

测量平差



谭立萍 冯春菊 邓桂凤 主编



科学技术文献出版社
SCIENTIFIC AND TECHNICAL DOCUMENTATION PRESS

测 量 平 差

主 编	谭立萍	冯春菊	邓桂凤
副主编	张齐周	段宝霞	周佳佳
	孙艳崇	徐广飞	冀念芬



科学技术文献出版社
SCIENTIFIC AND TECHNICAL DOCUMENTATION PRESS

· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

测量平差/谭立萍, 冯春菊, 邓桂凤主编. —北京: 科学技术文献出版社, 2016. 8
ISBN 978-7-5189-1636-8

I. ①测… II. ①谭… ②冯… ③邓… III. ①测量平差—高等职业教育—教材
IV. ①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 141983 号

测量平差

策划编辑: 赵 斌 责任编辑: 赵 斌 责任校对: 赵 瑗 责任出版: 张志平

出 版 者 科学技术文献出版社
地 址 北京市复兴路 15 号 邮编 100038
编 务 部 (010) 58882938, 58882087 (传真)
发 行 部 (010) 58882868, 58882874 (传真)
邮 购 部 (010) 58882873
官 方 网 址 www.stdp.com.cn
发 行 者 科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印 刷 者 北京金其乐彩色印刷有限公司
版 次 2016 年 8 月第 1 版 2016 年 8 月第 1 次印刷
开 本 787 × 1092 1/16
字 数 210 千
印 张 9.25
书 号 ISBN 978-7-5189-1636-8
定 价 35.00 元



版权所有 违法必究

购买本社图书, 凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责调换

前 言

本教材是编者在总结多年高职高专教学改革成功经验的基础上,结合我国测绘专业的基本情况,按照测绘专业高职高专人才培养的特点编写。

测量平差是高职高专建筑工程专业及其相关专业的一门专业基础课程,是专业核心能力模块的重要组成部分。教材编写紧紧围绕专业人才培养目标,坚持“必需、够用”的原则,合理设置教材内容。教材结构设计充分体现职业教育“就业导向,能力本位”的指导思想,体现以职业素质为核心的全面素质教育培养。本教材侧重于对条件平差、间接平差和误差椭圆知识的讲解,并介绍了近代误差理论和测量平差方法的其他相关知识,为学习相关后续课程奠定基础。

测量平差作为测绘专业课程基础教材,以工作过程为导向设计了7个教学项目,以实际问题为载体构建了32个学习任务。教材编写坚持以“应用”为目的,以“必需、够用”为原则,从而满足学生职业生涯发展的需求,适应测绘、交通、建筑等工程单位测量岗位的要求。为使本教材具有较强的技能性、实用性和先进性,编写人员多次深入施工现场,与现场施工技术人员进行探讨,征求了部分测绘单位和施工单位专家的意见,力求突出高职高专教育的特点,注重理论与实践相结合,尤其强调学生实际动手能力的培养。

本教材由辽宁省交通高等专科学校谭立萍、云南锡业职业技术学院冯春菊、湖南安全技术职业学院邓桂凤担任主编;由广东工贸职业技术学院张齐周、湖南安全技术职业学院段宝霞、辽宁城市建设职业技术学院周佳佳、辽宁省交通高等专科学校孙艳崇、包头钢铁职业技术学院徐广飞、甘肃工业职业技术学院冀念芬担任副主编。全书由谭立萍负责统稿。

由于编者水平有限,书中难免存在缺点和疏忽,敬请读者批评指正。

目 录

项目一 测量误差理论.....	1
任务 1.1 观测值与观测误差	1
任务 1.2 误差分类	2
任务 1.3 测量平差简史	5
习 题	7
项目二 精度指标与误差传播.....	8
任务 2.1 偶然误差的规律性	8
任务 2.2 衡量精度的指标	11
任务 2.3 误差传播律	16
任务 2.4 协方差传播律在测量上的应用	20
任务 2.5 权与定权的常用方法	22
任务 2.6 协因数 and 协因数传播律	26
任务 2.7 由真误差计算中误差	30
习 题	31
项目三 平差数学模型与最小二乘原理	34
任务 3.1 测量平差概述	34
任务 3.2 测量平差数学模型	38
任务 3.3 函数模型的线性化	41
任务 3.4 参数估计与最小二乘原理	42
习 题	46
项目四 条件平差	48
任务 4.1 条件平差原理	48
任务 4.2 水准网条件平差	49
任务 4.3 测角网条件平差	52

任务 4.4 测边网条件平差	56
任务 4.5 导线测量条件方程	59
任务 4.6 精度评定	63
任务 4.7 条件平差算法与算例	65
习 题	69
项目五 间接平差	71
任务 5.1 间接平差原理	71
任务 5.2 水准网间接平差	72
任务 5.3 三角形网间接平差	75
任务 5.4 精度评定	81
习 题	85
项目六 误差椭圆	87
任务 6.1 点位中误差	87
任务 6.2 点位误差的计算	88
任务 6.3 误差曲线	95
任务 6.4 误差椭圆	97
任务 6.5 相对误差椭圆	98
习 题	102
项目七 常用测量平差软件应用	104
任务 7.1 平差易系统	104
任务 7.2 科傻系统	128
参考文献	142

项目一 测量误差理论

任务 1.1 观测值与观测误差

1.1.1 观测值及其函数

测量平差基础是为测量平差奠定其理论基础，其主要任务是讲授测量平差的基本理论和基本方法，为进一步学习和研究测量平差打好基础。

误差理论的研究对象就是观测值，观测值就是通过观测得到的测量信息。

所谓测量观测值是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取的地球与其他实体的空间分布有关信息的数据。测量观测值可以是直接测量的结果，也可以是经过某种变换的结果。

根据测量方式，测量观测值可分为直接观测值和间接观测值。

直接观测值是指直接从仪器或量具上读出待测量的数值。例如，钢尺量距的读数，经纬仪或全站仪测某方位的度盘读数，水准测量中每一站的前、后视读数，都是直接观测值。然而，在测量工作中，有些未知量往往不能直接测得，而需要由其他直接观测值按一定的函数关系计算出来，这样的测量值称为间接观测值。这类例子很多，例如，水准测量中，高差 $h = a - b$ 就是关于直接观测值 a 、 b 的函数，这里的函数 h 就是间接观测值。

若观测值有 L_1 、 L_2 、 L_3 、 $\cdots$ 、 L_n ，可将它们表示成一个向量：

$$L = [L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n]^T$$

即称为观测向量。

一个量是否是直接观测值不是绝对的。随着科学技术的发展及测量仪器的改进，很多原来只能间接测量的量，现在可以直接测量了。在测量工作中，现在大多数所求的量还都是间接测量值，即观测值的函数。

1.1.2 观测误差

任何一个被观测的量，客观上总是存在着代表其真正大小的数值，简称真值。在测量工作中，由于测量仪器、外界条件、测量人员等诸多因素的影响，对某量的测量值不可能是无限精确的，即测量中的误差是不可避免的。我们把对某量（如某一个角度、某一段距离或某两点间的高差等）进行多次观测，所得的各次观测结果存在着的差异，实质上表现为每次测量所得观测值与该量真值之间的差值，称为测量误差，也称观测误差，即：

$$\text{测量误差}(\Delta) = \text{真值} - \text{观测值}$$

测量误差存在于一切测量之中，贯穿于测量过程的始终。随着科学技术水平的不断提高，测量误差可以被控制得越来越小，但是却永远不会降低到零。

在实际测量工作中，往往会遇到某些量不是直接测定的。既然观测值一定存在误差，那么会导致观测值的函数也必然存在误差。例如，三角高程测量中，两点间的高差即为观测量竖直角与平距的函数。那么，观测量的误差是通过怎样的规律传递给函数的呢？这个规律就称为误差传播律，我们将在后续章节中具体阐述。

任务 1.2 误差分类

1.2.1 误差来源

观测误差产生的原因很多，概括起来有以下 3 个方面。

(1) 测量仪器

测量工作通常是利用测量仪器进行的。由于每一种仪器只具有一定限度的精密度，因而使观测值的精密度受到了一定的限制。例如，用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时，就难以保证在估读厘米以下尾数时完全正确无误；同时，仪器本身也有一定的误差，如水准仪的视准轴不平行于水准轴，水准尺的分划误差等。因此，使用这样的水准仪和水准尺进行观测，就会使水准测量的结果产生误差。同样，经纬仪、全站仪等的仪器误差也会使三角测量、导线测量的结果产生误差。

(2) 观测者

由于观测者感觉器官的鉴别能力存在一定的局限性，所以在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度和技术水平，也是对观测成果质量有直接影响的重要因素。

(3) 外界条件

观测时所处的外界条件，如温度、湿度、风力、大气折光等因素，都会对观测结果直接影响。随着温度的高低、湿度的大小、风力的强弱及大气折光的不同，它们对观测结果的影响也随之不同，因而在这样的客观环境下进行观测，就必然使观测的结果产生误差。

上述测量仪器、观测者、外界条件 3 个方面的因素是引起观测误差的主要原因，因此把这 3 个方面因素综合起来称为观测条件。观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。观测条件的优劣直接影响观测成果的质量，反之，观测成果的质量也反映观测条件的好坏。但是，不管观测条件如何，观测的结果都会受到上述因素的影响而产生这样或那样的误差。因此，测量中的误差是不可避免的。当然，在客观条件允许的限度内，观测者可以而且必须确保观测成果具有较高的质量。

我们把在同一观测条件下的观测称为等精度观测；反之，称为不等精度观测。而相应的观测值称为等精度观测值和不等精度观测值。

1.2.2 误差分类

观测误差按其对观测成果的影响性质，可分为粗差、系统误差、偶然误差 3 种。

(1) 粗差

粗差就是测量中出现的错误,如读错、记错、照错等。这主要是由于工作中的粗心大意引起的。一般粗差值很大,不仅大大影响测量成果的可靠性,甚至会造成返工,给工作带来难以估量的损失。因此,必须采取适当的方法和措施,杜绝测量中出现粗差。

(2) 系统误差

在相同的观测条件下,对某量进行一系列观测,若观测误差的符号及大小保持不变,或按一定的规律变化,这种误差称为系统误差。这种误差往往随着观测次数的增加而逐渐积累,且对测量成果质量影响特别显著。在实际工作中,应该采用各种方法来消除或减弱系统误差对观测成果的影响,达到实际上可以忽略不计的程度。

(3) 偶然误差

在相同的观测条件下,对某量进行一系列观测,若观测误差的大小及符号都表现出偶然性,即从单个误差来看,该误差的大小及符号没有规律,但从大量误差的总体来看,具有一定的统计规律,这类误差称为偶然误差或随机误差。

例如,经纬仪测角误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差和仪器本身不完善而引起的误差等综合的结果。而其中每一项误差又是由许多偶然因素所引起的小误差。例如,照准误差可能是由于照准部旋转不正确、脚架或觇标的晃动与扭转、风力风向的变化、目标的背影、大气折光等偶然因素影响而产生的小误差。因此,测角误差实际上是由许许多多微小误差项构成,而每项微小误差又随着偶然因素的影响不断变化,其数值的大小和符号的正负具有随机性。这样,由它们所构成的误差,就其个体而言,无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的。因此,把这种性质的误差称为偶然误差。

当观测值中剔除了粗差,排除了系统误差的影响,或者与偶然误差相比系统误差处于次要地位后,占主导地位的偶然误差就成了我们研究的主要对象。如何处理这些随机变量的偶然误差,是测量平差这一学科所要研究的主要内容。

1.2.3 粗差特点及其处理办法

粗差是一种大量级的观测误差,在测量成果中,是不允许粗差存在的。在观测数据中应设法避免出现粗差。

处理粗差的办法主要有以下两种:

①采用 3σ 准则。统计理论表明,测量值的偏差超过 3σ 的概率小于1%。因此,可以认为偏差超过 3σ 的测量值是其他因素或过失造成的,为异常数据,应当剔除。

②进行必要的重复观测和多余观测,通过必要而又严格的检核、验算等方式均可发现粗差。国家的测绘机构制定的各类测量规范和细则,也能起到防止粗差出现和发现粗差的作用。

含有粗差的观测值都不能采用。因此,一旦发现粗差,该观测值必须舍弃或重测。尽管观测过程十分小心,粗差有时也在所难免。因此,如何在大量的观测数据中发现和剔除粗差,或在数据处理中削弱含粗差的观测值对平差成果的影响,是测绘界十分关注的课题之一。

1.2.4 系统误差

(1) 系统误差规律

系统误差的特点是测量结果向一个方向偏离,其数值按一定规律变化,具有重复性、单向性。我们应根据具体的测量条件及系统误差的特点,找出产生系统误差的主要原因,采取适当措施降低它的影响。

系统误差的产生主要有以下几个方面:

1) 仪器误差

这是由于仪器制造或校正不完善而造成的。例如,角度测量时经纬仪的视准轴不垂直于横轴而产生的视准轴误差,水准尺刻画不精确所引起的读数误差。

2) 环境误差

外界环境(光线、温度、湿度、电磁场等)对测量仪器的影响等所产生的误差等。例如,测角时因大气折光而产生的角度误差。

3) 理论误差(方法误差)

这是由于测量所依据的理论本身的近似性,或测量条件不能达到理论所规定的要求,或者是测量方法本身不完善所带来的误差。例如,钢尺量距时外界温度与仪器检定时温度不一致所引起的距离误差。

4) 人为误差

这是由于观测者个人感官和运动器官反应或习惯的不同而产生的误差。例如,由于观测者照准目标时,总是习惯于偏向中央某一侧而使观测结果带有系统误差。

需要注意的是,由于系统误差总是使测量结果偏向一边,或者偏大,或者偏小,因此,多次测量求平均值并不能消除系统误差。

(2) 系统误差的处理办法

消除和减少系统误差的方法一般有以下3种:

1) 检校仪器把系统误差降低到最低程度。例如,每次水准测量前都要进行*i*角检验,对*i*角误差超限的,校正后才能用于观测。

2) 观测方法和观测程序上采用必要的措施,限制或削弱系统误差的影响。这是消除系统误差的主要方法。

①如测水平角时采用盘左、盘右观测,并在每个测回起始方向上改变度盘的配置等;方向观测法测角时,为了检查水平度盘在观测过程中是否发生变动,计算归零误差。

②水准测量中,保证前后视距尽量相等,以减弱*i*角影响。在水准观测过程中,水准仪和水准标尺的自重对地面施加了一定荷载,随安置时间的延长会产生连续的沉降。因此,在一测站的观测过程中,须采用后—前—前—后的观测顺序减弱其影响。对于整条水准线路来说,应进行往返观测,并取往测高差与返测高差的中数作为一条线路最后的观测高差。这样做可以使得在观测过程中由仪器与标尺下沉所引起的观测高差大部分得到消除。另外,外业观测一测段设站时一定要设为偶数站,以消除标尺零点差。

3) 找出产生系统误差的原因和规律,对观测值进行系统误差的改正。

例如,在钢尺量距中,某钢尺的注记长度为 30m,经鉴定后,它的实际长度为 30.016m,即每量一整尺,就比实际长度量少 0.016m,也就是每量一整尺段就有 +0.016m 的系统误差。这种误差的数值和符号是固定的,误差的大小与距离成正比,若丈量了 5 个整尺段,则长度误差为 $5 \times (+0.016) = +0.080\text{m}$ 。若用此钢尺丈量结果为 167.213m,则实际长度为:

$$167.213 + \frac{167.213}{30} \times 0.016 = 167.213 + 0.089 = 167.302\text{m}$$

因此,钢尺量距时,要计算尺长改正数对丈量结果进行改正,从而消除系统误差。

1.2.5 测量平差的任务

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响,在实际工作中,为了提高成果的质量,防止错误发生,通常要使观测值的个数多于未知量的个数,也就是要进行多余观测。例如,对一条导线边,丈量一次就可得出其长度,但实际上总要丈量两次或两次以上;一个平面三角形,只需要观测其中的两个内角,即可决定它的形状,但通常是观测 3 个内角。由于偶然误差的存在,通过多余观测,必然会发现在观测结果之间不相一致或不符合应有关系而产生的不符值。因此,必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理,消除不符值,得到观测值最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量,因此,可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果,这就是测量平差的一个主要任务。测量平差的另一个主要任务是评定测量成果的精度,也就是考核测量成果的质量。

概括来说,测量平差的任务就是:

①对一系列带有观测误差的观测值,运用概率统计的方法来消除他们之间的不符值,求出未知量的最可靠值。

②评定测量成果的精度。

任务 1.3 测量平差简史

测量平差与其他学科一样,是由于生产的需要而产生的,并在生产实践的过程中,随着科学技术的进步而发展。18 世纪末,在测量学、天文测量学等实践中提出如何消除由于观测误差引起的观测值之间矛盾的问题,即如何从带有误差的观测值中找到观测值的最优值。1794 年,年仅 17 岁的高斯(C. F. Gauss)首先提出了这个问题的解决方法——最小二乘法。他是根据偶然误差的 4 个特性,并以算术平均值对待求量的最或然值出发,导出了偶然误差的概率分布,给出了在最小二乘原理下求待定量最或然值的计算方法。当时,高斯没有正式发表这个方法。19 世纪初(1801 年),天文学家对刚发现的谷神星运行轨道的一段弧长进行了一系列观测,后来因故中止了。这就需要根据这些带有误差的观测结果求出该星运行的实际轨道。高斯用自己提出的最小二乘法解决了这个当时很大的难题,对谷神星运行轨道进行了预报,使天文学家又及时地找到了这颗彗星。1809 年,高斯才在《天体运动的理论》一书中正式发表了他的方法。在此之前的 1806 年,勒戎德尔(A. M. Legendre)发表了《决

定彗星轨道的新方法》一文,从代数观点上也独立地提出了这个方法,并定名为最小二乘法。所以,后人称它为高斯-勒戎德尔方法。

自19世纪初到20世纪50~60年代的一百多年中,测量平差学者在基于最小二乘原理的平差方法上做了许多研究,提出了一系列解决各类测量问题的平差方法,并针对这一时期的计算工具的情况,提出了许多分组解算线性方程组的方法,达到了简化计算的目的。

自20世纪70年代开始,随着计算机技术的进步和生产实践中的高精度要求,测量平差得到了很大发展,主要表现在以下几方面。

①从单纯研究观测的偶然误差扩展到包含系统误差和粗差,在偶然误差理论的基础上,对误差理论及其相应测量平差理论和方法进行全方位研究,大大扩充了测量平差学科的研究领域和范围。

②1947年,铁斯特拉(T. M. Tienstra)提出了相关观测值的平差理论,限于当时计算条件,直到20世纪70年代以后才被广泛应用。相关平差的出现,使观测值的概念广义化了,将经典的最小二乘平差法推向更广泛的应用领域。

③高斯的最小二乘法,所选平差参数假设是非随机变量。随着测量技术的进步,需要解决的观测和平差参数均为随机变量的平差问题,20世纪60年代末提出并经70年代发展,产生了顾及随机参数的最小二乘平差方法。它起源于最小二乘内插和外推重力异常的平差问题,由克拉鲁(T. Krarup)于1969年取名为最小二乘滤波,也称为拟和推估法。

④高斯的最小二乘法是一种满秩平差问题,即平差时的法方程组是满秩的,方程组有唯一的解。1962年,迈赛尔(P. Meissl)提出针对非满秩平差问题的内制约束平差原理,后经20世纪70~80年代多位学者的深入研究,已经形成了一整套秩亏自由网平差的理论系统和多种解法,并广泛用于测量实践。

⑤随着微波测距技术在测量中的应用,经典平差中的定权理论和方法也有所革新。许多学者致力于将经典的先验定权方法改进为后验定权方法的研究。在20世纪80年代,方差-协方差估计理论已经形成,所提解法之多是其他课题所不及的。

⑥观测中既然包括系统误差,系统误差的特性、传播、检验、分析的理论研究自然展开,相应的平差方法也相应产生。例如,附有系统参数的平差法。为了检验系统误差的存在和影响,引进了数理统计学中的假设检验方法,结合平差对象和特点,测量学者发展了统计假设检验理论,提出了与平差同时进行的有效的检验方法。

⑦观测中有可能包含粗差,相应的误差理论也得到发展。其中最著名的是20世纪60年代后期荷兰的巴尔达(W. Baarda)教授提出的测量系统的数据探测法和可靠性理论,为粗差的理论研究和实用检验方法奠定了基础。到目前为止,已经形成了粗差定位、估计和检验等理论体系。处理粗差问题,一种途径是基于最小二乘法;另一种途径是放弃最小二乘法平差,提出了在数学中称为稳健估计的方法,或称为抗差估计。稳健估计理论和在测量平差中的应用还在深入研究中。

总之,自20世纪以来,特别是近十多年来,测量平差与误差理论得到了充分发展。这些研究成果在常规测量中的应用已经相当普遍,在近期的3S技术中出现的误差理论和测量平差问题也有新的内容,需要应用已有的理论和方法去解决。同时,更需要提出新的理论和

方法，以适应当前和未来测量事业的发展。

习 题

1. 什么叫测量误差？产生测量误差的原因有哪些？
2. 偶然误差、系统误差各自有什么特性？举出系统误差和偶然误差的例子各5个。
3. 粗差的特点及处理办法？

项目二 精度指标与误差传播

任务 2.1 偶然误差的规律性

偶然误差是一种随机变量。一组误差表面上没有规律性,但就总体来说具有一定的统计规律,即在相同观测条件下,大量偶然误差分布表现出一定的统计规律性。因此我们可以应用概率统计的方法来研究偶然误差的规律性。

大家都熟悉“抛硬币”的游戏,如果抛的次数较少,正、反面出现的频率是难以预计的事,可能是正面,也可能是反面。但是如果连续抛无数多次,正、反面出现的频率就会趋近相等,表现出统计规律性。

2.1.1 偶然误差的表示方法

任何一个观测量,客观上总是存在一个能代表其真正大小的数值,这个数值称为该观测量的真值。从概率和数理统计的观点看,当观测量仅含有偶然误差时,其数学期望就是它的真值。

(1) 真误差

设进行了 n 次观测,各观测值为 $L_1, L_2, \dots, L_n$, 观测量的真值为 $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_n$ 。由于各观测值都带有一定的误差,所以,每一个观测值的真值 $\bar{L}_i$ (或 $E(L_i)$) 与观测值 L_i 之间必存在一个差数,设为:

$$\Delta_i = \bar{L}_i - L_i \quad (2-1)$$

称 Δ_i 为真误差 (在此仅包含偶然误差), 有时简称为误差。若记:

$$L = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n]^T, \bar{L} = [\bar{L}_1 \quad \bar{L}_2 \quad \dots \quad \bar{L}_n]^T, \Delta = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_n]^T$$

则有:

$$\Delta = \bar{L} - L \quad (2-2)$$

从概率论与数理统计的观点可知,当只含偶然误差时,可以以被观测值的数学期望表示该观测值的真值,即:

$$E(L) = [E(L_1) \quad E(L_2) \quad \dots \quad E(L_n)]^T = [\bar{L}_1 \quad \bar{L}_2 \quad \dots \quad \bar{L}_n]^T = \bar{L}$$

则有:

$$\Delta = E(L) - L \quad (2-3)$$

在此,我们用观测值的真值与观测值之差定义真误差,有些教材和文献用观测值与观测值的真值之差定义真误差。这两种定义方式仅仅是使真误差符号相反,对于后续各种计算公式的推导没有影响。

(2) 误差分布表

在某测区, 相同的条件下独立观测了 358 个三角形的全部内角, 由于观测值带有偶然误差, 故三内角观测值之和不等于其真值 180° 。各个三角形内角和的真误差为:

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1, 2, \dots, 358)$$

式中: $(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。

现取误差区间的间隔 $d\Delta$ 为 $0.20''$, 将这一组误差按其正、负号与误差值的大小排列, 统计误差出现在各区间内的个数 v_i , 以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率 v_i/n ($n=358$), 其结果如表 2-1 所示。

表 2-1 某测区三角形内角和的误差分布

误差值 ($''$)	小于 -1.60	-1.6	-1.4	-1.2	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	大于 1.6
个数	0	4	6	13	17	23	33	40	45	—	46	41	33	21	16	13	5	2	0
频率 ($\%$)	0	11	17	36	47	64	92	112	126	—	128	115	92	59	45	36	14	6	0
$\frac{v_i/n}{d\Delta}$ (10^{-3})	0	55	85	180	235	320	460	560	630	—	640	575	460	295	225	180	70	30	0

从表 2-1 可以看出, 偶然误差具有以下性质:

- ①在一定的观测条件下, 偶然误差的绝对值不会超过一定的限值, 也称有界性。
- ②绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多, 也称单峰性。
- ③绝对值相等的正、负误差出现的机会基本相等, 也称对称性。
- ④偶然误差的算术平均值随着观测次数的无限增加而趋于零, 也称补偿性。

(3) 直方图法

上述例子误差的分布情况, 除了采用表 2-1 的形式表达外, 还可用直方图来表达。例如, 以横坐标表示误差的大小, 纵坐标表示各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值, 即 $\frac{v_i/n}{d\Delta}$, 根据表 2-1 的数据绘制出图 2-1。此时, 图中每一个误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率, 如图 2-1 中画斜线的长方条面积就代表误差出现在 $0.4 \sim 0.6''$ 区间内的频率为 0.092。这种图称为直方图, 它形象地表示了误差分布情况。

(4) 误差概率分布曲线——正态分布曲线

当在同一观测条件下, 随着观测个数的无限增多, 即 $n \rightarrow \infty$ 时, 误差出现在各区间的频率也就趋于一个确定的数值, 这就是误差出现在各区间的概率。就是说在一定的观测条件下, 对应着一种确定的误差分布, 若 $n \rightarrow \infty$, $d\Delta \rightarrow 0$, 图 2-1 中各长方条顶边所形成的折线将变成如图 2-2 所示的一条光滑曲线。该曲线就是误差的概率分布曲线, 或称为误差分布曲线。

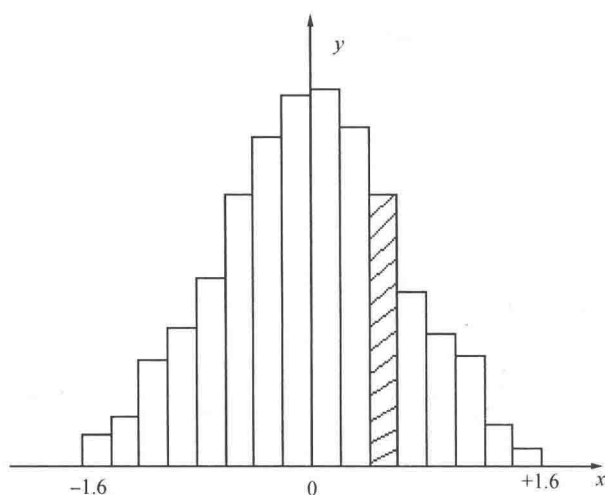


图 2-1 直方图

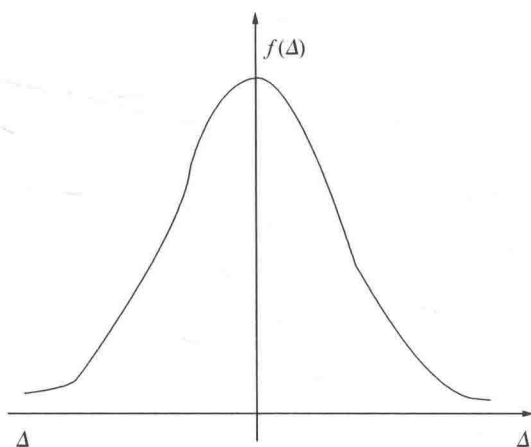


图 2-2 误差概率分布曲线

由此可见，偶然误差的频率分布随着 n 的逐渐增大，都是以正态分布为其极限的。通常也称偶然误差的频率分布为其经验分布，而将正态分布称为它们的理论分布，这样 Δ 的概率密度式为：

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

式中： σ 为标准差，测量上称中误差。

而误差出现在某一区间内的概率 $P(\Delta)$ 为：

$$P(\Delta) = f(\Delta) d\Delta$$

2.1.2 偶然误差的分布特性

通过以上讨论,可以进一步用概率术语概括出偶然误差的几个特性:

①在一定的观测条件下,误差的绝对值有一定的限值,或者说,超出一定限值的误差其出现的概率为零。

②绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。

③绝对值相等的正、负误差出现的概率相同。

④偶然误差的数学期望为零,即 $E(\Delta) = 0$, 换句话说,偶然误差的理论平均值为零,即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0 \quad (2-4)$$

式中: $[\Delta]$ 表示 $\sum_{i=1}^n \Delta_i$ 偶然误差的第4个特性是由前3个特性导出的。因为在大量的偶然误差中正、负误差有互相抵消的性能,当观测次数无限增加时,真误差的算术平均值必然趋向于零。

对于一系列的观测而言,无论其观测条件是好是差,也无论是对同一个量还是对不同的量进行观测,只要这些观测是在相同的条件下独立进行的,则所产生的一组偶然误差必然都具有上述的4个特性。掌握了偶然误差的特性,就能根据带有偶然误差的观测值求出未知量的最可靠值,并衡量其精度。同时,也可应用误差理论来研究最合理的测量工作方案和观测方法。

2.1.3 偶然误差的意义

(1) 制定测量限差的依据

由偶然误差的有界性可知:在一定的观测条件下,若仅有偶然误差的影响,误差的绝对值必定会小于一定的限值。在实际工作中,就可依据观测条件确定一个误差限值,若观测值的误差绝对值小于该限值,则认为观测值合乎要求,否则应剔除或重测。

(2) 判断系统误差(粗差)的依据

由偶然误差的对称性和偶然性可知,误差的理论平均值为零,即观测值的期望值为真值,观测值中不含有系统误差和粗差。若误差的理论平均值不为零,且数值较大,说明观测成果中含有系统误差和粗差。

任务2.2 衡量精度的指标

2.2.1 精度、准确度、精确度

(1) 精度

评定测量成果的精度是测量平差的主要任务之一。为了正确理解精度的含义,我们先分