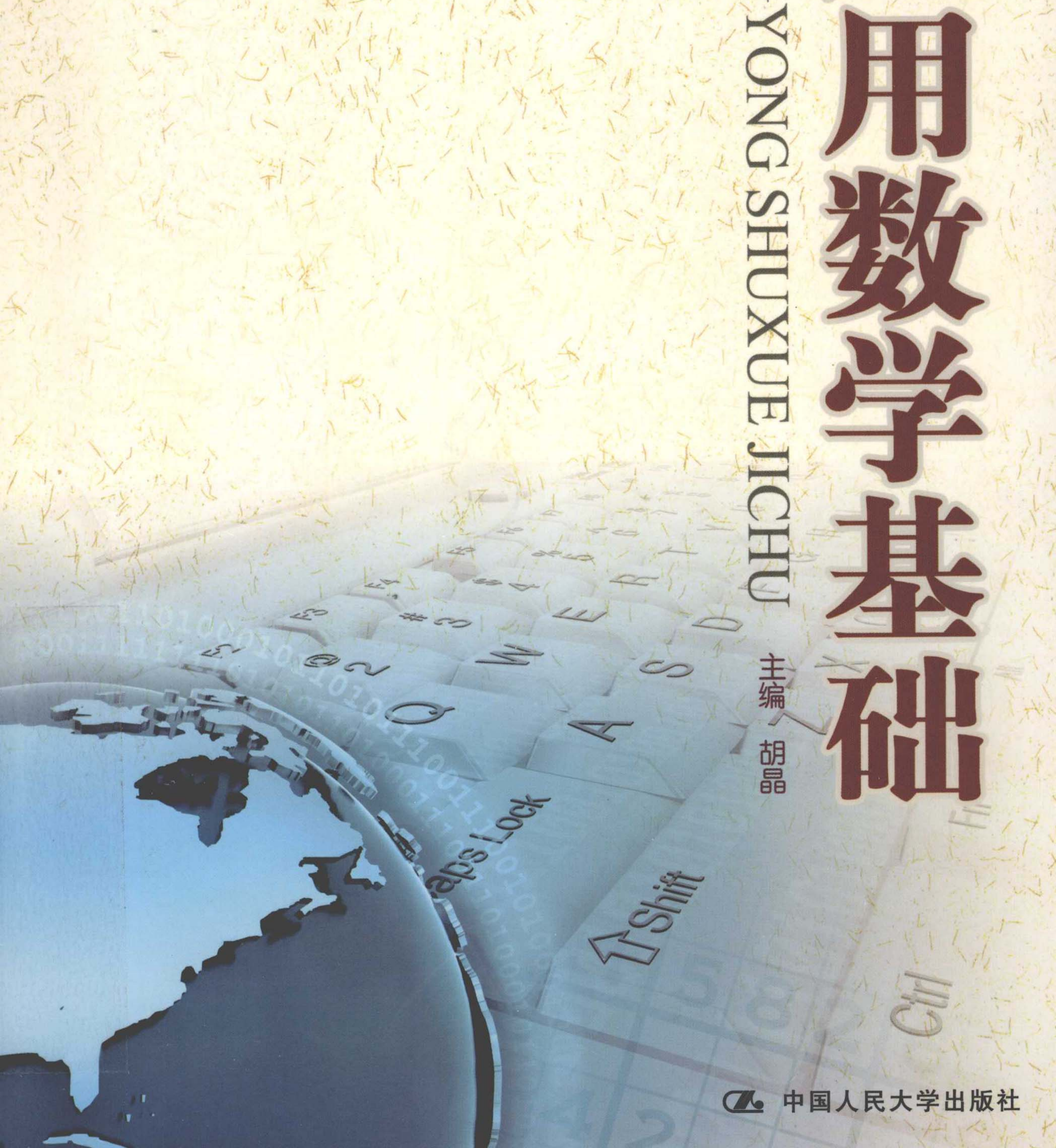
应用数学基础

YINGYONG SHUXUE JICHU

主编　胡晶



中国人民大学出版社

应用数学基础

主　编　胡　晶
副主编　乔海英　牛换生　胡宗河

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础/胡晶主编. —北京：中国人民大学出版社，2012.4
ISBN 978-7-300-15295-0

Ⅰ.①应… Ⅱ.①胡… Ⅲ.①应用数学-教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第032866号

应用数学基础
主　编　胡晶

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京诚顺达印刷有限公司		
规　格	185 mm×260 mm　16开本	**版　次**	2012年4月第1版
印　张	16.5	**印　次**	2012年4月第1次印刷
字　数	368 000	**定　价**	29.00元

前　言

高等数学由于它的基础作用，它提供的理论与方法的巧妙以及它在应用时的简洁和有效，使得它已经成为当代科学与技术进步、经济与社会发展离不开的一门基础学科. 为了满足各类人才培养的需要，适用于不同层次、不同专业的高等数学教材大量涌现，我们认为，一部好的高等数学教材，除了应具备科学性、系统性、严肃性之外，还必须有利于学生在教师引导下的主动学习. 因此，有两点显得特别重要：一是针对性，即根据培养目标、读者的基础和学习需要，对教材有一个准确的定位. 这样，教材内容的确定、素材的选取、结构和时间的安排等都能与之相适应，做到定位准确、结构合理、针对性强. 二是可读性，即在语言文字上下工夫，在表现方式上有“悬念情节”，要“有味道”，破除人们对数学教材是那种“枯燥无味的符号文字游戏”的误识.

本书是为高等职业教育、开放教育理工类和经济类学生编写的一部应用数学基础教材，其内容是高等数学的一部分，要求学生具有简单的一元函数微积分的基础. 本书将所有内容分为三编，分别涉及线性代数、概率论和数理统计三个数学分支. 由于它涵盖面宽，各个分支知识内容的思维方式有所不同，知识的衔接性不太强，甚至有些内容初学时难以理解. 比如，概率论与数理统计基础部分，学生普遍感到课难懂、书难念、题难做. 为此，在本书的编写过程中，我们注意做到以下几点：

1. 针对学习对象群体的文化基础水平、理工类和经济类专业特点以及培养目标，恰当定位，以提高学生的文化素质和培养学生量化分析问题的意识为宗旨.

2. 以基本、实用、易自学、易掌握为原则，遵循知识体系的系统性与科学性，但不追求知识体系的完整性，一些定理只给出结论而不进行大篇幅的逻辑推理证明，淡化理论性，注重实用性.

3. 在一些概念的描述上，大胆对传统和现行教材进行改革尝试，如逆矩阵定义等与

传统定义有所不同，在不失科学性和严谨性的前提下，力求精简，使学生更容易接受.

4. 注意用通俗的语言引入概念，结合实际生活中注意到或还没有注意到的实际案例，介绍用于解决问题的数学思想或方法. 让学生在学习数学的过程中，一方面感到“有味道、有兴趣”，数学不再深奥，数学不再难学，数学就在我们身边；另一方面也感悟到数学思想的深刻性，还体会到数学知识的基础性和数学应用的广泛性.

5. 在讲清基本概念、基本思想的基础上，在基本定理、基本方法的应用上下工夫，尽量从多个方面给出一定数量的例题和习题，帮助学生对知识内容的深刻理解，解决好做题难的问题.

6. 除第 3 章外，每章都有相应的 MATLAB 数学实验，学生通过学习 MATLAB 应用软件，掌握该软件的基本操作技能和方法，对所学内容进行数学验证、推理或计算，这有助于提高学生运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并为今后的进一步学习和从事实际工作奠定一定的基础.

7. 为了减轻学生的学习负担和经济负担，尽可能做到突出重点和有效解决难点，争取一部文字教材解决问题. 每一编试图通过“引子”从学生学过的知识内容中引出本编的内容，介绍本编所要解决的问题，引起学生学习的兴趣；学生容易混淆或易错的地方以黑体“注意”的方式给予提示；关键之处给出一些“思考题”引导学生深入思考；部分带“*”号内容仅供学有余力的学生选读；每章开始设有学习要求，最后配有知识考核点及典型试题，学生学习完一章内容后可以归纳总结和自我测试；本书的最后一节给出一个真实的案例分析，将本书各编的知识内容进行综合运用，同时引导学生注意将所学的数学思想和方法应用到社会生产、生活中分析与解决实际问题.

通过本课程的学习，学生应能了解并能够处理好多个变量之间的线性关系问题，掌握研究和解决随机现象统计规律性问题的基本思想和基本方法.

本书由胡晶教授担任主编，乔海英、牛换生、胡宗河担任副主编，各部分编写人员情况是：第 1 章由胡晶、韩晓东、梁晶晶编写；第 2 章由乔海英编写；第 3 章由胡宗河、赵凌华编写；第 4 章由胡晶、肖欣、王惠书编写；第 5 章由胡晶、牛换生编写；第 6 章由胡晶编写；各章 MATLAB 数学实验均由乔海英、牛换生编写. 徐兰栓教授将全部习题及答案进行了审核和校正. 全书由胡晶教授统稿. 张存桂教授、高俊科教授仔细审阅了全部书稿，提出了许多宝贵意见，王金山老师对此书的编写也提出了许多好的建议，在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，虽为使本书达到最好效果尽了最大努力，但疏漏之处在所难免，诚望各位同行、老师、学生、读者给予批评指正.

编者

2012 年 2 月

目 录

第一编 线性代数

引子 ………………………………………… 1
第1章 矩阵 ………………………………… 3
§1.1 矩阵的概念及代数运算……… 4
1.1.1 矩阵的概念……………… 4
1.1.2 矩阵的代数运算………… 5
习题1.1 ………………………………… 13
§1.2 几种特殊矩阵 ……………… 14
1.2.1 单位矩阵 ……………… 15
1.2.2 数量矩阵 ……………… 15
1.2.3 对角矩阵 ……………… 15
1.2.4 三角矩阵 ……………… 17
1.2.5 对称矩阵 ……………… 17
习题1.2 ………………………………… 18
§1.3 方阵的行列式 ……………… 19
1.3.1 方阵行列式的递归定义 ……………………… 19
1.3.2 行列式的性质 ………… 23
1.3.3 行列式的计算 ………… 27
1.3.4 方阵乘积行列式定理 … 31
1.3.5 克莱姆法则 …………… 32
习题1.3 ………………………………… 34
§1.4 可逆矩阵 ……………………… 35
1.4.1 可逆矩阵与逆矩阵 …… 35
1.4.2 可逆矩阵的判别与逆矩阵的求法 ………………… 36
1.4.3 可逆矩阵的性质 ……… 39
习题1.4 ………………………………… 41
§1.5 矩阵的初等行变换与矩阵的秩 ………………………… 42
1.5.1 矩阵的初等行变换 …… 42
1.5.2 初等矩阵 ……………… 43
1.5.3 矩阵的秩 ……………… 46
1.5.4 运用初等行变换求逆矩阵 ……………………………… 49
习题1.5 ………………………………… 52
§1.6 分块矩阵 ……………………… 53
1.6.1 矩阵分块 ……………… 53
1.6.2 分块矩阵的运算 ……… 54
习题1.6 ………………………………… 57
§1.7 MATLAB数学实验 ……… 58

1.7.1 MATLAB 软件介绍 … 58
1.7.2 矩阵运算的范例 ……… 59
1.7.3 求方阵行列式的范例 … 60
知识考核点与典型试题举例………… 61
第 2 章 线性方程组 …………………… 66
§2.1 高斯消元法 ………………… 67
2.1.1 线性方程组及其矩阵表示 ……………………… 67
2.1.2 高斯消元法 …………… 68
2.1.3 线性方程组全部解的矩阵形式 ………………… 73
习题 2.1 ……………………………… 73
§2.2 线性方程组的相容性定理 … 73
习题 2.2 ……………………………… 75
§2.3 n 维向量及线性相关性 …… 76
2.3.1 n 维向量及线性表出的概念 ……………………… 76
2.3.2 向量组的线性相关性 … 79
习题 2.3 ……………………………… 83
§2.4 极大无关组及向量组的秩 … 84
2.4.1 极大无关组及向量组的秩的概念 …………… 84
2.4.2 向量组的秩及极大无关组的求法 …………… 85
习题 2.4 ……………………………… 87
§2.5 齐次线性方程组解的结构 … 88
2.5.1 齐次线性方程组解的性质 ………………… 88
2.5.2 齐次线性方程组的基础解系及通解 ………… 88
2.5.3 关于齐次线性方程组解的有关结论 ………… 91
习题 2.5 ……………………………… 91
§2.6 非齐次线性方程组解的结构 ……………………………… 91
2.6.1 非齐次线性方程组解的性质 ………………… 91
2.6.2 非齐次线性方程组解的结构及通解 ………… 92
2.6.3 关于非齐次线性方程组解的有关结论 ……… 94
习题 2.6 ……………………………… 94
§2.7 MATLAB 数学实验 ……… 95
2.7.1 求矩阵的秩和向量组的秩 ……………………… 95
2.7.2 求线性方程组的解 …… 95
知识考核点与典型试题举例………… 98

第二编 概率论

引子 …………………………………… 103
第 3 章 随机事件与概率 …………… 105
§3.1 随机事件……………………… 105
3.1.1 随机试验与随机事件 ……………………… 105
3.1.2 事件间的关系与运算 ……………………… 106
习题 3.1 …………………………… 110
§3.2 随机事件的概率与古典概型 ……………………………… 111
3.2.1 随机事件的概率及其性质 ……………… 111
3.2.2 古典概型……………… 112
习题 3.2 …………………………… 115
§3.3 概率的加法公式……………… 116
3.3.1 互斥事件的概率加法公式 ……………… 116
3.3.2 概率加法公式的一般形式 ……………… 118
习题 3.3 …………………………… 119
§3.4 概率的乘法公式与全概公式 ……………………………… 120
3.4.1 条件概率……………… 120
3.4.2 概率的乘法公式……… 121
3.4.3 概率的全概公式……… 123
习题 3.4 …………………………… 125

§3.5　事件的独立性与二项概型 …… 126
3.5.1　事件的独立性 …… 126
3.5.2　贝努里试验与二项概型 …… 128
习题3.5 …… 131
知识考核点与典型试题举例 …… 132
第4章　随机变量及其数字特征 …… 135
§4.1　随机变量及其分布 …… 135
4.1.1　随机变量的概念 …… 135
4.1.2　离散型随机变量及其概率分布 …… 137
4.1.3　连续型随机变量及其概率密度 …… 138
4.1.4　随机变量的分布函数 …… 139
4.1.5　多维随机变量及其独立性 …… 141
习题4.1 …… 142
§4.2　随机变量的数字特征 …… 143
4.2.1　数学期望 …… 143
4.2.2　方差 …… 147
4.2.3　矩的概念 …… 150
*4.2.4　协方差与相关系数 …… 150
习题4.2 …… 151
§4.3　几个常见随机变量 …… 152
4.3.1　二点分布 …… 152
4.3.2　二项分布 …… 152
4.3.3　泊松分布 …… 154
4.3.4　均匀分布 …… 156
4.3.5　指数分布 …… 157
习题4.3 …… 158
§4.4　正态分布 …… 159
4.4.1　一般正态分布 …… 159
4.4.2　标准正态分布 …… 160
4.4.3　一般正态分布与标准正态分布的关系 …… 161
4.4.4　正态分布的数字特征 …… 162
4.4.5　二项分布的正态近似 …… 163
习题4.4 …… 164
*§4.5　大数定律与中心极限定理 …… 165
4.5.1　切比谢夫(Chebyshev)不等式 …… 165
4.5.2　大数定律 …… 166
4.5.3　中心极限定理 …… 167
习题4.5 …… 168
§4.6　MATLAB数学实验 …… 168
4.6.1　常见分布的MATLAB名称 …… 168
4.6.2　期望和方差的计算 …… 168
4.6.3　累积概率的计算 …… 169
4.6.4　正态分布的逆累积分布函数 …… 171
知识考核点与典型试题举例 …… 172

第三编　数理统计基础

引子 …… 177
第5章　统计推断 …… 179
§5.1　数理统计的基本概念 …… 179
5.1.1　总体与样本 …… 179
5.1.2　分组数据统计表和频率直方图 …… 181
5.1.3　样本数字特征与统计量 …… 182
5.1.4　常用统计量的分布 …… 183
习题5.1 …… 185
§5.2　参数估计 …… 185
5.2.1　参数估计的概念 …… 185
5.2.2　参数的点估计 …… 186
5.2.3　估计量优良性的评价标准 …… 187

习题 5.2 ………………………… 189
§5.3 参数的区间估计 …………… 190
5.3.1 参数区间估计的概念 ………………………… 190
5.3.2 单正态总体均值的区间估计 ………………… 191
5.3.3 单正态总体方差的区间估计 ………………… 193
习题 5.3 ………………………… 194
§5.4 参数的假设检验 …………… 195
5.4.1 假设检验的基本思想 ………………………… 195
5.4.2 单正态总体对均值 μ 的假设检验 ……………… 197
5.4.3 单正态总体对方差 σ^2 的假设检验 ……………… 199
习题 5.4 ………………………… 202
§5.5 MATLAB 数学实验 ……… 203
5.5.1 样本的数字特征 ……… 203
5.5.2 单正态分布的参数估计 ………………………… 204
5.5.3 单正态总体参数的假设检验 ………………… 205
知识考核点与典型试题举例 ……… 206
第 6 章 回归分析 ……………………… 210
§6.1 回归分析 …………………… 210
6.1.1 最小二乘法与回归直线方程的建立 ………… 210
6.1.2 回归直线方程的显著性检验 ………………… 213
习题 6.1 ………………………… 218
* §6.2 预报与控制 ……………… 218
习题 6.2 ………………………… 221
§6.3 MATLAB 数学实验 ……… 221
6.3.1 函数命令 ………………… 221
6.3.2 范例 ……………………… 222
§6.4 案例 子女身高对父母身高的再回归分析 ………… 224
6.4.1 问题的提出 ……………… 225
6.4.2 数据采集 ………………… 225
6.4.3 二元线性回归分析方法 ………………………… 225
6.4.4 统计分析结果 …………… 228
6.4.5 分析与讨论 ……………… 229
知识考核点与典型试题举例 ……… 229
习题答案或提示 ………………… 231
附录 ……………………………… 244
附录 1 标准正态分布数值表 …… 245
附录 2 t 分布双侧临界值表 ……… 246
附录 3 χ^2 分布上侧临界值表 …… 247
附录 4 F 分布上侧临界值表 …… 248
附录 5 样本相关系数双侧分位数表 ………………………… 253
参考文献 ………………………… 254

第一编　线性代数

引　子

本编为线性代数的内容．线性代数是数学中与微积分具有同等地位和重要性的一个数学分支．

在中学的数学学习中，我们学习过二元一次方程 $ax+by=c$（a,b 不同时为零）．“元”是指未知量的个数；“次”是指未知量的次数，也称为未知量的幂数；“一次方程”是指方程中所有未知量都是一次的．二元一次方程 $ax+by=c$ 是一个恒等式，两个未知量 x,y 受此方程的制约，由此也反映了 x,y 之间的关系，这种关系是涉及两个未知量之间的所有关系中最简单的关系．由于二元一次方程 $ax+by=c$ 与平面上的一条直线建立了一种对应关系，因而，这种关系称为二元线性关系．求解二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，实际上是求解两个二元一次方程 $a_1x+b_1y=c_1$ 与 $a_2x+b_2y=c_2$ 对应的两条直线的交点问题．二元一次方程组也叫二元线性方程组．对于二元线性方程组解的情况有三种可能：

(1) 若两条直线相交，两条直线有唯一交点，那么对应的方程组有唯一解；

(2) 若两条直线重合，两条直线有无穷多个交点，那么对应的方程组有无穷多解；

(3) 若两条直线平行，两条直线没有交点，那么对应的方程组无解．

这样，我们把二元一次方程组解的存在情况用几何的方法很直观地分析出来了．

对于三个量 x,y,z，三元一次方程 $ax+by+cz=d$（a,b,c 不同时为零）表达了 x,y,z 之间最简单的相互制约、相互依赖关系，它的图形需要在空间直角坐标系中画出来，这个图形是空间中的一个平面．三元一次方程与空间平面之间也建立了一种对应的关系．虽然三元一次方程已经不再表示直线了，但我们还是习惯上称它为三元线性方程．当 x,y,z 受多种因素影响或受多种因素相互制约、相互依赖时，就得到由多个三元线性方程构成的方程组，如

$$\begin{cases} a_1x+b_2y+c_3z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \\ \qquad\cdots \\ a_mx+b_my+c_mz=d_m \end{cases}.$$

与平面中的直线类似，利用三元一次方程与空间平面的相互位置对应关系，可以分析三元线性方程组解的存在也有三种情况：

(1) 若所有平面相交于一点，即有一个公共的交点，那么对应的方程组有唯一解；

(2) 若所有平面交于一条直线或重合，这些平面就有无穷多个交点，那么对应的方程组有无穷多解；

(3) 若所有平面没有公共的交点，那么对应的方程组也就无解.

在客观世界中，有许多量不是孤立地而是彼此关联、相互依赖地存在着的.

例如，一个城市有三个重要的企业：一座煤矿，一座发电厂和一条地方铁路. 开采 1 元钱的煤，煤矿必须支付铁路 0.20 元的运输费，支付发电厂 0.25 元的电费；而生产 1 元钱的电力，发电厂需支付煤矿 0.55 元的燃料费，自己还需要支付 0.05 元的电费来驱动辅助设备及支付铁路 0.15 元的运输费；地方铁路获得 1 元钱的运输费，需支付煤矿 0.40 元的燃料费，支付发电厂 0.30 元的电费来驱动其他的辅助设备. 某个星期内，煤矿从外面接到 50 000 元煤的订货，发电厂从外面接到 25 000 元的电力订货，外界对地方铁路没有要求. 问这三个企业在这个星期内的生产总产值各为多少时才能精确地满足它们本身的需求和外界的要求？

要解决这一问题，需要建立煤矿、发电厂、地方铁路三个企业总产值之间的关系，即建立三元一次方程组，并对其求解.

线性代数就是要研究和揭示客观世界中存在着的所有量与量之间最简单、最基本、最普遍的一种关系——线性关系，这种关系通常用含有多个未知量、多个方程的线性方程组表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}.$$

通过本编两章内容的学习，对线性方程组进行比较深入的研究和讨论，不仅要了解线性方程组的表达方式，而且还要探究其本质，了解方程组解的存在条件、解的结构及其内在规律.

第 1 章

矩　阵

本章所介绍的矩阵是从许多实际问题的计算中抽象出来的一个数学概念. 它具有与数的运算不同的运算规律和性质，在数学、工程技术和经济管理等方面有着广泛的应用，也是我们研究线性方程组的表达工具和运算工具. 因此，矩阵是线性代数的主要研究对象之一. 本章主要介绍矩阵的概念与运算、几种特殊矩阵、方阵行列式、矩阵的初等行变换、可逆矩阵等内容，最后介绍数学实验，关于应用计算机软件 MATLAB 进行矩阵运算的基本操作程序.

学习要求

1. 理解矩阵的概念，熟练掌握矩阵相等的概念，以及矩阵的加法、数乘矩阵、矩阵的乘法、矩阵的转置等运算，了解它们的运算律.

2. 了解 $\boldsymbol{O}$ 矩阵、单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、上(下)三角矩阵、对称矩阵的定义，了解初等矩阵的定义和性质.

3. 了解 n 阶矩阵行列式的递归定义，掌握利用行列式性质计算行列式的方法，掌握方阵乘积行列式定理.

4. 了解克莱姆法则的条件、结论，掌握克莱姆法则关于齐次线性方程组存在非零解的推论.

5. 理解可逆矩阵和逆矩阵的概念及性质，掌握矩阵可逆的充分必要条件.

6. 熟练掌握求逆矩阵的初等行变换法，会用伴随矩阵法求逆矩阵，会解简单的矩阵方程.

7. 掌握矩阵秩的概念，会求矩阵的秩.

8. 会进行分块矩阵的代数运算.

§1.1 矩阵的概念及代数运算

1.1.1 矩阵的概念

当我们走进某一家商场，经常可以看到一些不同品牌、不同型号商品的价格表；在企业经常可以看到某些不同型号产品的产量报表和某些不同型号的原材料的耗材报表；在学校经常可以看到某班学生各门功课的考试成绩表. 这些表格都是由若干行和若干列的数组成的矩形阵表.

又如，一个国家的两个机场 A_1，A_2 与另一个国家的三个机场 B_1，B_2，B_3 的通航网络如图 1—1—1 所示. 每条连线上面的数字表示航线上不同航班的数目. 例如，由 A_1 到 B_1 有 5 个航班，A_2 到 B_1 没有航班，等等. 于是，航班信息可用下面 2 行 3 列的数表(见表 1—1—1)表示.

表 1—1—1

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	1	2
A_2	0	4	3

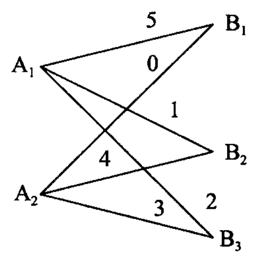


图 1—1—1

再有，由 n 个未知量、m 个方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases},$$

如果把未知量的系数 a_{ij}($i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$)和常数项 b_i($i=1, 2, \cdots, m$)按照原来的顺序写出，就得到一个 m 行、$n+1$ 列的矩形阵表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

当我们要在计算机上求解这个方程组时，必须按照这种数表的方式输入计算机.

其实，用矩形阵表来表达一些量或关系的办法是常用的. 我们把这种矩形阵表称为**矩阵**.

定义 1 由 $m\times n$ 个数排成 m 行、n 列，并括以方括号(或圆括号)的矩形阵表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ **矩阵**，其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行、第 j 列的**元素**.

通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…表示矩阵. 有时为了标明一个矩阵的行数和列数，用 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列矩阵. a_{ij} 的第 1 个脚标 i 称为元素 a_{ij} 的**行脚标**，第 2 个脚标 j 称为元素 a_{ij} 的**列脚标**.

例如前面航班信息的例子中，航班信息可用矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

表示. 其中，$a_{11}=5$ 表示从 A_1 机场到 B_1 机场的航班数为 5，$a_{23}=3$ 表示从 A_2 机场到 B_3 机场的航班数为 3.

在 $m\times n$ 矩阵中，当 $m=n$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 ***n* 阶矩阵**或 ***n* 阶方阵**，记作 $\boldsymbol{A}_n$ 或 $\boldsymbol{A}$ 并且将 $\boldsymbol{A}$ 的从左上角到右下角的对角线称为 n 阶方阵的**主对角线**. 例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，对角线 $1\to 4$ 为主对角线.

当 $m=1$ 时，矩阵只有一行，即 $[a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n]$ 称为**行矩阵**；

当 $n=1$ 时，矩阵只有一列，即

$$\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}$$

称为**列矩阵**；所有元素都是 0 的矩阵称为 ***O* 矩阵（零矩阵）**，记作 $\boldsymbol{O}$. 强调 $\boldsymbol{O}$ 矩阵的行数和列数时，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}_n$.

如 $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 分别是 2 阶 $\boldsymbol{O}$ 矩阵和 3×4 阶 $\boldsymbol{O}$ 矩阵.

1.1.2　矩阵的代数运算

当我们用矩阵来表达某些量时，有时客观上需要将两个矩阵联系起来. 如考虑某车间产品的产量，若用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示第一天的产量

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{零件1} & \text{零件2} & \text{零件3}\end{array} \\ \boldsymbol{A}= & \begin{bmatrix}2\,000 & 1\,000 & 1\,000\\ 2\,500 & 1\,500 & 1\,200\\ 1\,500 & 1\,200 & 1\,000\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{甲班}\\ \text{乙班}\\ \text{丙班}\end{array}\end{array},$$

用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示第二天的产量

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{零件1} & \text{零件2} & \text{零件3}\end{array} \\ \boldsymbol{B}= & \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{甲班}\\ \text{乙班}\\ \text{丙班}\end{array}\end{array},$$

用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示产品的单位价格、单位利润

$$C=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{单位价格} & \text{单位利润} \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{零件 1} \\ \text{零件 2} \\ \text{零件 3} \end{array}.$$

我们要考虑：第一天、第二天的产量是否相等，或者这两天产量之和是多少，这些产品的总收入或总利润是多少等，就需要考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 之间的运算. 要进行矩阵间的运算，首先需要定义两个矩阵相等.

1. 矩阵相等

定义 2 若两个矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{s\times p}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{r\times k}$满足

(1) 行数相同，即 $s=r$；

(2) 列数相同，即 $p=k$；

(3) 对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$，$i=1, 2, \cdots, s$，$j=1, 2, \cdots, p$，

则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

再来看上面的例子. 当 $b_{11}=2\ 000$，$b_{12}=b_{13}=b_{33}=1\ 000$，$b_{21}=2\ 500$，$b_{22}=b_{31}=1\ 500$，$b_{23}=b_{32}=1\ 200$ 时，第一天的产量与第二天的产量完全相同.

根据定义，矩阵$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$无论 a，b，c，d 取什么数值，它们都不可能相等，因为它们的列数不同.

例 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & y & z \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & 3 & 4 \end{bmatrix}$，求 x，y，z，a，b，c.

解 根据矩阵相等的定义，$x=1$，$y=3$，$z=4$，$a=1$，$b=0$，$c=2$.

满足定义 2 中(1)，(2)两个条件的矩阵，称为**同形矩阵**.

如果需要计算两天产量之和，只需将 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 两个矩阵对应元素相加即可.

2. 矩阵的加法

定义 3 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$都是 $m\times n$ 矩阵，则称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$，其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，$(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$为 **$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

注意 *只有两个同形矩阵才可以相加. 将两者的对应元素相加就得到它们的和.*

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+5 & 0+3 & 1+(-1) \\ 1+2 & 2+(-2) & 3+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

3. 数与矩阵的乘法

由上面例子中 $\boldsymbol{A}$ 表示第一天的产量

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{零件1} & \text{零件2} & \text{零件3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2\ 000 & 1\ 000 & 1\ 000 \\ 2\ 500 & 1\ 500 & 1\ 200 \\ 1\ 500 & 1\ 200 & 1\ 000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{甲班} \\ \text{乙班} \\ \text{丙班} \end{array},$$

如果第三天的产量是第一天产量的两倍，那么第三天的产量则是

$$2\boldsymbol{A}=2\begin{bmatrix}2\,000 & 1\,000 & 1\,000\\ 2\,500 & 1\,500 & 1\,200\\ 1\,500 & 1\,200 & 1\,000\end{bmatrix}\begin{matrix}甲班\\ 乙班\\ 丙班\end{matrix}=\begin{bmatrix}4\,000 & 2\,000 & 2\,000\\ 5\,000 & 3\,000 & 2\,400\\ 3\,000 & 2\,400 & 2\,000\end{bmatrix}\begin{matrix}甲班\\ 乙班\\ 丙班\end{matrix}.$$

定义 4　设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\lambda$ 为任意常数，则称矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=\lambda a_{ij}$（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）为**数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积**，简称**数乘矩阵**，记作 $\boldsymbol{C}=\lambda\boldsymbol{A}$.

例 3　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\\ -1 & -3\end{bmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}$ 及 $-\boldsymbol{A}$.

解　由定义得 $3\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3\times1 & 3\times2\\ 3\times5 & 3\times4\\ 3\times(-1) & 3\times(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 15 & 12\\ -3 & -9\end{bmatrix}$，

$$-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}(-1)\times1 & (-1)\times2\\ (-1)\times5 & (-1)\times4\\ (-1)\times(-1) & (-1)\times(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -5 & -4\\ 1 & 3\end{bmatrix}.$$

注意　数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等于数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素；$-\boldsymbol{A}$ 等于 -1 乘 $\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素变号.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，根据定义 3 和定义 4 不难验证矩阵加法满足以下运算律：

(1) 加法交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) 加法结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

据此，今后凡是 3 个或 3 个以上矩阵相加，可以不用括号表明运算顺序.

(3) $\boldsymbol{O}$ 矩阵满足：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；

(4) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=[a_{ij}-b_{ij}]$.

根据数乘矩阵的定义不难验证，对于任意常数 k，l 和矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$满足以下运算律：

(1) 数对矩阵的分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(2) 矩阵对数的分配律：$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(3) 数与矩阵的结合律：$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$；

(4) 数 1 与矩阵满足：$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

例 4　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 7\\ 4 & -1 & 3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解　$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0 & 7\\ 4 & -1 & 3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1-(-1) & 3-0 & 5-7\\ -1-4 & 0-(-1) & 3-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ -5 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

例 5　设两个 3×4 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -2 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 4\\ 1 & 6 & 0 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4 & -3 & 5 & -10\\ 8 & 3 & 2 & 4\\ -1 & 8 & 3 & -1\end{bmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=3\begin{bmatrix}3&-2&4&5\\2&-1&3&4\\1&6&0&2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4&-3&5&-10\\8&3&2&4\\-1&8&3&-1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}9&-6&12&15\\6&-3&9&12\\3&18&0&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8&-6&10&-20\\16&6&4&8\\-2&16&6&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&2&35\\-10&-9&5&4\\5&2&-6&8\end{bmatrix}.$$

例 6 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&2&0\\1&5&7&9\\5&4&-3&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7&5&-4&4\\5&1&9&7\\3&-2&1&8\end{bmatrix}$，且$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵$\boldsymbol{X}$.

解 由$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$得$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$，因为

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7&5&-4&4\\5&1&9&7\\3&-2&1&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-1&2&0\\1&5&7&9\\5&4&-3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&6&-6&4\\4&-4&2&-2\\-2&-6&4&2\end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&6&-6&4\\4&-4&2&-2\\-2&-6&4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&-3&2\\2&-2&1&-1\\-1&-3&2&1\end{bmatrix}.$$

注意 这里$\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$应理解为数$\frac{1}{2}$乘以矩阵$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$，而不是矩阵$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$除以2.

4. 矩阵的乘法

再来看本小节开始的例子. 若求甲、乙、丙班第一天生产的总产值与总利润，可以考虑

$$\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}2\,000&1\,000&1\,000\\2\,500&1\,500&1\,200\\1\,500&1\,200&1\,000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\\d_{31}&d_{32}\end{bmatrix}=\boldsymbol{D},$$

其中

$$d_{11}=2\,000c_{11}+1\,000c_{21}+1\,000c_{31},$$
$$d_{21}=2\,500c_{11}+1\,500c_{21}+1\,200c_{31},$$
$$d_{31}=1\,500c_{11}+1\,200c_{21}+1\,000c_{31}$$

分别为甲、乙、丙班第一天生产的总产值；而

$$d_{12}=2\,000c_{12}+1\,000c_{22}+1\,000c_{32},$$
$$d_{22}=2\,500c_{12}+1\,500c_{22}+1\,200c_{32},$$
$$d_{32}=1\,500c_{12}+1\,200c_{22}+1\,000c_{32}$$