

考研

数学一

提高与冲刺

陈启浩 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考 研 数 学 一 提 高 与 冲 刺

陈启浩 编著



机械工业出版社

本书帮助考研的同学利用好最后三个多月的复习时间,有效掌握一些数学方法和技巧,提高解题速度和正确率.

本书分为两篇,第一篇为近三年真题的解题方法示范;第二篇为快捷解题方法,包含了有关高等数学、线性代数和概率论与数理统计的 116 种解题方法技巧.

本书适合参加硕士生入学考试考数学一的同学阅读,需要同学们至少经过一轮基础知识复习.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学(一)提高与冲刺/陈启浩编著. —北京:机械工业出版社, 2011. 10

ISBN 978-7-111-36097-1

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 207528 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 昔玉花

责任校对:张媛 封面设计:路恩中 责任印制:乔宇

北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2012 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·30.75 印张·761 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-36097-1

定价:55.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010) 68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010) 88379649

读者购书热线:(010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

前 言

本书帮助考研的同学利用好最后三个多月的复习时间，有效掌握一些数学方法和技巧，提高解题速度和正确率。

本书分为两篇，第一篇是2009年、2010年和2011年三年真题的解答，重在解法。同学们通过这一篇的阅读，可再次把握考研数学考题的难易程度，通过对比作者给出的解法和自己的解法，体会方法和技巧对解题的重要性，检测自己对知识的融会领悟的程度，并依此酌情安排第二篇内容的阅读。第二篇是116种快捷解题方法。每天安排学习3种方法，可用一个月左右学完本书。每种方法后都配有例题和练习，只要同学们认真理解，很容易学会这些方法和技巧。

作者仔细梳理过近十五年的考研题目，发现每年近一半的题目是基本题目，一般考生都能拿到分数。另外一半有一定难度的题目，往往可用教科书上的一般解题思路和方法，但比较麻烦、绕远，原因是教科书是为初学者所写，前后融会往往不足。教科书上的方法之外，有很多更省时、更清晰的解题方法，只是需要前后联系，利用好已经学过但还没有意识到能如此应用的定理和性质。有的难题若在平时注意多总结一些常见的情况和对策，解法也会变得明朗。

作者汇集在多年教学中揣摩和总结的解题方法，针对在考研复习培训中发现的同学们普遍需要解决的问题，编成本书，希望对考研的同学有所帮助。

本书适合考数学一的同学阅读，需要同学们至少经过一轮基础知识复习。

祝同学们取得好的成绩！

北京邮电大学 陈启浩

目 录

前言

第一篇 考研真题（数学一）与解答

A. 2009 年真题与解答	1
B. 2010 年真题与解答	13
C. 2011 年真题与解答	25

第二篇 快捷解题方法

A. 高等数学	37
第一章 一元函数微分学	37
001 数列单调性的快捷判别法	37
002 由数列极限定义的函数表达式的快捷算法	41
003 等价无穷小的快捷寻找法	44
004 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限的快捷算法	49
005 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的快捷算法	54
006 $x \rightarrow \infty$ 时, $\infty - \infty$ 型未定式极限的快捷算法	55
007 $0 \cdot \infty$ 型未定式极限的快捷算法	58
008 曲线的非铅直渐近线的快捷算法	62
009 分段函数导数的快捷算法	64
010 形如 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{g(v(x)) - g(v(x_0))}$ 的 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限的快捷算法	70
011 函数 $g(x) f(x) $ 不可导点的快捷算法	72
012 反函数不可导点的快捷算法	74
013 初等函数导数的快捷算法	75
014 初等函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的高阶导数 $f^{(n)}(x_0)$ 的快捷算法	77
015 初等函数高阶导数的快捷算法	82
016 平面曲线切线的快捷算法	85
017 存在 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	88
018 存在 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	90
019 存在 ξ , 使得 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$ 的有关命题的快捷证明法 (I)	92
020 存在 ξ , 使得 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$ 的有关命题的快捷证明法 (II)	95
021 存在 ξ , 使得 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi), f''(\xi)) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	98
022 存在 ξ , 使得 $f''(\xi) \leq k$ (常数) 的有关命题的快捷证明法	101
023 恒等式的快捷证明法	103
024 分段函数极值的快捷算法	105
025 函数最值的快捷算法	108

026	由函数图像确定导函数图像或由导函数图像确定函数性态的快捷方法	111
027	函数不等式的快捷证明法	114
028	方程 $f(x) = 0$ 实根个数的快捷判定法	119
第二章	一元函数积分学	123
029	计算不定积分时, 变量代换的快捷选定法	123
030	利用分部积分快捷计算不定积分方法	128
031	真分式不定积分的快捷算法	132
032	通过配置 $\int g(x) dx$, 快捷计算不定积分 $\int f(x) dx$ 的方法	137
033	不定积分 $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$ 的快捷算法	140
034	巧用换元积分法与分部积分法计算定积分的快捷方法	144
035	利用被积函数奇偶性和周期性快捷计算定积分方法	147
036	定积分值所在范围的快捷估计法	151
037	积分上限函数导数的快捷算法	155
038	被积函数为分段函数的积分上限函数表达式的快捷算法	158
039	卷积型积分的快捷算法	164
040	利用定积分快捷计算和式极限方法	169
041	在包含有 $f(x)$ 的定积分的条件下, 存在 ξ , 使得 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	172
042	存在 ξ , 使得 $G(\xi, f(\xi), \int_a^\xi f(t) dt) = 0$ 的有关命题的快捷证明法	175
043	定积分不等式的快捷证明法	177
044	平面图形面积的快捷算法	182
045	X 型 (或 Y 型) 平面图形 D 绕平行于 x 轴 (或 y 轴) 但不穿过 D 的直线旋转一周而成的旋转体体积的快捷算法	186
046	立于斜轴上的曲边梯形旋转一周而成的旋转体体积的快捷算法	189
第三章	多元函数微分学	192
047	二重极限不存在的快捷判别法	192
048	二元函数可微性的快捷判别法	194
049	二元函数偏导数与二阶偏导数的快捷算法	197
050	由 $z = z(x, y)$ 的全微分计算 $z = z(x, y)$ 的快捷方法	202
051	曲面切平面的快捷算法	205
052	二元函数条件极值的快捷算法	208
053	有界闭区域上二元连续函数最值的快捷算法	214
第四章	多元函数积分学	218
054	二重积分的快捷算法	218
055	卷积型二重积分的快捷算法	222
056	变积分区域上二重积分的快捷算法	224
057	二重积分取值范围的快捷估计法	226
058	三重积分的快捷算法	228
059	二次积分积分次序的快捷更换法	233
060	与旋转轴异面的线段所产生的旋转曲面方程与相关旋转体体积的快捷算法	238
061	空间曲线参数化的快捷方法	240

062	关于弧长的曲线积分的快捷算法	243
063	关于坐标的平面曲线积分的快捷算法	248
064	关于坐标的空间曲线积分的快捷算法	256
065	两类曲线积分的快捷转换法	262
066	关于面积的曲面积分的快捷算法	265
067	关于坐标的曲面积分的快捷算法	269
068	两类曲面积分的快捷转换法	279
069	闭曲面围成的立体体积的快捷算法	283
070	曲面面积的快捷算法	285
第五章	无穷级数与常微分方程	289
071	正项级数收敛性的快捷判别法	289
072	任意项级数收敛性的快捷判别法	294
073	抽象级数收敛性的快捷证明法	298
074	幂级数收敛域的快捷算法	301
075	函数幂级数的快捷展开法	306
076	幂级数和函数的快捷算法	311
077	级数和的快捷算法	315
078	傅里叶级数或正、余弦级数和函数的快捷算法	319
079	一阶微分方程快捷求解法	324
080	二阶微分方程的快捷求解法	327
081	右端函数为分段函数的一阶线性微分方程的快捷求解法	330
082	方程 $y(x) = \int_0^x g(x, y(t)) dt + h(x)$ 的快捷求解法	335
B.	线性代数	341
第六章	矩阵与向量	341
083	矩阵式的快捷算法	341
084	数字矩阵逆矩阵的快捷算法	344
085	抽象矩阵可逆性判别与逆矩阵计算的快捷方法	348
086	分块矩阵或经由初等变换后的矩阵的转置、求逆及伴随矩阵的快捷算法	351
087	向量组线性相关性的快捷判别法	354
088	向量组的极大线性无关组的快捷算法	358
089	有关矩阵秩问题的快捷证明法	361
第七章	线性方程组	365
090	由线性方程组的有解性确定其中参数的快捷方法	365
091	两个线性方程组同解的快捷判别法	371
092	两个线性方程组公共解的快捷算法	374
093	矩阵方程的快捷求解法	377
094	有关线性方程组问题的快捷证明法	382
第八章	矩阵特征值与特征向量, 二次型	385
095	矩阵特征值与特征向量的快捷算法	385
096	由矩阵 A 的特征值与特征向量计算 A 中参数的快捷方法	392
097	矩阵可否相似对角化的快捷判别法	396
098	矩阵特征值与特征向量问题的快捷证明法	404
099	由可逆线性变换化二次型为标准形的快捷方法	406

100	由二次型 f 的标准形确定 f 中的参数或 f 的表达式的快捷方法	413
101	有关正定二次型或正定矩阵问题的快捷证明法	418
C.	概率论与数理统计	422
第九章	随机事件概率计算	422
102	分层应用全概率公式快捷计算随机事件概率的方法	422
103	条件概率的快捷算法	424
104	利用抽签原理快捷计算随机事件概率的方法	427
第十章	随机变量及其分布	431
105	(一维)随机变量分布函数与分布律或概率密度的快捷换算法	431
106	(一维)连续型随机变量函数的概率密度的快捷算法	436
107	与正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 有关问题的快捷算法	440
108	两个连续型随机变量独立性的快捷判定法	443
109	二维连续型随机变量的两类条件概率的快捷算法	446
110	二维连续型随机变量函数的概率密度的快捷算法	451
第十一章	随机变量的数字特征	456
111	将离散型随机变量 X 表示成若干个随机变量之和, 快捷计算 X 的数字特征方法	456
112	利用常用随机变量的数字特征快捷计算连续型随机变量的数字特征方法	460
113	与二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 有关问题的快捷算法	465
第十二章	数理统计	471
114	来自正态总体的样本统计量分布的快捷确定法	471
115	样本统计量数字特征的快捷算法	475
116	非正态总体未知参数置信区间的快捷算法	480
参考文献		483

第一篇 考研真题(数学一)与解答

这里给出 2009—2011 年全国硕士生入学考试题及其解答, 其中许多试题的解答都使用了第二篇中所述的快捷解题方法. 因此阅读本篇将使你初步领略快捷解题方法的优点, 也使你经历一次快捷解题方法的训练.

每道试题的解答都由【精解】与【附注】组成.

【精解】中, 给出了该道试题清晰、精确的解答, 并蕴含解题的技巧性.

【附注】中, 除基本题(即可利用基本概念、基本理论和基本计算方法直接求解的问题)外, 都指明问题是按第二篇中的哪一个快捷解题方法求解的.

A. 2009 年真题与解答

一、选择题: 第 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合试题要求.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$, $g(x) = x^2 \ln(1 - 6x)$ 是等价无穷小, 则

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$.

(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$.

(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

【精解】 先考察选项 A:

当 $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ 时, 由于

$$f(x) = x - \sin x = x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \right) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \sim \frac{1}{6}x^3 (x \rightarrow 0),$$

$$g(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{6}x\right) \sim x^2 \cdot \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x^3 (x \rightarrow 0),$$

所以, $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow 0)$.

因此, 本题选 A.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 003 分别寻找 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的等价无穷小, 从而判定选项 A 是正确的.

2. 如图 A-1, 正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k, I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy (k = 1, 2, 3, 4)$, 则

$$\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} =$$

(A) I_1 . (B) I_2 . (C) I_3 . (D) I_4 .

【精解】 由于在 D_1 上, $y \cos x \geq 0$ (仅在点 $(0, 0)$ 处取等号),

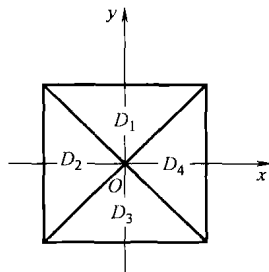


图 A-1

所以 $I_1 = \iint_{D_1} y \cos x dx dy > 0$. 由于 D_2 关于 x 轴对称, $y \cos x$ 在对称点处的值互为相反数, 所以,

$$I_2 = \iint_{D_2} y \cos x dx dy = 0. \text{ 同样, } I_4 = \iint_{D_4} y \cos x dx dy = 0.$$

由于在 D_3 上 $y \cos x \leq 0$ (仅在点 $(0, 0)$ 处取等号), 所以 $I_3 = \iint_{D_3} y \cos x dx dy < 0$.

从而 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} = I_1$.

因此, 本题选 A.

【附注】 本题的 $I_2 = I_4 = 0$ 是按第二篇快捷解题方法 054 计算得到的; $I_1 > 0$ 与 $I_3 < 0$ 是按第二篇快捷解题方法 057 判断的.

3. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图 A-2 所示, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为

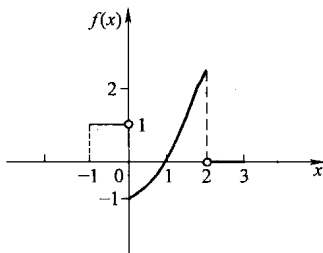


图 A-2

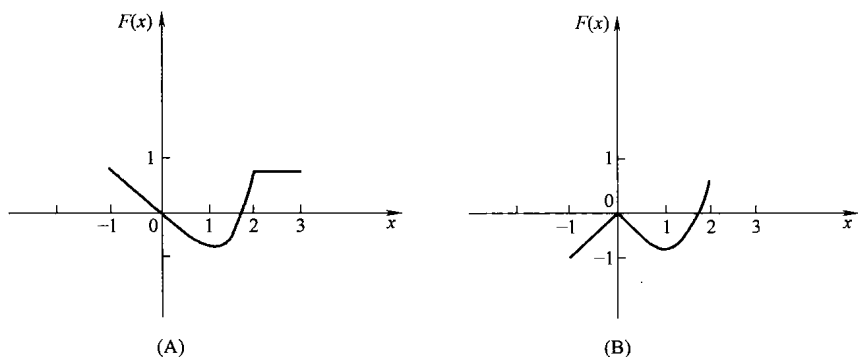


图 A-3

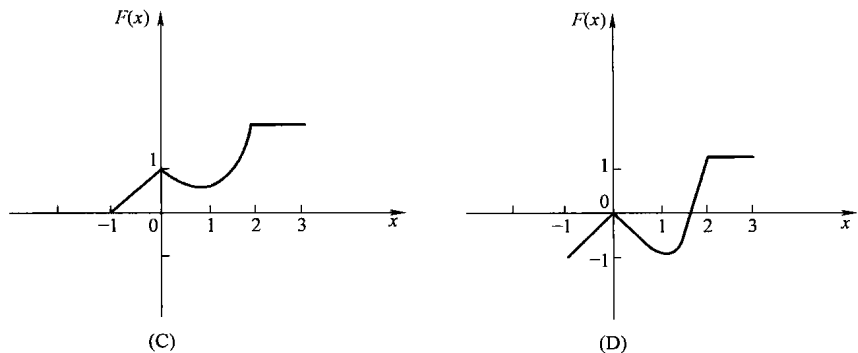


图 A-4

【精解】 由于当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x dt = x \leq 0$, 所以应排除选项 A,

C.

由于当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^x 0 dt = \int_0^2 f(t) dt \neq 0$ (因为图 A-2 中, 在 $[0, 1]$ 下方图形的面积与 $[1, 2]$ 上方图形的面积不相等), 所以应排除选项 B.

因此, 本题选 D.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 038 间接地判断选项 D 是正确的.

4. 设有两个数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

- (A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.
 (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.
 (C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.
 (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

【精解】 考虑选项 C.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 知存在 $M > 0$, 使得 $|a_n| \leq \sqrt{M} (n=1, 2, \dots)$; 又由 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛知存在正整数 $N > 0$, 使得 $b_n^2 \leq |b_n| (n > N)$. 于是有

$$a_n^2 b_n^2 \leq M |b_n| (n \geq N).$$

从而由 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛知正项级数 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛, 即正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

因此, 本题选 C.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 073 判断的.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
 (C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

【精解】 由于 $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, 所以过渡

矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

因此, 本题选 A.

【附注】 本题是基本题, 只要记住向量空间中两个基之间的过渡矩阵计算公式即可判断本题.

6. 设矩阵 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.
(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

【精解】 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} O & |A| B^* \\ |B| A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

因此, 本题选 B.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 086 计算判断的.

7. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X) =$

(A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1.

【精解】 记 X 的概率密度为 $f(x)$, 又设 X_1, X_2 的分布函数分别为 $\Phi(x)$ 与 $\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 则 $x_1 \sim N(0, 1), x_2 \sim N(1, 2^2)$. 于是

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = 0.3 \int_{-\infty}^{+\infty} x d\Phi(x) + 0.7 \int_{-\infty}^{+\infty} x d\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right) \\ &= 0.3E(X_1) + 0.7E(X_2) = 0.3 \times 0 + 0.7 \times 1 = 0.7. \end{aligned}$$

因此, 本题选 C.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 112 计算判断的.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【精解】 由于 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\}$

$$\begin{aligned} &= P\{Y=0\}P\{XY \leq z | Y=0\} + P\{Y=1\}P\{XY \leq z | Y=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X \cdot 0 \leq z | Y=0\} + \frac{1}{2}P\{X \cdot 1 \leq z | Y=1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [P\{0 \leq z\} + P\{X \leq z\}] \quad (\text{利用 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立}) \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(z) & z < 0, \\ \frac{1}{2}[1 + \Phi(z)] & z \geq 0 \end{cases} \quad (\text{其中 } \Phi(x) \text{ 是 } X \text{ 的分布函数}) \\
 &= \frac{1}{2}\Phi(z) + \begin{cases} 0 & z < 0, \\ \frac{1}{2} & z \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

所以, $F_Z(z)$ 仅有一个间断点 $z=0$.

因此, 本题选 B.

【附注】 本题按第二篇快捷解题方法 105 计算 $F_Z(z)$, 并由此判断选项 B 正确.

二、填空题: 第 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

【精解】 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u + f'_v \cdot y$ (其中 $u=x, v=xy$) 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{uv} \cdot x + f''_{vv}xy + f'_v.$$

【附注】 本题是基本题.

10. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

【精解】 由 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $(C_1 + C_2x)e^x$ 知特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 有重根 $\lambda = 1$, 由此得 $a = -(1+1) = -2, b = 1 \cdot 1 = 1$. 于是所给的非齐次线性微分方程为

$$y'' - 2y' + y = x. \quad (1)$$

由于式(1)有特解 $x+2$, 从而其通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2, \quad (2)$$

且

$$y' = (C_1 + C_2 + C_2x)e^x + 1. \quad (3)$$

将 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 代入式(2)、式(3)得

$$\begin{cases} 2 = C_1 + 2, \\ 0 = C_1 + C_2 + 1, \end{cases} \quad \text{即 } C_1 = 0, C_2 = -1.$$

将它们代入式(2)得

$$y = -xe^x + x + 2.$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 080 计算的.

11. 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.

【精解】 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases} (0 \leq t \leq \sqrt{2})$, 所以

$$\begin{aligned}\int_L x ds &= \int_0^{\sqrt{2}} t \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^{\sqrt{2}} t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4t^2} d(1 + 4t^2) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{12} (27 - 1) = \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

【附注】 本题是基本题.

12. 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____.

【精解】 由 Ω 的对称性知

$$\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz,$$

$$\text{所以, } \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$\begin{aligned}&\stackrel{\text{球面坐标}}{=} \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^4 dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \times 2 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15}\pi.\end{aligned}$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 058 计算的.

13. 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 _____.

【精解】 记矩阵 $\beta \alpha^T$ 的对应特征值 λ 的特征向量为 ξ , 即

$$\beta \alpha^T \xi = \lambda \xi$$

则 $\beta \alpha^T (\beta \alpha^T \xi) = \lambda (\beta \alpha^T \xi)$, 即 $\beta (\alpha^T \beta) \alpha^T \xi = \lambda^2 \xi$.

于是, 由 $\alpha^T \beta = 2$ 得

$$2\beta \alpha^T \xi = \lambda^2 \xi, \text{ 即 } 2\lambda \xi = \lambda^2 \xi.$$

由此可知, λ 满足 $2\lambda = \lambda^2$, 即 $\lambda = 0, 2$. 因此, $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 $\lambda = 2$.

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 095 求解的.

14. 设 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

【精解】 由题设知

$$E(\bar{X} - kS^2) = np^2, \text{ 即 } E(\bar{X}) + kE(S^2) = np^2. \quad (1)$$

由于 $X \sim B(n, p)$, 所以, $E(\bar{X}) = np$, $E(S^2) = np(1-p)$. 将它们代入式(1)得

$$np + k \cdot np(1-p) = np^2, \text{ 即 } k = -1.$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 115 计算的.

三、解答题: 第 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

【精解】 $f(x, y)$ 的定义域为 $-\infty < x < +\infty, y > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2 + y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 1 + \ln y.$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 2x(2 + y^2) = 0, \\ 2x^2y + 1 + \ln y = 0 \end{cases} \quad \text{得唯一可能极值点 } x = 0, y = \frac{1}{e}.$$

$$\text{由于 } \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(0, \frac{1}{e})} = 2(2 + y^2) \Big|_{y=\frac{1}{e}} = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) > 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = \left[(4xy)^2 - 2(2 + y^2) \left(2x^2 + \frac{1}{y} \right) \right] \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = -2e \left(2 + \frac{1}{e^2} \right) < 0,$$

所以, $f(x, y)$ 仅有极小值 $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, 无极大值.

【附注】 本题是基本题, 但应熟练掌握二元函数极值的计算方法.

16. (本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 所围成区域的面积, 记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

【精解】 由于 $a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ ($n = 1, 2, \dots$), 所以

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

(由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛, 收敛级数可以任意加括号,

$$\text{因此有 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n})$$

$$= - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + 1 = - \ln(1+x) \Big|_{x=1} + 1 = 1 - \ln 2.$$

【附注】 本题是按第二篇快捷解题方法 077 计算的.

17. (本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4, 0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(II) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

【精解】(I) S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2 + z^2}{3} = 1$.

设过点 $(4, 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线为 l . 记其切点为 (x_0, y_0) , 则 l 的方程为

$$\frac{xx_0}{4} + \frac{yy_0}{3} = 1. \quad (1)$$

于是, x_0, y_0 满足

$$\begin{cases} \frac{4x_0}{4} + \frac{0 \cdot y_0}{3} = 1, \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1, \end{cases} \quad \text{即 } x_0 = 1, y_0 = \pm \frac{3}{2}.$$

将它们代入式(1)得 l 的方程为 $\frac{x}{4} \pm \frac{y}{2} = 1$. 因此 S_2 的方程为

$$\frac{x}{4} \pm \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{2} = 1, \quad \text{即 } \frac{(x-4)^2}{4} = y^2 + z^2.$$

(II) S_1 与 S_2 之间的立体是由图 A-5 阴影部分绕 x 轴旋转而成的旋转体, 所以, 所求体积为

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} y \left[(4-2y) - 2\sqrt{1-\frac{y^2}{3}} \right] dy \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \left(4y - 2y^2 - 2y\sqrt{1-\frac{y^2}{3}} \right) dy \\ &= 2\pi \left[2y^2 - \frac{2}{3}y^3 + 2\left(1-\frac{y^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^{\frac{3}{2}} \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \right) - 2 \right] = \pi. \end{aligned}$$

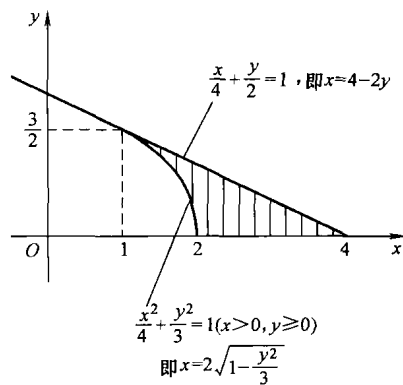


图 A-5

【附注】 本题(I)是基本题;(II)是按第二篇快捷解题方法045计算的.

18. (本题满分11分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

【精解】(I) 作辅助函数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = F(b) (= f(a))$. 所以由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

$$(II) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(\xi)x}{x} (\xi \in (0, x))$$

(这是由于 $f(t)$ 在 $[0, x]$ ($x \in (0, \delta)$) 上连续, 在 $(0, x)$ 内可导, 所以由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (0, x)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= f'(\xi)x \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f'(\xi) = A, \end{aligned}$$

所以, $f'_+(0) \left(= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \right)$ 存在且为 A .

【附注】 本题(I)是拉格朗日中值定理的证明. 它表明, 对于高等数学中的重要定理, 也应掌握它的证明. (II)是基本题, 由右导数的定义并应用(I)中证明的定理即可推得结论.

19. (本题满分10分)

计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

【精解】 记 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$ (内侧) (ε 是充分小的正数, 使 Σ_1 位于 Σ 之内), $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq \varepsilon^2$, Ω 是由 $\Sigma + \Sigma_1$ 围成的立体, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \\ &\quad \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\iint_{\Sigma + \Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\} dv \\ &= \iiint_{\Omega} 0 dv = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{\varepsilon^3} \iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdx dy \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^3} \iint_{\Sigma_1^-} xdydz + ydzdx + zdx dy \end{aligned}$$

(其中 Σ_1^- 表示外侧曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$)

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{高斯公式}}{=} -\frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv = -\frac{1}{\varepsilon^3} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 \\ &= -4\pi. \end{aligned} \quad (3)$$