HZ BOOKS
华章教育

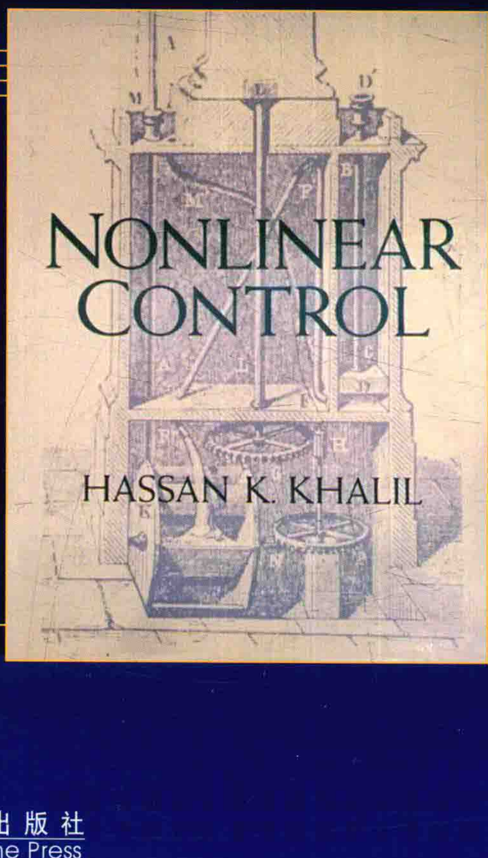
PEARSON

非线性控制

[美] 哈森 K. 哈里尔（Hassan K. Khalil）著

韩正之 王划 王少华 刘磊坡 谢七月 译

Nonlinear Control

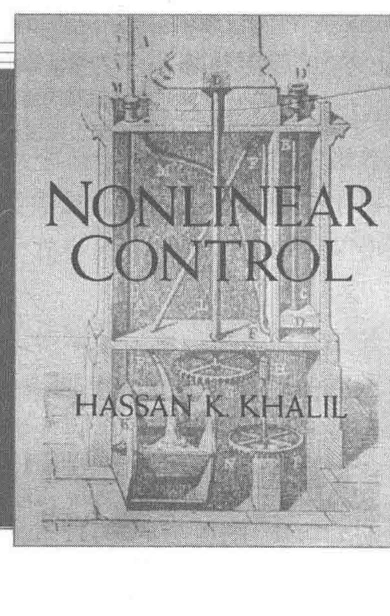


机械工业出版社
China Machine Press

非线性控制

[美] 哈森 K. 哈里尔（Hassan K. Khalil）著
韩正之 王划 王少华 刘磊坡 谢七月 译

Nonlinear Control



机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

非线性控制 /（美）哈里尔（Khalil, H. K.）著；韩正之等译．—北京：机械工业出版社，2016.2

（工业控制与智能制造丛书）

书名原文：Nonlinear Control

ISBN 978-7-111-52888-3

I. 非… II. ①哈… ②韩… III. 非线性控制系统－高等学校－教材 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 025433 号

本书版权登记号：图字：01-2014-2706

本书是非线性控制理论的入门教程。第 1 章给出了非线性现象的特征和全书的介绍。第 2~8 章讲述非线性控制系统的分析。第 9~13 章介绍非线性控制系统的设计，设计的核心是镇定，具体讲述了镇定设计的各种方法，为了讲述输出反馈，还专门讨论观测器的设计，考虑设计的鲁棒性，并推广到跟踪和调节问题。最后是附录，包括实际示例、数学知识和定理证明。这些实例是本书的重要内容，它们涉及全书的例题和练习，作为验证结论之用。

本书起点较低，论述相对浅显，而内容非常全面，可以作为大学本科讲授非线性控制系统理论的入门教材，也可以供从事控制工程设计的人员参考使用。

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）

责任编辑：张梦玲	责任校对：董纪丽
印　　刷：北京市荣盛彩色印刷有限公司	版　　次：2016 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：185mm × 260mm　1/16	印　　张：18.5
书　　号：ISBN 978-7-111-52888-3	定　　价：79.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604

购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

出版者的话

文艺复兴以来，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，信息学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的信息产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对我国教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其信息科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀教材将对我国教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自1998年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与Pearson、McGraw-Hill、Elsevier、John Wiley & Sons、CRC、Springer等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出Alan V. Oppenheim Thomas L. Floyd、Charles K. Alexander、Behzad Razavi、John G. Proakis、Stephen Brown、Allan R. Hambley、Albert Malvino、Peter Wilson 、H. Vincent Poor、Hassan K. Khalil、Gene F. Franklin、Rex Miller等大师名家的经典教材，以“国外电子与电气技术丛书”和“国外工业控制与智能制造丛书”为系列出版，供读者学习、研究及珍藏。这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也越来越多被实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着电气与电子信息学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外电气与电子信息教材的需求和应用都将步入一个新的阶段，我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方法如下：

华章网站：www. hzbook. com

电子邮件：hzjsj@hzbook. com

联系电话：(010)88379604

联系地址：北京市西城区百万庄南街1号

邮政编码：100037

HZ BOOKS
华章教育

华章科技图书出版中心

译者序

非常感谢机械工业出版社让我来翻译 Khalil 著的《Nonlinear Control》，这给了我一个推动国内的非线性控制系统理论教学和研究的机会。

1988 年 5 月，我通过博士学位论文答辩，当时，张钟俊教授担任答辩委员会主席，答辩结束后，老先生不容置辩地对我说，今天这里的答辩已经结束了，明天到上海交通大学报到，开展博士后的研究工作。他给我以及由我担任博士生副导师的研究团队的任务是开展对非线性控制系统理论的研究。记得他说过，线性系统的理论已经相对完善，控制理论肯定会向非线性系统发展，我们应该争得这个先机。当时现代非线性理论的代表是微分几何理论，能找到的教材只有 A. Isidori 著的《Nonlinear Control Systems》。记得我们首先学懂的是反馈线性化理论，谈自忠教授介绍过相关结论，但是为了真正弄明白，我们花了很多时间钻研微分几何。Froubinus 定理对于工科学生，即使是博士研究生也仍然是非常玄乎的东西，为了向学生解释向量场、分布和这个定理确实花了很多心思，包括向老先生解释这个定理的意义。

从那个时候开始，为了向我协助指导的和以后由我担任导师的博士生讲授非线性控制理论，我一直在寻觅一本理想的教材。尽管我们也按照“线性化、标准型、镇定、零动态方法、反步法、观测器、无源性理论”主题整理了大量的素材，但是一直没有定下心来编著这样一本教材。在我的研究室里，学生们广泛使用的是 Khalil 著的《Nonlinear Systems》，开始是英文版，后来有了中文译本。我们普遍觉得这本书非常全面，是一本辞书类的参考书，但不适宜做教材。即使我小范围地给学生讲解，也嫌内容多，但若挑部分内容来讲，由于破坏了原书的系统性，不免要时时补充讲解，很不方便，更不用说将其用作大班课堂教材了。

这次看到 Khalil 著的这本《Nonlinear Control》，读完它的前言，就觉得这是一本我们盼望已久的可以选为教材的书，于是欣然接受了翻译的任务。我翻译了前言和第 1 章，谢七月博士翻译了第 2 章～第 5 章、刘磊坡博士翻译了第 6 章～第 9 章，王划博士翻译了第 10 章～第 13 章，附录由她的同事王少华老师完成。他们的译稿经我审改和统稿，同时，我带的博士研究生吴海对照原文做了非常认真的校对。

作为教材，建议先让学生自学附录 A 的例子，在第一次课可以花 45 分钟介绍这些例子的内容和原理，而将具体的数学模型留给学生推导。从第二次课开始，讲述本书内容，基本上每次课(100 分钟)介绍一章。这样共用去 14 次课。在课堂上主要介绍结论和讲解例题，重点是这些内容的意义及其在全书中的作用。本书的各章内容相对独立，因此作为教师，进行适当的总结比较就显得很重要了。例如讲完第 4 章，可以总结一下关于稳定性的各种定义以及对应的 Lyapunov 判据；讲到第 10 章，可以总结三种系统设计方法，比较它们的设计特点和适用范围等。现在上海交通大学研究生课程每个学期是 16 周教学时间，每周两节课正好讲完全书。

尽管译者们都很熟悉非线性控制理论，翻译时也是斟酌再三，但错误仍然难免，原书也有一些明显的错误，虽然都做了处理，但恐有遗漏，敬请同行和读者赐教。

韩正之

2015 年 10 月

前　言

这本书可以看成是从我早期编写的《Nonlinear Systems》演化而来的，它不是那本书的第 4 版，也不能取代它。本书的宗旨和结构与《Nonlinear Systems》完全不同。《Nonlinear Systems》的定位是讲述非线性系统分析及其在控制中的应用的参考书或者教材，但是本书旨在作为非线性控制的入门教材，它用于一个学期大约 40 课时的教学。众所周知，严谨是非线性系统理论的特点，写作本书的定位是既不失严谨性，又能让最广大的受众可以接受，因此只有当证明过程对于结论的理解是必要的时候，我们才给出，其余的都给出了参考文献，需要的读者可以按需索骥。对于有些证明，部分读者寻找起来可能有困难，因此我们将它们罗列在本书的附录中。本书的篇幅大约只有《Nonlinear Systems》的一半，割舍了不少内容。那些被割舍的部分并非不重要，只是我觉得不适合入门学习而已。习惯使用《Nonlinear Systems》的教师可能不同意这样的裁减，所以他们依然可以将删减的内容融合进这本教材中，一起讲授。

教师们可以从出版商那里得到本书的电子版练习解答，还可获得部分题目的 Simulink 模型。本书的配套网站(http://www.pearsonhighered.com/khalil)还提供本书的勘误链接，用户可以通过此网站提交发现的内容错误，还可以从该网站获得本书的 PDF 课件，以及部分例子的 Simulink 模型。

书中的计算是通过 MATLAB 和 Simulink 完成的，插图是由 MATLAB 或 LATEX 的图形工具生成的。英文书封面背景描绘的是公元前 3 世纪埃及克特西比乌斯的水钟，这是有记录以来第一个反馈控制装置。

在本书的写作过程中，我得到了很多同事、学生以及《Nonlinear Systems》的读者、本书审稿人的帮助。感谢密西根州立大学为我的写作提供了一个良好的写作环境，也感谢美国自然科学基金会为我在非线性反馈控制研究中提供的资助。

Hassan Khalil

目 录

出版者的话
译者言
前言

第 1 章 引论 …… 1
1.1 非线性模型 …… 1
1.2 非线性现象 …… 6
1.3 全书概况 …… 7
1.4 练习 …… 8
第 2 章 二维系统 …… 12
2.1 线性系统的定性性质 …… 13
2.2 平衡点附近的定性性质 …… 16
2.3 多重平衡点 …… 18
2.4 极限环 …… 20
2.5 绘制相图的数字化方法 …… 23
2.6 练习 …… 24
第 3 章 平衡点的稳定性 …… 27
3.1 基本概念 …… 27
3.2 线性化 …… 31
3.3 Lyapunov 方法 …… 33
3.4 不变性原理 …… 39
3.5 指数稳定性 …… 42
3.6 吸引域 …… 44
3.7 Lyapunov 逆定理 …… 48
3.8 练习 …… 49
第 4 章 时变系统和扰动系统 …… 53
4.1 时变系统 …… 53
4.2 扰动系统 …… 56
4.3 有界性与终极有界性 …… 60
4.4 输入-状态稳定性 …… 66
4.5 练习 …… 70
第 5 章 无源性 …… 74
5.1 无记忆函数 …… 74
5.2 状态模型 …… 77
5.3 正实传递函数 …… 80
5.4 与稳定性的联系 …… 83
5.5 练习 …… 85
第 6 章 输入-输出稳定性 …… 88
6.1 $\mathcal{L}$稳定性 …… 88
6.2 状态模型的$\mathcal{L}$稳定性 …… 92
6.3 $\mathcal{L}_2$ 增益 …… 96
6.4 练习 …… 100
第 7 章 反馈系统的稳定性 …… 103
7.1 无源性定理 …… 103
7.2 小增益定理 …… 110
7.3 绝对稳定性 …… 113
7.4 练习 …… 122
第 8 章 特殊形式的非线性系统 …… 125
8.1 标准型 …… 125
8.2 控制器型 …… 131
8.3 观测器型 …… 137
8.4 练习 …… 142
第 9 章 状态反馈镇定 …… 145
9.1 基本概念 …… 145
9.2 线性化 …… 146
9.3 反馈线性化 …… 147
9.4 局部反馈线性化 …… 152
9.5 反步法 …… 155
9.6 基于无源性的控制 …… 160
9.7 控制 Lyapunov 函数 …… 164
9.8 练习 …… 167
第 10 章 状态反馈鲁棒镇定 …… 170
10.1 滑模控制 …… 170
10.2 Lyapunov 再设计方法 …… 184
10.3 高增益反馈 …… 189
10.4 练习 …… 191
第 11 章 非线性观测器 …… 194
11.1 局部观测器 …… 195
11.2 扩展 Kalman 滤波器 …… 196
11.3 全局观测器 …… 199
11.4 高增益观测器 …… 200
11.5 练习 …… 204
第 12 章 输出反馈镇定 …… 207
12.1 输出反馈线性化 …… 207

12.2 基于无源性的控制 …………… 208
12.3 基于观测器的控制 …………… 210
12.4 高增益观测器和分离原理 …… 212
12.5 最小相位系统的鲁棒稳定性 …………………… 218
12.6 练习 …………………… 224
第 13 章 跟踪与调节 …………… 226
13.1 跟踪控制 …………………… 228
13.2 鲁棒跟踪控制 ……………… 229
13.3 设定点间的转移 …………… 231
13.4 通过积分控制的鲁棒调节 …… 234
13.5 输出反馈 …………………… 237
13.6 练习 …………………… 239
附录 A 示例 …………………… 242
附录 B 数学知识概述 …………… 257
附录 C 组合 Lyapunov 函数 ……… 262
附录 D 证明 …………………… 267
参考文献 …………………… 272
符号表 …………………… 281
索引 …………………… 283

第1章 引　论

1.1 节定义了一类非线性系统的状态模型。这类模型将在全书得到广泛的应用。针对这类模型，该节还简要地讨论了三个相关概念：解的存在性与唯一性、变量替换、平衡点。1.2 节试图给出一个说明，解释在非线性系统的分析和设计中需要用到的一些非线性工具，以及说明我们为什么需要用到这些工具。1.3 节对随后的 12 章进行了一个简单的介绍。

1.1 非线性模型

考虑用一阶常微分方程组描述的动态系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_m) \\
\dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_m) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_m)
\end{aligned}$$

其中，$\dot{x}_i$ 表示变量 x_i 关于时间 t 的导数，u_1，u_2，…，u_m 是输入变量，x_1, x_2，…，x_n 称为状态变量，它们用来表示动态系统对于以前行为的一种记忆。我们常常用向量的形式将这个方程组写成一种紧凑的形式。如果记 1

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

那么前面这 n 个一阶微分方程组就可以写成一个一阶的 n 维向量微分方程

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{1.1}$$

我们称式(1.1)是以 x 为状态、u 为输入的状态方程。有的时候，会有另一个方程

$$y = h(t, x, u) \tag{1.2}$$

与式(1.1)一起出现。这个方程定义了一个 q 维的输出向量 y，向量 y 的分量是一些我们在研究中特别感兴趣的变量，例如那些可以物理测量到的信息或者用来刻画一些具体特征的变量。我们称式(1.2)为输出方程，而将式(1.1)和式(1.2)一起称为系统的状态空间模型，或者简称为状态模型。本书的附录 A 和本章后面的练习会给出一些非线性系统的状态模型。对于线性系统，式(1.1)和式(1.2)可以写成

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\
y &= C(t)x + D(t)u
\end{aligned}$$

有的时候，我们考虑式(1.1)的一种特殊情况，即系统不含有输入 u，这时就将式(1.1)写成

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.3}$$

对应的系统就称为无控制系统。之所以要考虑式(1.3)描述的系统，是因为如果系统已经指定了输入 $u=\gamma(t)$，或者采用了一个状态反馈 $u=\gamma(x)$ 或 $u=\gamma(t, x)$，在将它们代入系统后，式(1.1)中就不再出现输入 u 了，式(1.1)也就演变成无控制系统的式(1.3)。

在式(1.3)中，通常要求在讨论的范围内函数 $f(t, x)$ 关于时间 t 是分段连续的，而关于状态 x 是局部 Lipschitz 的。对于一个固定的 x，称 $f(t, x)$ 关于 t 在区间 $J\subset R$ 上是分段连续的意思是，对于有界子区间组成的集合 $J_0\subset J$，在 J_0 上 f 是连续的，而在 J_0 外的有
2 限个点上可能存在跃度有限的跳跃。采用这样的假设是因为 $f(t, x)$ 是依赖于输入 $u(t)$ 的，而它可能会随着时间产生阶跃型改变。对于一个给定的 $t\in J\subset R$，称 $f(t, x)$ 在点 x_0 附近关于 x 是局部 Lipschitz 的，即存在 x_0 的一个邻域 $N(x_0, r)$ $(N(x_0, r)=\{\|x-x_0\|<r\})$ 和正常数 L，使得 $f(t, x)$ 对一切 $t\in J$ 和 $x, y\in N(x_0, r)$ 满足所谓的 Lipschitz 条件

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant L\|x-y\| \tag{1.4}$$

其中，范数 $\|x\|$ 定义成

$$\|x\|=\sqrt{x^{\mathrm{T}}x}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

函数 $f(t, x)$ 称为在其定义域(这里总要求定义域是开的和连通的) $D\subset R^n$ 上是局部 Lipschitz 的，意思是它在 D 上的任意一点 $x_0(\in D)$ 是局部 Lipschitz 的。W 是一个集合，如果对 W 上任意两个点 x、$y(\in W)$，式(1.4)都成立，而且 L 与 x、y 的选择无关，那么称 $f(t, x)$ 在 W 上是 Lipschitz 的。在 D 上局部 Lipschitz 的函数可以不是 Lipschitz 的，因为在 D 上，Lipschitz 常数 L 可能不是一致的，即它可能依赖于 x。然而对于 D 中的一个紧子集(即有界闭集)来讲，局部 Lipschitz 的函数必定是 Lipschitz 的。如果一个函数在 R^n 上是 Lipschitz 的，则称它是全局 Lipschitz 的。

当 $n=1$ 的时候，如果 f 仅依赖于单个变量 x，这时 Lipschitz 条件就可以写成

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\leqslant L$$

这个不等式说明在 $x-f(x)$ 的图像上，连接任意两点的直线的斜率绝对值不会大于 L。因此任何一个在某点具有无穷大斜率的函数不可能在这点是局部 Lipschitz 的。例如对于任意一个不连续的函数，在其不连续的点处不可能是局部 Lipschitz 的。又如函数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处不是局部 Lipschitz 的，因为 $f(x)'=\left(\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}}$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)'=\left(\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}}\to\infty$。然而如果 $f'(x)$ 在 x_0 处是连续的，那么 $f(x)$ 在 x_0 处是局部 Lipschitz 的。这是因为如果 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，那么 $f'(x)$ 在 x_0 的一个邻域中有界，即存在常数 k，使得 $|f'(x)|\leqslant k$ 对这个邻域中的所有 x 成立，于是 $f(x)$ 在这个邻域中满足局部 Lipschitz 条件(见式(1.4))，并且它的 Lipschitz 常数可以取成 $L=k$。

更一般的结论如下：如果对 $t\in J\subset R$，$x\in D\subset R^n$(这里的 D 是开的连通的集，此后称这样的集合为区域)，$f(t, x)$ 及其偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 都是连续的，那么 $f(t, x)$ 在 D 上是局部 Lipschitz 的[⊖]。如果 $f(t, x)$ 及其偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 在 $x\in R^n$ 上都是连续的，那么 $f(t, x)$ 是全局 Lipschitz 的充分必要条件是 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 全局有界并关于 t 是一致的，即存在一个不依赖于 (t, x) 的

⊖　见文献[74，引理 3.2]中关于命题的证明。

常数 k，使得对于一切 $t\in J$ 和 $x\in R^n$，$\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|$小于或等于 k ㊀。 3

例 1.1 函数

$$f(x)=\begin{bmatrix}-x_1+x_1x_2\\ x_2-x_1x_2\end{bmatrix}$$

在 R^2 上是连续可导的，所以它是局部 Lipschitz 的。因为$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}$和$\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$在 R^2 上不是一致有界的，所以它不是全局 Lipschitz 的。可以证明在 R^2 的任意紧子集上它是 Lipschitz 的。假设我们想求在集合 $W=\{|x_1|\leqslant a,\ |x_2|\leqslant a\}$上的 Lipschitz 常数，需计算

$$|f_1(x)-f_1(y)|\leqslant|x_1-y_1|+|x_1x_2-y_1y_2|$$
$$|f_2(x)-f_2(y)|\leqslant|x_2-y_2|+|x_1x_2-y_1y_2|$$

应用不等式

$$|x_1x_2-y_1y_2|=|x_1(x_2-y_2)+y_2(x_1-y_1)|\leqslant a|x_2-y_2|+a|x_1-y_1|$$

和

$$|x_1-y_1||x_2-y_2|\leqslant\frac{1}{2}|x_1-y_1|^2+\frac{1}{2}|x_2-y_2|^2$$

得到：

$$\|f(x)-f(y)\|^2\leqslant|f_1(x)-f_1(y)|^2+|f_2(x)-f_2(y)|^2\leqslant(1+2a)^2\|x-y\|^2$$

所以 $f(x)$在 W 上是 Lipschitz 的，并且它的 Lipschitz 常数 $L=1+2a$。◀

例 1.2 函数

$$f(x)=\begin{bmatrix}x_2\\ -\mathrm{sat}(x_1+x_2)\end{bmatrix}$$

不是 R^2 上的连续可导函数。根据饱和函数的特征$|\mathrm{sat}(\eta)-\mathrm{sat}(\xi)|\leqslant|\eta-\xi|$(关于饱和函数的定义，请参阅 10.1 节)，可以得到

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\|^2&\leqslant(x_2-y_2)^2+(x_1+x_2-y_1-y_2)^2\\&\leqslant(x_1-y_1)^2+2(x_1-y_1)(x_2-y_2)+2(x_2-y_2)^2\end{aligned}$$

利用不等式

$$a^2+2ab+2b^2=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\leqslant\lambda_{\max}\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\right\}\times\left\|\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\right\|^2$$

可以得到

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant\sqrt{2.618}\|x-y\|,\quad\forall x,y\in R^2$$

这里我们应用了半正定矩阵的性质：$x^{\mathrm{T}}Px\leqslant\lambda_{\max}(P)x^{\mathrm{T}}x$ 对所有 $x\in R^n$ 成立，其中的 $\lambda_{\max}(P)$表示矩阵 P 的最大特征值。我们还可以通过下面的不等式得到一个保守一些的 Lipschitz 常数，由

$$a^2+2ab+2b^2\leqslant 2a^2+3b^2\leqslant 3(a^2+b^2)$$

可以得到 Lipschitz 常数 $L=\sqrt{3}$。◀ 4

$f(t,\ x)$的局部 Lipschitz 性质用来保证状态方程式(1.3)的解的存在性和唯一性，具体见下面的引理㊁。

㊀ 见文献[74，引理 3.3]中关于命题的证明。

㊁ 证明参见文献[74，定理 3.1]，也可以参考文献[56，62，95]，那里有关于解的存在性与唯一性的进一步论述和非线性微分方程的定性分析。

引理 1.1　设 $f(t, x)$ 关于 t 是分段连续的，并且对所有的 $t\in[t_0, t_1]$，$f(t, x)$ 在 x_0 处是局部 Lipschitz 的，那么存在 $\delta>0$，使得状态方程 $\dot{x}=f(t, x)$ 的初值问题 $x(t_0)=x_0$ 在 $[t_0, t_0+\delta]$ 上存在唯一解。

如果没有局部 Lipschitz 条件，解的唯一性可能得不到保证。例如考虑状态方程 $\dot{x}=x^{\frac{1}{3}}$，它的右端是连续的，但在 $x=0$ 处不是局部 Lipschitz 的。当初值取成 $x(0)=0$ 时，有两个不同的解 $x(t)=\left(\frac{2t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 和 $x(t)\equiv 0$。

引理 1.1 只是一个局部的结论，因为它只保证了在区间 $[t_0, t_0+\delta]$ 上解的存在和唯一，这个区间可能小于给定的 $[t_0, t_1]$。下面例子说明了确实存在这样的方程，解在一段时间之后便不存在了。

例 1.3　考虑一维系统 $\dot{x}=-x^2$，函数 $f(x)=-x^2$ 对于所有的 x 都是局部 Lipschitz 的。但是如果将初值取成 $x(0)=-1$，它的解是 $x(t)=\frac{1}{t-1}$。当 $t\rightarrow 1$ 时，$x(t)\rightarrow -\infty$。◀

“有限逃逸时间”就是用来描述这种现象的，它是指当时间 t 趋向一个有限值，解却趋向无穷大。在例 1.3 中，我们可以称这个解具有有限逃逸时间 $t=1$。

在下面的引理 1.2 和引理 1.3 中⊖，我们将给出解全局存在和唯一的条件。引理 1.2 要求函数 $f(t, x)$ 是全局 Lipschitz 的，而引理 1.3 只要求 $f(t, x)$ 是局部 Lipschitz 的，但需要一个附加的条件，即解是有界的。在例 1.3 中，函数 $f(x)=-x^2$ 对于所有的 x 是局部 Lipschitz 的，但是它不是全局 Lipschitz 的，因为 $f'(x)=-2x$ 不是全局有界的。

引理 1.2　设 $f(t, x)$ 关于 t 是分段连续的，并且对所有的 $t\in[t_0, t_1]$，$f(t, x)$ 是全局 Lipschitz 的，那么状态方程 $\dot{x}=f(t, x)$ 的初值问题 $x(t_0)=x_0$ 在 $[t_0, t_1]$ 上存在唯一解。

如下的线性系统满足全局 Lipschitz 条件，

$$\dot{x}=A(t)x+g(t)$$

其中，$\|A(t)\|\leqslant L$ 对所有的 $t\geqslant t_0$ 成立。引理 1.2 给出的全局 Lipschitz 条件对于一般的非线性系统来讲是一个过强的限制条件。下面的引理可以不需要这个条件。

引理 1.3　设 $f(t, x)$ 关于 t 是分段连续的，并且对所有的 $t\geqslant t_0$，在关于 x 的区域 $D\subset R^n$ 上 $f(t, x)$ 是局部 Lipschitz 的。设 W 是 D 中的一个紧子集，$x_0\in W$，并进一步设

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0$$

5 的解在 $t\geqslant t_0$ 时都在 W 内，那么这个解是 $t\geqslant t_0$ 的唯一解。

应用引理 1.3 的技巧在于只要判别解是否都包含在一个紧集之内，而不必解出状态方程。在第 3 章我们会看到，用于稳定性分析的 Lyapunov 方法是验证这个事实的一种有用的工具。下面的例子可以说明这个引理的应用。

例 1.4　考虑一维系统

$$\dot{x}=-x^3=f(x)$$

的函数 $f(x)$ 在 R 上是局部 Lipschitz 的，但是因为 $f'(x)=-3x^2$ 不是全局有界的，因此 $f(x)$ 不是全局 Lipschitz 的。如果在任何时候 $x(t)$ 总是正的，那么 $\dot{x}(t)$ 总是负的，所以 $x(t)$ 是递减的。同样，如果在任何时候 $x(t)$ 总是负的，那么 $\dot{x}(t)$ 总是正的，所以 $x(t)$ 是递

⊖ 证明分别参见文献[74，定理 3.2]、文献[74，定理 3.3]。

增的。因此满足初始条件 $x(0)=a$ 的解不会离开紧集 $\{|x|\leqslant a\}$。应用引理 1.3 可以断定，对于任意 $t\geqslant 0$，方程的解是唯一的。 ◀

式(1.3)的一种特殊情况是 f 不显含变量 t，即

$$\dot{x}=f(x)$$

这样的状态方程称为是自治的，或者是时不变的。自治系统的特性是对时间做变换不会影响系统性质，这是因为将时间 t 变成 $\tau=t-a$，方程的右面是不变的。不是自治的系统就称为非自治的或者是时变的。

更一般地，如果在状态模型式(1.1)和式(1.2)中都不显含 t，那么称这个系统是时不变的，这时

$$\dot{x}=f(x,u),\quad y=h(x,u)$$

如果 f 和 h 中有一个显含 t，那么这个状态模型就称为时变的。时不变状态模型有这样一个性质：如果将初始时间从 t_0 变为 t_0+a，在输入信号中用 t_0+a 代替 t_0，那么状态模式是不变的。具体说，如果用$(x(t)$、$y(t))$表示初始时刻为 t_0、初始状态 $x(t_0)=x_0$、输入为 $u(t)$时 $t\geqslant t_0$ 的状态和输出在 t 时刻的值，用$(\widetilde{x}(t)$、$\widetilde{y}(t))$表示初始时刻为 t_0+a、初始状态$\widetilde{x}(t_0+a)=x_0$、输入为 $u(t)$时 $t\geqslant t_0+a$ 的状态和输出在 t 时刻的值，那么$\widetilde{x}(t)=x(t-a)$和$\widetilde{y}(t)=y(t-a)$对一切 $t\geqslant t_0+a$ 成立。因此不失一般性，对于时不变系统，可以固定初始时刻为 $t_0=0$。

用变量替换 $z=T(x)$可以将状态方程中的 x 坐标转换成 z 坐标，这种转换是一种非常有用的分析工具。在线性系统中，这种变换就是坐标变换 $z=Px$，其中要求 P 是一个非奇异矩阵。对于非线性系统，变换 $z=T(x)$中映射 T 必须是可逆的，即它必须存在逆映射 $T^{-1}(\cdot)$，使得 $x=T^{-1}(z)$对所有的 $z\in T(D)$成立，这里的 D 是 T 定义的区域。进一步， 6
由于要求 z 和 x 的导数都是连续的，所以要求 $T(\cdot)$和 $T^{-1}(\cdot)$都是连续可导的。一个连续可导的映射同时又存在连续可导的逆映射，那么这个映射就称为微分同胚。称一个映射$T(x)$在点 x_0 处局部微分同胚，是指 x_0 存在一个邻域 N，使得 T 限制在 N 上是一个微分同胚。如果它是 R^n 上的微分同胚，而且 $T(R^n)=R^n$，那么它就是全局的微分同胚。用$\left[\dfrac{\partial T}{\partial x}\right]$表示 T 的 Jacobi 矩阵，即它的第$(i,\ j)$元素是偏微分$\dfrac{\partial T_i}{\partial x_j}$。下面的引理给出 $z=T(x)$是局部或者全局微分同胚的条件[⊖]。

引理 1.4 如果 Jacobi 矩阵$\left[\dfrac{\partial T}{\partial x}\right]$在 x_0 处是可逆的，则连续可导映射 $z=T(x)$在 x_0 处是局部微分同胚。如果 Jacobi 矩阵$\left[\dfrac{\partial T}{\partial x}\right]$在所有 $x\in R^n$ 上是可逆的，而且是正则的，即 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\|T(x)\|=\infty$，则连续可导映射 $z=T(x)$在 x_0 处是全局微分同胚。

例 1.5 附录 A.4 节给出了两个负阻振荡器的微分模型。通过下面的变换

$$z=T(x)=\begin{bmatrix}-h(x_1)-\dfrac{x_2}{\varepsilon}\\ x_1\end{bmatrix}$$

⊖ 局部的结论可以从逆函数定理得到，参考文献[3，定理 7.5]。关于全局的证明可以在文献[117]或[150]中找到。

可以看出这两个模型是关联的。假设 $h(x_1)$是连续可导的，那么 $T(x)$的 Jacobi 矩阵就是

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial T_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial T_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-h'(x_1) & -\dfrac{1}{\varepsilon}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

它的行列式是$\dfrac{1}{\varepsilon}$，是一个正数。进一步，因为

$$\|T(x)\|^2=\left[h(x_1)+\frac{x_2}{\varepsilon}\right]^2+x_1^2$$

所以 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\|T(x)\|=\infty$，即 $T(x)$是正则的。特别地，如果 $|x_1|\to\infty$，则 $\|T(x)\|\to\infty$；如果 x_1 是有限的，而 $|x_2|\to\infty$，则$\left[h(x_1)+\dfrac{x_2}{\varepsilon}\right]^2\to\infty$，从而 $\|T(x)\|\to\infty$。◀

平衡点是状态方程的重要特性。x^* 称为方程 $\dot{x}=f(t,x)$的平衡点，如果这个方程有常数解 $x(t)\equiv x^*$。对于时不变方程 $\dot{x}=f(x)$，平衡点就是方程 $f(x)=0$ 的实数解。

如果一个平衡点附近没有其他平衡点，那么这个平衡点就是孤立的，否则就是连续的平衡点。对于线性方程 $\dot{x}=Ax$，如果 A 是非奇异的，那么 $x=0$ 就是孤立平衡点；如果 A
7 是奇异的，那么 A 的零空间就是连续的平衡点；如果 x_a 和 x_b 是两个平衡点，那么经过 x_a 和 x_b 的直线 $\alpha x_a+(1-\alpha)x_b$ 上所有的点都是平衡点，因此线性方程不可能有多个孤立的平衡点。但是一个非线性状态方程可以具有多重的孤立平衡点，例如下面的单摆方程

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\sin x_1-bx_2$$

$x_1=n\pi$，$x_2=0$($n=0$，±1，±2，…)都是孤立的平衡点。

1.2 非线性现象

对于线性系统而言，*叠加原理*是一个非常有用的工具。当我们将视线从线性转向非线性的时候，就会发现情形变得复杂了，叠加原理不再成立，相关分析和研究涉及一些更现代的数学方法。鉴于人们对线性系统已经能应用自如，所以研究非线性系统的第一步就是将它线性化。在操作点附近将它线性化，然后再分析、研究得到线性模型。这是工程中常用的一种手段，也是非常有效的一种手段。然而，这样的线性化很有局限性，主要表现为两方面：首先，这种线性化只是在操作点附近对原系统的一种近似，只能揭示一个非线性系统在操作点附近的**局部**习性，它无法揭示远离该操作点的**非局部**的性质，更不能反映系统在整个状态空间的**全局**性质；其次，非线性系统的动态特性远比线性系统来得丰富，那些称为**本质非线性**的现象只可能在非线性模型中发生，在线性模型中是不可能得到反映的。下面给出一些本质非线性现象。

- *有限逃逸时间*。一个不稳定的线性系统，它的状态在时间趋于无穷大时可能会趋向无穷大；然而一个非线性系统，它的状态可能会在有限时间内就趋向无穷大。
- *多重孤立平衡点*。一个线性系统只能有一个孤立的平衡点，这意味着稳态工作点只有一个。不管初始条件是什么，达到稳态的时候，状态都趋向这个值。一个非线性系统可以有不止一个孤立平衡点，这意味着可以有多个稳态工作点，这样系统最后的稳态值就会依赖初始条件，初始条件不同会使系统稳态处于不同的工作点。
- *极限环*。如果一个线性系统产生振荡，那么它必然有一对纯虚数特征值。这个条件不是鲁棒的，因为稍有扰动，系统的特征值就会漂移而偏离虚轴。而且即使有振荡，

这个振荡的幅值也与初始条件有关。在现实世界中，稳定的振荡只能出现在非线性系统中。非线性系统能够产生固定幅值和固定频率的振荡，这些频率和幅值都与初始条件无关。这种类型的振荡被称为极限环。 8

- 次谐振、谐振或概周期振荡。对一个稳定的线性系统输入一个周期信号，那么会输出一个同频率的周期信号。但是对一个非线性系统输入一个周期信号，输出则可能是输入频率分频或者倍频的振荡，甚至会产生概周期的振荡。一个典型的概周期振荡例子是所产生的振荡即为几个不是同一基频倍数的周期振荡的叠加。
- 混沌。非线性系统可能产生比平衡点、周期振荡或者概周期振荡更复杂的稳态现象，这种现象称为混沌。某些混沌有点像随机现象，但却是系统确定性的特性。
- 响应呈多重模态。同一个非线性系统可能产生多于一个的模态。例如对于一个没有控制输入的系统可能存在不止一个极限环；对于一个具有输入的的系统，随着输入频率或者幅值的不同，可能产生次谐振、谐振或者概周期振荡等复杂的稳态现象。甚至是，输入只是光滑地改变了振幅和频率，输出却会产生不连续的跳跃。

本书主要集中于讨论前三种非线性现象[⊖]。在例 1.3 中我们已经给出了有限逃逸时间的例子，关于其他两种情形的例子将在下一章给出。

1.3 全书概况

本书关于非线性控制的研究是从介绍非线性分析工具开始的，因为在以后的非线性系统分析和设计中会频繁地应用这些工具。

第 2 章引进了二维系统的相平面分析并列举了一些本质非线性特性。随后 5 章讨论了非线性系统的稳定性分析。第 3 章定义和研究了时不变系统平衡点的稳定性；给出了线性系统、线性化和一维系统的一些基本结论；介绍了 Lyapunov 稳定性理论(它是非线性系统稳定性研究的主要工具)。Lyapunov 理论的关键在于寻找一个定义在状态变量上的标量函数，这个函数和它的导数需要满足一定的条件，这类函数称为 Lyapunov 函数。可以说在 Lyapunov 理论中最具有挑战性的工作就是寻找 Lyapunov 函数。一直到第 7 章结束，读者都可以看到很多设计 Lyapunov 函数的范例，并且可以在附录 C 中找到进一步的相关知识。 9
第 4 章将 Lyapunov 稳定性理论推广到时变系统，读者可以看到它在扰动系统分析中是如何发挥作用的。这章还推导出了系统的输入-状态稳定性。第 5 章讨论了一类特殊的非线性系统，这类系统具有耗散能量的特性。这一章强调了无源性和 Lyapunov 稳定性之间的关系。第 6 章讨论输入-输出稳定性，指出这种稳定性也可以采用 Lyapunov 函数来研究。第 5 章和第 6 章介绍的那些理论将在第 7 章得到应用，第 7 章将给出由两个稳定系统连接起来的复合系统保持稳定的条件。

最后的 6 章讨论非线性系统的控制。第 8 章给出一些特殊形式的非线性系统，这些系统在非线性系统设计中扮演着重要的角色。第 9 章～第 13 章考虑非线性控制问题，其中包含了非线性观测器的设计。将要研究的非线性控制技术可以分成下列 5 个范畴。

- 非线性近似。
- 非线性补偿。
- 主导非线性。

⊖ 关于后三种现象，读者可以参考文献[52, 55, 136, 146]。

- 固有性质的利用。
- 分割和综合。

线性化是非线性近似最重要的范例。反馈线性化可以看作非线性补偿的一个例子。建立于经典高增益反馈技术上的鲁棒控制可以认为是一种主导型非线性技术。基于系统无源性的控制可以认为是基于系统本质的一种控制技术。随着非线性系统维数的增长，研究的复杂度也迅速增长，一种有效的方法就是将这些系统分解成维数较低的子系统，而这些子系统可能比较容易研究和设计。在这些子系统设计完成后再来研究整个系统的设计，这就是分割与综合。反步法可以是分割和综合的一个实例。

在本书的最后给出了 4 个附录，它们分别给出非线性状态空间模型的例子、数学基础、构造复合 Lyapunov 函数的过程以及一些定理的证明。本书介绍的内容可能与一些优秀的教程有重复之处，而这些教程可以供有兴趣的读者进一步学习，具体包括文献[10，53，63，66，92，118，129，132，144]。本书内容的主要来源是文献[74]，该书提供了很多参考资料，建议读者通过书中的注释和参考资料来获取进一步的参考知识。

1.4 练习

1.1 单输入单输出的非线性系统常常可以用一个 n 阶的微分方程

$$y^{(n)} = g(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}, u)$$

10 来描述。其中，u 是输入，y 是输出。试写出它的状态模型。

1.2 一个具有单关节的机械臂在忽略了阻尼作用之后可以用下面的非线性动态方程组来描述[135]，

$$I\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0, \quad J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u$$

其中，q_1 和 q_2 是转角，I 和 J 是转动惯量，k 是弹性系数，M 是总的质量，L 是距离，u 是输入的力矩。

(1) 用 q_1、$\dot{q}_1$ 和 q_2、$\dot{q}_2$ 作为状态变量，写出它的状态方程。

(2) 证明当 u 取常数时，上述方程的右端是全局 Lipschitz 的。

(3) 取 $u=0$，找出系统的平衡点。

1.3 接入无限母线时同步发电机可以描述成[103]

$$M\ddot{\delta} = P - D\dot{\delta} - \eta_1 E_q \sin\delta, \quad \tau\dot{E}_q = -\eta_2 E_q + \eta_3 \cos\delta + E_F$$

其中，δ 是转角，E_q 是电压，P 是输入的机械能，E_F 是输出电压，D 是阻尼常数，M 是惯性常数，τ 是时间常数，η_1、η_2 和 η_3 是一些正常数。

(1) 用 δ、$\dot{\delta}$ 和 E_q 作为状态变量，写出它的状态方程。

(2) 当 P 和 E_F 都是常数时，证明上述方程的右端是局部 Lipschitz 的，它是全局 Lipschitz 的吗？

(3) 当 P 和 E_F 都是常数时，并满足 $0<P<\dfrac{\eta_1 E_F}{\eta_2}$，证明状态方程在 $0\leqslant\delta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 内有唯一的平衡点。

1.4 图 1.1 所示的电路具有一个非线性电感和时变的电流源。假设非线性电感采用

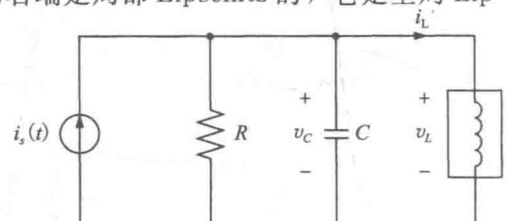


图 1.1 练习 1.4 和练习 1.5

Josephson式连接[25]，即可以用 $i_L=I_0\sin k\phi_L$ 来描述，其中，ϕ_L 是磁链，I_0 和 k 都是常数。

(1) 用 ϕ_L 和 v_C 作为状态变量，写出状态方程。

(2) 当 i_s 是常数时，证明右端的方程是局部 Lipschitz 的，它是全局 Lipshitz 的吗？

(3) 设 $i_s=I_s$，取常数值，找出在 $0<I_s<I_0$ 时系统的平衡点。

1.5　再做上面的练习 1.4，其中的非线性电感换成 $i_L=k_1\phi_L+k_2\phi_L^3$，$k_1$、$k_2$ 都是正常数，在第(3)问中 $0<I_s$。

1.6　图 1.2 给出一辆汽车在坡度是 θ 的路上行驶，其中的 v 是汽车的速度，M 是其质量，F 是电动机产生的驱动力。设摩擦是 Coulomb 型的，即线性粘性摩擦，正比于速度 v^2。将 F 看成控制输入，将 θ 看成扰动输入，写出系统的状态模型。 11

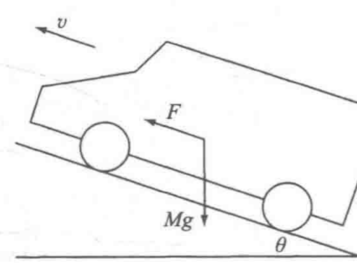


图 1.2　练习 1.6

1.7　锁相环可以用图 1.3 来描述[45]。设 $G(s)$是严格正则的单输入-单输出系统，它的最小实现是$\{A, B, C\}$，假设 A 的特征根都具有负实部，$G(0)\neq 0$，θ_i 为常数。设 z 是实现$\{A, B, C\}$的状态变量。

(1) 证明闭环系统可以表示成

$$\dot{z}=Az+B\sin e,\quad \dot{e}=-Cz$$

(2) 求出系统的平衡点。

1.8　质量-弹性系统如图 1.4 所示，假设弹簧是线性的，而阻尼是粘性的，粘性阻尼可以描写成 $c_1\dot{y}+c_2\dot{y}|\dot{y}|$，求描述这个系统的状态方程。

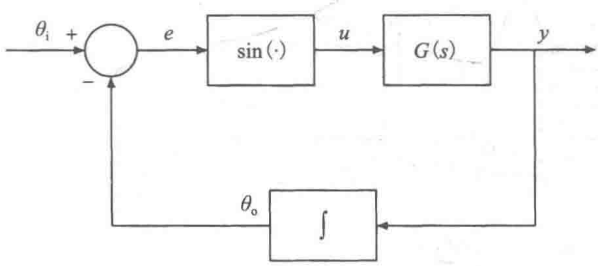


图 1.3　练习 1.7

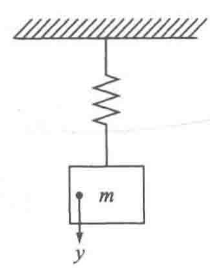


图 1.4　练习 1.8

以下的 3 个问题都是关于液压系统的[27]。

1.9　图 1.5 给出一个液压系统，液体是储存在一个开口的容器中，容器的截面积 $A(h)$是液面高 h 的函数，于是，液体的体积 v 就是 $\int_0^h A(\lambda)\mathrm{d}\lambda$。假设液体的密度是 ρ，绝对压强就是 $p=\rho gh+p_a$，其中 p_a 是大气压，g 是重力加速度，假设它们都是常数。注入容器的液体流速为 w_i，液体经过一个阀门流出，流速满足关系 $w_o=k\sqrt{p-p_a}$。体积 v 变化的速率满足 $\dot{v}=w_i-w_o$。将 w_i 看成系统的控制输入，h 作为输出。 12

(1) 将 h 选为状态变量，写出它的状态模型。

(2) 将$(p-p_a)$作为状态变量，写出它的状态模型。

(3) 求出一个常数输入，它使得液面高度 h 等于一个常数值 r。

1.10　考虑图 1.6 所示的液压系统，左端常速的离心泵向容器注入液体，液体经右端的管