A.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法003分别寻找$x\to 0$时$f(x)$和$g(x)$的等价无穷小，从而判定选项A是正确的.

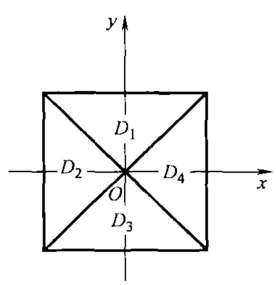

图 A-1

2. 如图A-1，正方形$\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$被其对角线划分为四个区域$D_k$，$I_k=\iint\limits_{D_k}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k=1,2,3,4)$，则$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$

(A) I_1.　(B) I_2.　(C) I_3.　(D) I_4.

【精解】 由于在D_1上，$y\cos x\geqslant 0$(仅在点(0, 0)处取等号)，

所以 $I_1=\iint\limits_{D_1} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$. 由于 D_2 关于 x 轴对称，$y\cos x$ 在对称点处的值互为相反数，所以，$I_2=\iint\limits_{D_2} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 同样，$I_4=\iint\limits_{D_4} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

由于在 D_3 上 $y\cos x\leqslant 0$（仅在点(0, 0)处取等号），所以 $I_3=\iint\limits_{D_3} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0$.

从而　$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=I_1$.

因此，本题选 A.

【附注】　本题的 $I_2=I_4=0$ 是按第二篇快捷解题方法 054 计算得到的；$I_1>0$ 与 $I_3<0$ 是按第二篇快捷解题方法 057 判断的.

3. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图 A-2 所示，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为

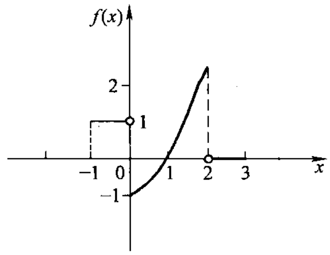

图　A-2

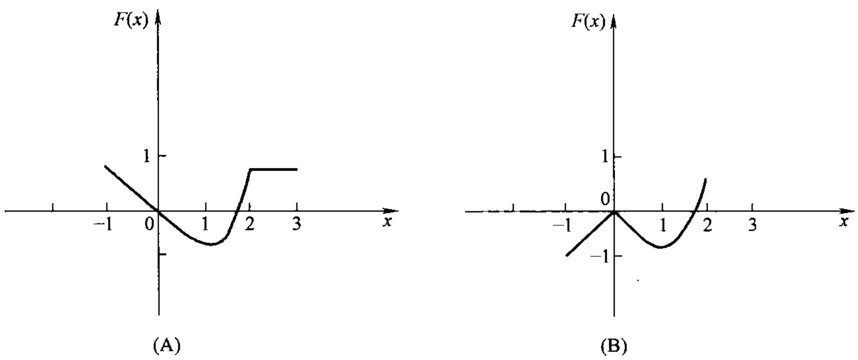

图　A-3

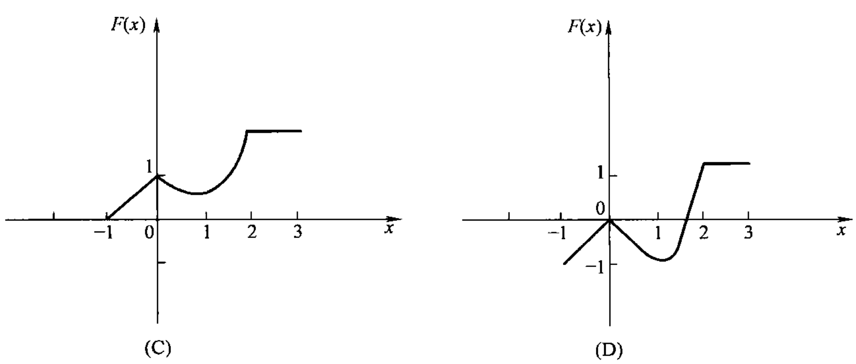

图　A-4

【精解】　由于当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \mathrm{d}t=x\leqslant 0$，所以应排除选项 A, C.

由于当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^2 f(t)\,dt+\int_2^x 0\,dt=\int_0^2 f(t)\,dt\neq 0$（因为图 A-2 中，在[0，1]下方图形的面积与[1，2]上方图形的面积不相等），所以应排除选项 B.

因此，本题选 D.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 038 间接地判断选项 D 是正确的.

4．设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则

（A）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

（B）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散.

（C）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛.

（D）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 发散.

【精解】 考虑选项 C.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 知存在 $M>0$，使得 $|a_n|\leqslant\sqrt{M}(n=1,2,\cdots)$；又由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛知存在正整数 $N>0$，使得 $b_n^2\leqslant|b_n|\ (n>N)$. 于是有

$$a_n^2b_n^2\leqslant M|b_n|\ (n\geqslant N).$$

从而由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛知正项级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛，即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛.

因此，本题选 C.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 073 判断的.

5．设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为

（A）$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.　　（B）$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.　　（D）$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

【精解】 由于 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\ \frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$，所以过渡

矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.

因此，本题选 A.

【附注】　本题是基本题，只要记住向量空间中两个基之间的过渡矩阵计算公式即可判断本题.

6. 设矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为2阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$分别为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的伴随矩阵. 若$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

【精解】　$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\\|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

因此，本题选 B.

【附注】　本题是按第二篇快捷解题方法 086 计算判断的.

7. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数，则$E(X)=$

(A) 0.　　(B) 0.3.　　(C) 0.7.　　(D) 1.

【精解】　记X的概率密度为$f(x)$，又设X_1，X_2的分布函数分别为$\Phi(x)$与$\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，则$x_1\sim N(0,1)$，$x_2\sim N(1,2^2)$. 于是

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F(x)=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}\Phi(x)+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)\\&=0.3E(X_1)+0.7E(X_2)=0.3\times0+0.7\times1=0.7.\end{aligned}$$

因此，本题选 C.

【附注】　本题是按第二篇快捷解题方法 112 计算判断的.

8. 设随机变量X与Y相互独立，且X服从标准正态分布$N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 记$F_Z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则函数$F_Z(z)$的间断点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【精解】　由于
$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}\\&=P\{Y=0\}P\{XY\leqslant z\mid Y=0\}+P\{Y=1\}P\{XY\leqslant z\mid Y=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{X\cdot0\leqslant z\mid Y=0\}+\frac{1}{2}P\{X\cdot1\leqslant z\mid Y=1\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}[P\{0 \leqslant z\} + P\{X \leqslant z\}]（利用 X 与 Y 相互独立）$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(z) & z < 0, \\ \frac{1}{2}[1+\Phi(z)] & z \geqslant 0 \end{cases}（其中 \Phi(x) 是 X 的分布函数）$$

$$= \frac{1}{2}\Phi(z) + \begin{cases} 0 & z < 0, \\ \frac{1}{2} & z \geqslant 0. \end{cases}$$

所以，$F_Z(z)$仅有一个间断点 $z=0$.

因此，本题选 B.

【附注】 本题按第二篇快捷解题方法 105 计算 $F_Z(z)$，并由此判断选项 B 正确.

二、填空题：第 9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 设函数$f(u, v)$具有二阶连续偏导数，$z=f(x, xy)$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$________.

【精解】 由$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u'+f_v'\cdot y$(其中 $u=x, v=xy$)得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{uv}'' \cdot x + f_{vv}''xy + f_v'.$$

【附注】 本题是基本题.

10. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2$，$y'(0)=0$ 的解为 $y=$________.

【精解】 由 $y''+ay'+by=0$ 的通解为$(C_1+C_2x)e^x$ 知特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 有重根 $\lambda=1$，由此得 $a=-(1+1)=-2$，$b=1\cdot 1=1$. 于是所给的非齐次线性微分方程为

$$y''-2y'+y=x. \tag{1}$$

由于式(1)有特解 $x+2$，从而其通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^x+x+2, \tag{2}$$

且

$$y'=(C_1+C_2+C_2x)e^x+1. \tag{3}$$

将 $y(0)=2$，$y'(0)=0$ 代入式(2)、式(3)得

$$\begin{cases} 2=C_1+2, \\ 0=C_1+C_2+1, \end{cases} 即 C_1=0, C_2=-1.$$

将它们代入式(2)得

$$y=-xe^x+x+2.$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 080 计算的.

11. 已知曲线 L：$y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，则 $\int_L x\mathrm{d}s=$________.

【精解】 L 的参数方程为$\begin{cases} x=t, \\ y=t^2 \end{cases}(0\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，所以

$$\int_L x\mathrm{d}s = \int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{(x')^2+(y')^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{1+4t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4t^2}\mathrm{d}(1+4t^2)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{12}(27-1) = \frac{13}{6}.$$

【附注】 本题是基本题.

12. 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ ________.

【精解】 由 Ω 的对称性知

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

所以，$\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$\xlongequal{\text{球面坐标}} \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\pi}{3}\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\pi}{3}\times 2\times\frac{1}{5} = \frac{4}{15}\pi.$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 058 计算的.

13. 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________.

【精解】 记矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的对应特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}$，即

$$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$$

则
$$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}),\text{即}\,\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = \lambda^2\boldsymbol{\xi}.$$

于是，由 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$ 得

$$2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = \lambda^2\boldsymbol{\xi},\text{即}\,2\lambda\boldsymbol{\xi} = \lambda^2\boldsymbol{\xi}.$$

由此可知，λ 满足 $2\lambda=\lambda^2$，即 $\lambda=0$，2. 因此，$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为 $\lambda=2$.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 095 求解的.

14. 设 X_1，X_2，…，X_m 为来自二项分布总体 $B(n,\ p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$________.

【精解】 由题设知

$$E(\overline{X}-kS^2) = np^2,\ \text{即}\ E(\overline{X})+kE(S^2) = np^2. \tag{1}$$

由于 $X\sim B(n,\ p)$，所以，$E(\overline{X})=np$，$E(S^2)=np(1-p)$. 将它们代入式(1)得

$$np+k\cdot np(1-p) = np^2,\ \text{即}\ k=-1.$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 115 计算的.

三、解答题：第 15 ~ 23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本题满分 9 分）

求二元函数 $f(x,y) = x^2(2+y^2) + y\ln y$ 的极值．

【精解】 $f(x,y)$ 的定义域为 $-\infty < x < +\infty$，$y>0$．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2+y^2),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 1 + \ln y.$$

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x(2+y^2) = 0,\\ 2x^2y + 1 + \ln y = 0\end{cases}$ 得唯一可能极值点 $x=0$，$y=\dfrac{1}{e}$．

由于 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,\frac{1}{e})} = 2(2+y^2)\Big|_{y=\frac{1}{e}} = 2\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right) > 0$，

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\Bigg|_{(0,\frac{1}{e})} = \left[(4xy)^2 - 2(2+y^2)\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\right]\Bigg|_{(0,\frac{1}{e})} = -2e\left(2+\frac{1}{e^2}\right) < 0,$$

所以，$f(x,y)$ 仅有极小值 $f\left(0,\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$，无极大值．

【附注】 本题是基本题，但应熟练掌握二元函数极值的计算方法．

16.（本题满分 9 分）

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积，记 $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$，求 S_1 与 S_2 的值．

【精解】 由于 $a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}(n=1,2,\cdots)$，所以

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

$\Bigg($由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛，收敛级数可以任意加括号，因此有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}\Bigg)$

$$= -\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} + 1 = -\ln(1+x)\Big|_{x=1} + 1 = 1 - \ln 2.$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 077 计算的．

17.（本题满分 11 分）

椭球面 S_1 是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成,圆锥面 S_2 是由过点(4,0)且与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(Ⅰ) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(Ⅱ) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

【精解】 (Ⅰ) S_1 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$.

设过点(4,0)与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线为 l. 记其切点为(x_0,y_0),则 l 的方程为

$$\frac{xx_0}{4}+\frac{yy_0}{3}=1. \tag{1}$$

于是,x_0,y_0 满足

$$\begin{cases}\frac{4x_0}{4}+\frac{0\cdot y_0}{3}=1,\\ \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1,\end{cases} \text{即 } x_0=1,\ y_0=\pm\frac{3}{2}.$$

将它们代入式(1)得 l 的方程为$\frac{x}{4}\pm\frac{y}{2}=1$. 因此 S_2 的方程为

$$\frac{x}{4}\pm\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{2}=1, \text{ 即 } \frac{(x-4)^2}{4}=y^2+z^2.$$

(Ⅱ) S_1 与 S_2 之间的立体是由图 A-5 阴影部分绕 x 轴旋转而成的旋转体,所以,所求体积为

$$V=2\pi\int_0^{\frac{3}{2}}y\left[(4-2y)-2\sqrt{1-\frac{y^2}{3}}\right]dy$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{3}{2}}\left(4y-2y^2-2y\sqrt{1-\frac{y^2}{3}}\right)dy$$

$$=2\pi\left[2y^2-\frac{2}{3}y^3+2\left(1-\frac{y^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=2\pi\left[\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\right)-2\right]=\pi.$$

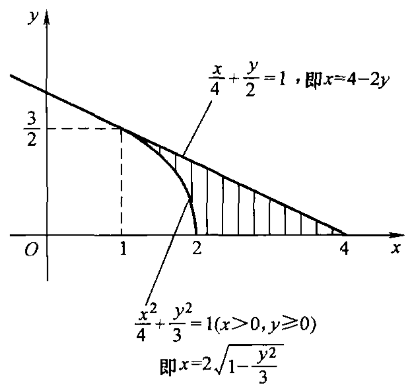

图 A-5

【附注】 本题(Ⅰ)是基本题;(Ⅱ)是按第二篇快捷解题方法 045 计算的.

18. (本题满分 11 分)

(Ⅰ) 证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ) 证明:若函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,在$(0,\delta)$ $(\delta>0)$内可导,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

【精解】 (Ⅰ) 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)(=f(a))$. 所以由罗尔定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

（Ⅱ）由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(\xi)x}{x}(\xi\in(0,x))$

（这是由于 $f(t)$ 在 $[0,x]$（$x\in(0,\delta)$）上连续，在 $(0,x)$ 内可导，所以由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(0,x)$，使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$）

$=\lim\limits_{\xi\to0^+}f'(\xi)=A$，

所以，$f'_+(0)\left(=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right)$ 存在且为 A.

【附注】 本题（Ⅰ）是拉格朗日中值定理的证明. 它表明，对于高等数学中的重要定理，也应掌握它的证明.（Ⅱ）是基本题，由右导数的定义并应用（Ⅰ）中证明的定理即可推得结论.

19.（本题满分 10 分）

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

【精解】 记 $\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$（内侧）（$\varepsilon$ 是充分小的正数，使 Σ_1 位于 Σ 之内），$\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon$，$\Omega$ 是由 $\Sigma+\Sigma_1$ 围成的立体，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\tag{1}$$

其中，$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\right\}\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}v=0,\tag{2}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1^-}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（其中 Σ_1^- 表示外侧曲面 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$）

$$\xlongequal{\text{高斯公式}}-\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega_1}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=-\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot3\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$$

$$=-4\pi.\tag{3}$$