高 等 学 校 教 材 3

工科数学分析

GONGKE SHUXUE FENXI

（上）

王洪滨　李冬松　主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高 等 学 校 教 材

工科数学分析

GONGKE SHUXUE FENXI

（上）

王洪滨　李冬松　主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

《工科数学分析》分上、下两册。本书为其上册，共分七章，依次为：函数，极限与连续，导数与微分，中值定理及导数应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程。每章均有供自学的综合性例题。

本书叙述详细，说理浅显，例题由浅入深，可作为工科大学一年级新生数学课教材，也可作为备考工科硕士研究生的人员和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析. 上/王洪滨，李冬松主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.7

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3333 - 5

Ⅰ.①工… Ⅱ.①王… ②李… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 130953 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 17 字数 326 千字
版 次 2011 年 7 月第 1 版 2011 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3333 - 5
定 价 28.00 元

前　言

随着科学技术的迅猛发展，工科学生需要掌握更多的数学基础理论，拥有很强的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力. 为适应21世纪科技人才对数学的需求，我们按照前国家教委颁布的高等工业学校各门课程基本要求和硕士研究生入学考试大纲，编写了《工科数学分析》这套书.

本书适合各类工科大学学生使用，且具有以下特点：

1. 理论丰富. 本书不仅包括了普通工科学生必须掌握的高等数学基本理论和方法，同时还引入了一定量的理科数学分析知识，相信学生认真阅读学习本书后，必能获得扎实的理论基础.

2. 侧重培养学生的创新及分析解决问题的能力. 和普通教材相比，本书有大量的例题和习题，其中一部分习题必须认真观察、分析才能解决. 另一部分习题侧重于联系实际，学生必须将实际问题转化为数学问题，建立数学模型才能解决.

3. 满足硕士研究生入学考试需要. 本书部分例题和习题达到硕士研究生统一考试试题难度，如能很好地掌握本书内容，可以满足学生备考硕士研究生的需求.

哈尔滨工业大学数学系张宗达教授（基础学科带头人）对本书的编写给予了指导性建议，并提出了大量的有价值的意见；刘维国老师一直给予我们很大鼓励和帮助并对本书的总体框架及修改过程提出许多建设性建议；黄艳老师等在本书的电子稿形成和校对过程中做了大量工作；哈尔滨工业大学出版社张永芹编辑辛勤运作，为本书出版作了很多工作，在此一并向他们表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中的缺点、疏漏在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2011年3月

目　　录

第1章　函　数

函数是最重要的数学概念之一,也是大学数学分析的研究对象,所以有必要对有关的知识进行简要介绍.

1.1　函数的概念

1.1.1　实数与数轴

实数是有理数和无理数(无限不循环小数)的统称,有理数又分为整数和分数.

取定了原点,长度单位和方向的直线叫做数轴.数轴上的点与实数是一一对应的.今后,我们对实数和数轴上的点不加区别.

实数具有如下性质:

(1) 有序性　任意两个互异的实数a,b都可以比较大小,或者$a < b$,或者$a > b$.实数按照由小到大的顺序排列在数轴上.

(2) 完备性　任意两个有理数之间有无穷多个有理数,所以说有理点处处稠密.但有理点并未充满整个数轴,比如还有$\sqrt{2}$,π 这样一些无理点.因为有理数与无理数之和为无理数,所以无理点也处处稠密.实际上,无理数远比有理数多得多.实数充满整个数轴,没有空隙,这就是实数的完备性(或连续性).

1.1.2　数集与界

以数为元素的集合叫做数集,习惯上自然数集记为$\mathbf{N}$,整数集记为$\mathbf{Z}$,有理数集记为$\mathbf{Q}$.所有实数构成的数集叫做实数集,记为$\mathbf{R}$.

设$a,b \in \mathbf{R}$,且$a < b$,以a,b为端点的有限区间包括:

开区间:$(a,b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$;

闭区间:$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$;

半开区间:$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$,$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b, x \in \mathbf{R}\}$.

此外,还有五种无穷区间

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a, x \in \mathbf{R}\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b,x\in\mathbf{R}\}$$
$$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbf{R}\}$$

设$\delta>0$,称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点x_0的δ邻域,记为$U_\delta(x_0)$或$U(x_0,\delta)$. 它是以x_0为中心,长为2δ的开区间(图 1.1). 有时我们不关心δ的大小,常用"邻域"或"x_0附近"代替x_0的δ邻域.

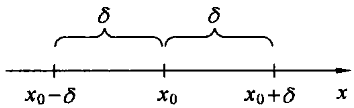

图 1.1

称集合$(x_0-\delta,x_0)\cup\{x_0,x_0+\delta\}$为$x_0$的去心$\delta$邻域,记为$\mathring{U}_\delta(x_0)$.

定义 1.1 对数集X,若有常数$M(m)$使得

$$x\leqslant M(x\geqslant m) \quad \forall x\in X$$

则说数集X有上(下)界,并称$M(m)$为数集X的一个上(下)界.

既有上界又有下界的数集叫做有界数集,否则称为无界数集.

显然,若一数集有上(下)界,则必有无数多个上(下)界. 事实上,凡是大于(小于)上(下)界$M(m)$的数,都是该数集的上(下)界. 但最小(大)的上(下)界,却只能有一个.

公理 任何非空的有上界的数集X一定有最小上界μ,称为数集X的上确界,记为

$$\mu=\sup X$$

显然,$\mu=\sup X$等价于:

(1) $\forall x\in X$,有$x\leqslant\mu$;

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists x\in X$,使得$x>\mu-\varepsilon$.

命题 任何非空间的有下界的数集X一定有最大下界γ,称为数集X的下确界,记为$\gamma=\inf X$.

证明 设A为X的所有下界构成的集合,则$\forall x\in X$都是A的一个上界,所以A非空有上界. 由公理知,A有上确界,记为γ. 显然,$\forall x\in X$,都有$x\geqslant\gamma$,即γ是X的下界. 由上确界的性质(1),$\forall a\in A$,都有$a\leqslant\gamma$,即γ是X的最大下界.

下确界也有类似于上确界的等价定义,请读者叙述之.

数集X的上(下)界可能属于X,也可能不属于X. 比如,数值 1 是集合$\{x \mid x<1\}$和$\{x \mid x\leqslant 1\}$的上确界. 但

$$1\notin\{x \mid x<1\},1\in\{x \mid x\leqslant 1\}$$

实数x的绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, x > 0\text{时} \\ 0, x = 0\text{时} \\ -x, x < 0\text{时} \end{cases}$$

从绝对值的定义可以直接证明,对任何 $x,y \in \mathbf{R}$ 有如下三角不等式成立

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

从而也就有

$$|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$$

其中 z 是任意实数.

利用绝对值,x_0 的 δ 邻域可表示为

$$U_\delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

x_0 的去心 δ 邻域可表示为

$$\mathring{U}_\delta(x_0 = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\})$$

1.1.3 函数的概念

在研究自然的、社会的,以及工程技术的某个过程中,经常会遇到各种不同的量.在所研究的过程中保持不变的量叫做常量,习惯上用字母 a,b,c 等表示.在所研究的过程中,数值有变化的量叫做变量,习惯上用英文字母 x,y,z 等表示.

一切客观事物本来是相互联系和具有内部规律的,所以,不仅要研究事物的某种特性在数量上的变化,更重要的是要研究引起变化的原因及变化规律.这种相互依赖关系及内部规律的一种基本而重要的情况,就是同一现象中所涉及的各种变量间存在着的一种确定的关系.

例 1.1.1 某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化的曲线,如图 1.2 所示.图中横坐标是时间 t(单位:h),纵坐标是温度 T(单位:℃).曲线形象地反映出在时间区间[0,24]内,温度随时间 t 的变化而变化的规律.当 t 一定时,T 所取的值也就唯一确定了.

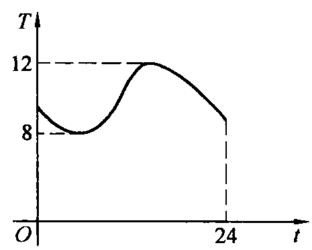

图 1.2

例 1.1.2 在一块边长为 a 的正方形铁片的四角上,各截去一个边长为 x 的小正方形铁片后,可做成一个高为 x 的无盖盒子(图 1.3).这个盒子容积 V 和盒高 x 之间的依赖关系为

$$V = x(a-2x)^2$$

当x取区间$(0,\frac{a}{2})$内任一值时，变量V均有一个确定的值和它对应.

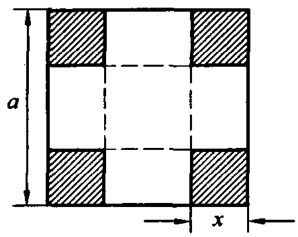

图 1.3

这两个例子以不同的形式表现了两个变量之间的相互依从关系，它们的共同点是其中一变量的变化引起另一变量随之变化. 当一个变量的值取定时，随它变化的那个变量的值也依某一确定的规律而唯一地确定了. 变量之间的这种关系称为函数关系，由此概括出函数的定义如下.

定义1.2　如果两个变量x和y之间有一个数值对应规律，使变量x在其可取值的数集X内每取得一个值时，变量y就依照这个规律确定对应值，则说y是x的函数，记作

$$y=f(x),x\in X$$

其中x叫做自变量，y叫做因变量.

自变量x可取值的数集X称为函数的定义域，所有函数值构成的集合Y称为函数的值域. 显然，函数$y=f(x)$就是从定义域X到值域Y的映射，所以，有时把函数记为

$$f:X\to Y$$

函数概念中有两个要素：其一是对应规律，即函数关系；其二是定义域.

(1) 定义域

由于只有自变量在函数的定义域中取值时，因变量取值才有意义，因此，在研究函数时，必须首先弄清它的定义域是什么样的数集. 确定函数的定义域应注意两点：一是若函数关系由解析式给出，由于只限定在实数范围内考虑问题，故要注意到“零不能做除数”、“负数不能开平方” 和“负数与零均不能取对数”等几条原则，若函数表达式中含有若干项，则函数定义域应是各项中自变量允许可取的值的公共部分. 例如，函数

$$y=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

对于第一项应有$|x|\geqslant 1$，即$x\leqslant -1$或$x\geqslant 1$；对于第二项应有$x>0$. 因此，此函数的定义域为$[1,+\infty)$. 另一点要注意的是，在求函数的定义域时，要关注该函数具体的几何意义，如例 1.1.2 中的函数$V=x(a-2x)^2$的定义域应为区间$(0,\frac{a}{2})$，如果抛开它的实际含义，只考虑计算上的要求，则定义域应为$(-\infty,+\infty)$.

（2）函数关系

函数记号$f(x)$并不是"f"乘"x"，"$f(\quad)$"是表示变量y对于变量x的确定的依赖关系的记号. 例如

$$f(x) = x^2 - x + 7$$

则"$f(\quad)$"即表示"自变量的平方减去自变量之后再加7"这一具体的依赖关系. 而符号$f(x_0)$或$f(x)|_{x=x_0}$或$y|_{x=x_0}$均表示函数$y=f(x)$在自变量x取x_0值时所对应的函数值.

引入函数记号是十分必要的，如例1.1.1中T是t的函数，但T对t的确定的依赖关系不能用解析表达式给出，只好用$T=T(t)$来代表. 除此以外，今后在讨论函数的某些性质时，也必须使用函数记号，因为是对某一类函数（而不是对某一个函数）进行讨论，不可能将它们一一列出（也没有这个必要）. 但必须注意，若在同一问题中涉及几个不同的函数关系时，不能用同一个函数记号去代表不同的函数关系，否则将会产生混淆. 例如，圆面积S与半径r的依赖关系为$S=\pi r^2$，而圆周长l与半径r的依赖关系为$l=2\pi r$，就是两种不同的函数关系，不能用同一记号表示.

两个函数$y=f(x)$，$y=g(x)$相等，是指它们有相同的定义域X，且

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$$

例如

$$y = f(x) = \lg x^2$$

$$y = g(x) = 2\lg x$$

就不能认为是相同的函数（它们的定义域不同），所以$\lg x^2 = 2\lg x$这样的变形只在$(0, +\infty)$上成立.

（3）函数的表示法

例1.1.1与例1.1.2给出了函数的两种表示方法，例1.1.1是用图形——平面直角坐标系中的一条曲线表示两个变量之间的函数关系，这种函数的表示法称为函数的几何表示法. 几何表示法的优点是直观，整个函数关系的梗概可以一目了然，对于了解函数的性态是十分方便的，缺点是精确性差，不宜于作理论研究. 例1.1.2是用一个数学式子来表示两个变量之间的关系，函数的这种表示法称为函数的解析表示法. 解析法的优点是便于计算、精确性好、宜于作理论研究，缺点是不易于掌握整个函数的性态，而且有时要建立一个函数的解析表达式是十分困难的. 如果该函数有实际含义，建立其解析表达式时，还将涉及对其他学科知识的掌握程度.

今后在研究函数时，将充分运用这两种表示法的优点. 顺便指出，一个函数在其定义域的不同部分，其解析表达式可以不一样，即函数的分段表示，这样的

函数称为分段函数.

例 1.1.3 符号函数(克罗内克函数)(图 1.4)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

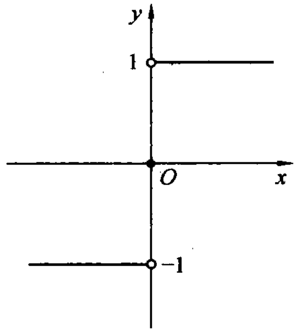

图 1.4

例 1.1.4 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

例 1.1.3,例 1.1.4 皆为分段函数.

1.2 函数的一些重要属性

以下介绍研究函数时,常讨论的几种特性,这些情况均从某个侧面反映了该函数的一种特征. 当然,这些特性不是每个函数都具有的.

1.2.1 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X,若存在常数 $M>0$,恒有

$$|f(x)| \leqslant M \quad \forall x \in X$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上是有界的,或者说 $f(x)$ 是 X 上有界函数,否则称 $f(x)$ 在 X 上是无界的. 若存在常数 $H(L)$,恒有

$$f(x) \leqslant H(f(x) \geqslant L) \quad \forall x \in X$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上是有上(下)界的. 显然,有界等同于函数既有上界又有下界. 在定义域上有界的函数叫做有界函数.

例如,$y=\sin x$ 是有界函数;$y=\dfrac{1}{x}$ 是无界函数,但它在区间 $(0,+\infty)$ 上有下界,在区间 $(1,+\infty)$ 上有界.

1.2.2 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X,如果对于 X 内的任意两点 x_1, x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2)\,(f(x_2) < f(x_1))$$

则称 $f(x)$ 在 X 上单调增加(单调减少).

在定义域上,单调增加或单调减少的函数统称为单调函数. 有时函数在其定义域上不是单调函数,但在定义域内的某个区间上是单调的,则此区间称为该函数的单调区间.

例如,$y=x^2$ 在其定义域$(-\infty, +\infty)$上不是单调函数,但它在$(-\infty,0)$上是单调减少的,在$[0, +\infty)$上单调增加的,而 $y=\sqrt{x}$ 是单调增加的函数.

1.2.3 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称,即当 $x\in X$ 时,必有 $-x\in X$,若对任何 $x\in X$,都有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $y=f(x)$ 为奇函数;若对任何 $x\in X$,都有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $y=f(x)$ 为偶函数.

由以上定义可知,偶函数的图形是关于 y 轴对称的,而奇函数的图形关于原点对称的. $y=x^2$,$y=\cos x$ 在其定义域$(-\infty, +\infty)$上是偶函数,而 $y=x$,$y=\sin x$ 在其定义域$(-\infty, +\infty)$上是奇函数. 还可以证明:

奇函数的和仍为奇函数,偶函数的和仍为偶函数;两个奇函数的积或两个偶函数的积是偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数;定义域 X 关于原点对称的任何函数 $y=f(x)$ 均可表示为一个奇函数和一个偶函数之和,因为

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

右边的第一项是奇函数,第二项为偶函数.

1.2.4 函数的周期性

设
$$y=f(x)\quad x\in X$$

如果存在常数 $T>0$,只要当 $x,x+T\in X$ 时,均有

$$f(x)=f(x+T)$$

则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数,常数 T 称为它的周期. 例如,$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的函数. 按周期的定义,常数 4π,6π 也是 $y=\sin x$ 的周期,2π 是它的最小正周期. 通常说某周期函数的周期,都是指它的最小正周期. 此外,并不是每个周期函数都存在最小正周期. 例如,狄利克雷函数它是一个周期函数,因为任何一个正有理数都是它的周期,故它无最小正周期.

1.3 隐函数与反函数

1.3.1 隐函数

若变量 x,y 之间的函数关系是由一个含 x,y 的方程

$$F(x,y)=0$$

给定,则说 y 是 x 的隐函数. 相应地,把由自变量的算式表示出因变量的函数叫做显函数.

例如,由方程 $x^2+y^2=1, xy=e^x-e^y$ 表示的函数都是隐函数;而 $y=\ln(1+\sqrt{1-x^2})$ 是显函数.

如果能从隐函数中将 y 解出来,就得到它的显函数形式. 例如,$x^2+y^2=1$ 的显函数形式为 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. 但不要认为隐函数都能表示成显函数,如开普勒方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0$$

其中 ε 为常数,$0<\varepsilon<1$,就不能将 y 表示成 x 的显函数. 也不要以为随便写一个含有 x,y 的式子就是一个隐函数,如 $x^2+y^2+2=0$ 就不是隐函数.

1.3.2 反函数

在自由落体运动过程中,距离 S 表示为时间 t 的函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$. 如果将问题反过来提,即已知下落的距离 S,求时间 t,则有 $t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$. 此时,原来的因变量 S 成了自变量,原来的自变量 t 成了因变量. 这种交换自变量和因变量的位置而得到的新函数,称为原有函数的反函数.

一般地说,对于函数 $y=f(x)$,如果将 y 当做自变量,x 作为因变量,则由 $y=f(x)$ 确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数. 显然,它们的图形是同一条曲线.

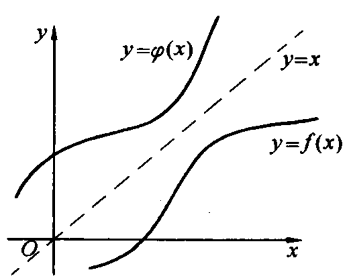

图 1.5

在纯数学研究中,大家关心的是变量间的相依关系,而不考虑变量的具体实际意义,因此习惯用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 改记为 $y=\varphi(x)$. 这样,$y=\varphi(x)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数,中学已证明过,它们的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1.5).

对于单调函数，因为有不同的 x 值对应不同的 y 值，所以有如下结论：

单值单调的函数有反函数，其反函数也是单值单调的函数.

例如，$y=\sqrt{x}$ 是单调增函数，其反函数 $y=x^2$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上也是单调增函数.

1.4 基本初等函数

中学数学课所学过的幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数和对数函数等五类函数统称为初等函数，由它们“组成”的函数是常见的，所以再复习这些函数的基本特性是必要的.

1.4.1 幂函数

函数

$$y=x^{\mu}$$

(μ 为任意常数) 称为幂函数，其定义域由 μ 的取值而定. 例如，$\mu=\frac{1}{3}$ 时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；$\mu=\frac{1}{2}$ 时，定义域为 $[0,+\infty)$；$\mu=-1$ 时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 图 1.6 画出了 $\mu=\frac{1}{3}$，$\mu=\frac{1}{2}$，$\mu=1$，$\mu=2$，$\mu=3$，$\mu=-1$ 时的幂函数在第一象限部分的图形. 它们都通过点 $(1,1)$，其中 $\mu>0$ 时，幂函数都是单调增的；$\mu<0$ 时，幂函数都是单调减的.

1.4.2 三角函数

三角函数包括：正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$. 正弦函数、余弦函

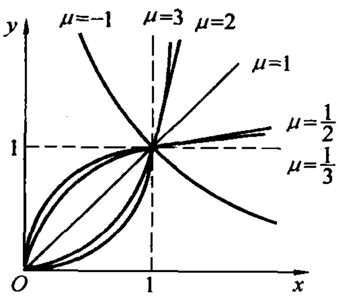

图 1.6

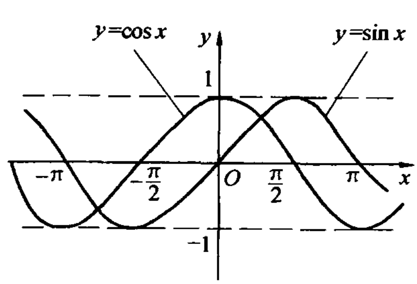

图 1.7