普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学 第三版

（上册）

○ 宣立新 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

上册

第三版

宣立新　主　编
成和平　副主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，二版为面向21世纪课程教材，一版于2002年获得教育部颁布的全国普通高等学校优秀教材一等奖。主编宣立新教授是高职高专数学教育的资深专家，长期从事高等数学的教学和科研工作。本书是从当前高职高专教育的实际情况出发，按"必需、够用"和"突出应用"的要求，在二版的基础上修订而成的。

全书分上、下两册出版，上册内容为函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理和导数的应用、定积分与不定积分、定积分的应用；下册内容为常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、Mathematica 软件包在高等数学中的应用简介。书末附有基础知识补充、一些常用的中学数学公式、几种常用的曲线、积分表和习题答案。

本书条理清晰，深入浅出，通俗易懂，富于启发，例习题配置恰当，便于教学，可作为高等职业院校、高等专科学校、成人高等学校以及应用型本科院校的工科类专业的数学教材，也可供有关人员自学或参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/宣立新主编．—3版．—北京：高等教育出版社，2010.4（2011.5重印）

ISBN 978-7-04-028894-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①宣… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第028816号

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×960　1/16		
印　　张	12.75	版　　次	1999年9月第1版
字　　数	230 000		2010年4月第3版
购书热线	010-58581118	印　　次	2011年5月第2次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	18.50元

物料号　28894-00

第一版序

数学与文明可谓自古并存，而且是同步发展的，无数事例都充分地证明了数学在文明发展、科学发展及社会发展中的重要地位和作用。大约在公元 1800 年，天才的军事家拿破仑(Napoleon)曾提出“国富民强要依靠数学发达”的著名论断。数学实为一切科学技术发展之基础与先导。不仅如此，数学也与文化教育的素质有着密切的关系，它有着极为丰富的文化教育的内涵，它还可以陶冶人的情操和提高人的精神品位。

我们在承担原国家教委“面向 21 世纪专科人才素质要求及人才培养模式”的课题时，有意识地抓了几个专业的改革试点及几门课程从教材到教学方法、手段的改革。我们把数学的改革列为重点。撰写这本教材时，已将本课题对工程专科人才培养素质的基本要求尽量融合其中了。

高等工程专科教育的人才培养宗旨是培养工程、工业第一线的高级技术应用人才，这本教材紧紧扣住办学宗旨，全书突出以应用为目的，以应用为主线的内容体系，十分注意对学生进行数学思想、方法的培养。一个学生毕业后，由于工作的局限可以遗忘了数学的具体内容，但如果他掌握了数学的思想、方法，则会终生受用，并会在运用中升华为自己的理性思维习惯，去认识和解决问题。这本教材从面向 21 世纪的要求出发，注意计算机的应用，编写了高等数学软件包的使用等内容，为学生应用高等数学知识提供了现代化的计算手段。

几位作者都是长期从事高等工程专科数学教学并有较深造诣的专家。他们付出了极为艰辛的劳动，为高等工程专科教育、高等职业教育撰写了一本适应教改形势，很有特色、很有前瞻的好教材。

郑家泰

1999 年 7 月

第三版前言

本书第三版是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是在第二版的基础上，按原教材的科学体系，保持第二版通俗易懂、便于教、便于学的优点，遵循以下几条原则进行修订的。

1. 充分考虑高职高专培养技术(技能)应用型人才的需求，进一步加强微积分重要概念的实际背景的介绍；介绍与微积分有关的主要数学家的生平、重大成就，激发读者学习微积分的兴趣和刻苦学习的精神；加强微积分知识的应用，增加趣味性。

2. 根据我国高等教育大众化的新形势，充分考虑高职高专学生的特点，增强直观性，降低理论性、抽象性，略去了每一章要求较高的“综合例题”一节，内容更简练、重点更突出。

3. 强化数学软件包在高等数学中的应用，以 Mathematica4.0 版本为例，比较详细地介绍 Mathematica 软件包的主要功能及其在高等数学中的应用，对教材前九章各章的内容按章详细地介绍高等数学软件包的使用，通过例题加以说明、按章配备一定数量习题，习题在书末附有答案。

4. 为了更好地加强与中学数学的衔接，在上册的附录中增加了附录 I 基础知识补充(一、极坐标简介；二、数学归纳法)，以便老师和学生使用。

第三版的基本教学时数在 70 学时左右(实训除外)。

本次修订工作，由各章的原作者承担，引言、第一章～第四章由南京师范大学宣立新教授承担，第五章、第六章、第九章由哈尔滨理工大学田桂林教授承担，第七章、第八章由成都电子机械高等专科学校成和平教授承担，第十章由南京师范大学孙越泓副教授承担。全书由宣立新统稿、定稿。新版中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

作者衷心感谢北京航空航天大学李心灿教授在审稿中提出的宝贵意见。

作者对高等教育出版社的邓雁城同志在本教材的编写过程中提出的指导性意见致以谢意。

编　者

2009 年 12 月

第二版前言

本书第二版是在第一版的基础上，根据我们主持的教育部课题《新世纪高职高专高等数学教学内容、体系改革的研究与实践》的研究成果，以及近几年来我国高等教育大众化飞跃发展的新形势，并征求广大使用本教材的老师的建议，全面修订而成。在修订中保留了原教材的框架结构和特点，进一步体现了体系科学、说理清楚明了、通俗易懂、便于教、便于学、错误少等优点。同时充分考虑当前高职高专教育的实际需求，采用必学与选学相结合的方式，使得本书成为适合不同教学要求的优秀教材。

新版吸取了我们的同行提出的宝贵意见，这次修订主要的变化是：注意与中学数学教学的衔接；把原书中每一章要求较高的例题、习题从正文中删去，并挑选其中一部分具有代表性、启发性的题目以及一些新选的题目放在各章新增加的用 * 号表示的一节"综合例题"及"习题 "内，以便教师选用、或者供专升本的同学以及对数学感兴趣的读者阅读；一元函数微分学部分保留了原来的框架和特点，略去了相关变化率、曲率等内容；定积分的应用部分略去了质心、引力等内容；微分方程部分书写更简明，降低了应用题的难度、突出应用的方法；多元函数积分学部分只讨论二重积分，并与多元函数的微分学合并为多元函数微积分学一章；适当增加了一些习题；高等数学软件包 Mathematica 简介（DOS 版本），现在采用 Windows 环境下的 Mathematica 4.0 版本为例，叙述简明、使用方便。修订新版的同时，本书的电子教案、网络课件、试题库等立体化教学资源建设同步进行。

新版的基本教学时数 80 学时左右。讲解标有 * 号的内容要另外安排学时。

本次修订工作，第一章～第四章由南京师范大学宣立新承担，第五章、第六章、第九章由哈尔滨理工大学田桂林承担，第七章、第八章由成都电子机械高等专科学校成和平承担，第十章由南京师范大学孙越泓承担。全书由宣立新统稿、定稿。

本书的电子教案、网络课件、试题库等立体化教学资源建设由成和平负责制作，成都电子机械高等专科学校陈琳、南京交通职业技术学院毕朝晖、成都电子机械高等专科学校王科、梁静共同完成，最后由宣立新审定。

编　者

2005 年 8 月

第一版前言

根据1996年国家教委高等教育司批准修订的、由高等教育出版社出版的高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》(以下简称《高等数学基本要求》),在国家教委高等教育司高等工程专科学校“高等数学课程教学委员会”(以下简称“数学课委会”)的组织下,在高等教育出版社的指导下,我们编写了本教材。

本教材是教育部“面向21世纪课程教材”,汲取了原国家教委高等教育司批准的专业综合改革130多个试点专业数学教学改革的经验,又注意到了国外同类学校的数学改革,特别是新的数学思想和现代化的教学手段的应用,并兼顾我国的具体国情,因而该教材具有以下几个特点:

1. 进一步贯彻以应用为目的,以必需、够用为度的原则,加强数学知识的应用。如把有重要应用的“微元法”贯穿在一元微积分、微分方程、多元微积分的内容中;一元函数的积分学以有实际应用的定积分为主线,降低了不定积分的地位;注重基本概念的实际背景和理论知识的应用。

2. 强调数学的思想和方法。在第一章的极限前面,介绍微积分的两个基本问题和解决这两个问题的思想和方法,并将这种思想和方法贯穿于全书之中。对多元函数的积分,在一元函数定积分的基础上,利用积分的思想和方法,以物质构件的质量为模型,用点函数将二重积分、三重积分、对弧长的曲线积分和对面积的曲面积分等四个概念,统一为几何形体上的黎曼积分,并讨论它的性质,最后以第一型的线、面积分为基础,推广得到第二型的线、面积分。

3. 将现代化的计算工具——高等数学软件包编入教材列为一章,培养学生重视把一些实际问题抽象为高等数学的相关问题的计算能力,而不盲目追求运算技巧。

4. 注意教材具有科学性和逻辑性的前提下,更注意培养学生科学的、良好的思维习惯,提高学生的学习素质。全教材力求做到语言准确、条理清楚。

根据1996年出版的《高等数学基本要求》,将原来《高等数学》教材中的“方程的近似解”、“定积分的近似计算”、“微分方程的数值解法”等内容安排在必修课程“数值计算”内。

本教材的基本教学时数不少于110学时。讲解标有*号的内容要另外安排课时。

本教材经“数学课委会”审定为高等工程专科学校各专业的高等数学教材,

也可作为高等职业教育以及专科层次成人教育的高等数学教材和工程技术人员的参考用书。

参加本教材编写的有宣立新(南京动力高等专科学校)、田桂林(哈尔滨理工大学工业技术学院)、成和平(成都电子机械高等专科学校)、侯风波(承德石油高等专科学校)。全部教材的框架结构、统稿、定稿由宣立新承担。

北京机械工业学院朱鋐道教授是本教材的主审,他认真审阅了全部教材的原稿,提出了许多有价值的意见。在此,编者对他表示衷心的感谢。

“数学课委会”对本教材的编写纲目组织了研讨会,对本教材的初稿组织了初审、复审会,提出了不少宝贵的意见,特别是彭玉芳、吴诗咏、苏永法、彭延铭等同志对本教材的编写、审查做了大量的工作,对此编者一并表示深深的谢意。

由于我们的水平所限,时间也比较仓促,本教材必有不少缺点和错误,敬请广大师生、读者批评指正。

编　者

1999年2月

策划编辑　邓雁城

责任编辑　张耀明

封面设计　王凌波

责任绘图　尹文军

版式设计　范晓红

责任校对　王　雨

责任印制　韩　刚

目　　录

引言　微积分的概貌

高等数学研究的内容是微积分的基础知识及其应用. 微积分是人类文明史上最重大的科技成果之一,至今仍是最重要的科学知识之一,有着广泛的应用.

一、微积分产生的背景

人类文明史,上下五千年,但是直到16世纪,在数学领域里,人们仍然处在常量数学的阶段. 到了17世纪,欧洲由中世纪进入了新的时代,封建社会开始解体进入资本主义社会,生产力大大解放,社会经济迅猛发展,生产技术飞速进步,促使自然科学的许多学科快速发展. 例如,商品丰富后,促进了国际贸易和航海业的发展,但由于当时科学技术的限制,经常发生海难事故,为了准确地测定船只在海洋中的经纬度,只能通过观测天体寻找确定经纬度的方法. 这有力地推动了天文事业的进步和对天体曲线运动规律的研究;又如,在工业上,要掌握机械生产的技术;在军事上,弹道学成为研究的中心课题等. 生产实际、科学研究等领域都集中要求解决数学上求"曲线的切线、曲线围成的图形面积、变速运动的速度与路程"等的计算方法. 对于"运动"的研究成了17世纪自然科学的中心问题. 这些都为微积分的产生和发展奠定了坚实的基础. 到了17世纪60年代~80年代,英国科学家牛顿(Newton)从力学问题入手、德国科学家莱布尼茨(Leibniz)从几何学问题入手,在前人工作的基础上,利用还不严密的极限方法各自独立地建立了微积分学,并得到广泛而有效的应用.

二、微积分的两个基本问题

17世纪关于"运动"的研究可以归结为两类,下面在每一类中各举一例作为微积分的两个模型.

1. 变速直线运动的瞬时速度

匀速直线运动的速度可用位移除以通过这段位移的时间来表达. 现在用实例讨论变速直线运动的瞬时速度的求法.

例1　设物体于时刻 t 在直线上的位置为 $s=t^2$,求在 t_0 时刻物体的瞬时速度 $v(t_0)$.

解　由于物体是作直线运动,速度的方向即沿直线运动的方向,所以只要求速度的大小. 任取时刻 $t(\neq t_0)$,从 t_0 到 t(或 t 到 t_0)的这段时间内,物体的平均速度

$$\bar{v}(t)=\frac{t^2-t_0^2}{t-t_0},$$

这种平均速度一般不是物体在 t_0 时刻的瞬时速度，但当 t 越接近于 t_0 时，此平均速度越接近于 t_0 时刻的瞬时速度，当 t 无限趋近于 t_0 时，平均速度将无限逼近一个确定的极限值 $v(t_0)$，则称这个确定值 $v(t_0)$ 为物体在 t_0 时刻的瞬时速度. 即

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\bar{v}(t)=\lim_{t\to t_0}\frac{t^2-t_0^2}{t-t_0}=2t_0.$$

注意，在以上的极限式中，函数 $\bar{v}(t)\left(即\dfrac{t^2-t_0^2}{t-t_0}\right)$ 在 $t=t_0$ 时没有意义；但 $t\to t_0$ 时，函数 $\bar{v}(t)$ 的极限为 $2t_0$.

2. 曲线围成的平面图形的面积

为了便于讨论，先介绍曲边梯形的概念.

所谓曲边梯形是指如图 1 所示的图形，它有 3 条边是直线段，其中有两条垂直于另一条（称为底边）；还有一条边是连续曲线弧（称为曲边）. 特殊情形时，垂直于底边的两条直线段中的一条或两条可缩成一点. 如果以底边所在的直线为 x 轴，以上的曲边梯形就是由直线 $x=a$、$x=b$、x 轴和函数 $y=y(x)$ 的图像围成的图形.

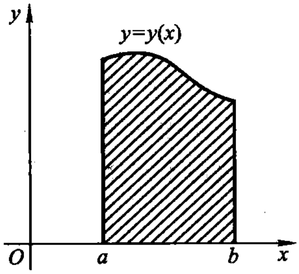

图 1

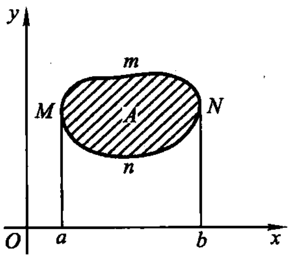

图 2

一般地，由任意连续曲线围成的图形的面积，如图 2 所示的图形面积 A 可以看作以区间 $[a,b]$ 为底边、分别以曲线弧 $\overset{\frown}{MmN}$ 和 $\overset{\frown}{MnN}$ 为曲边的两个曲边梯形的面积的差. 因此，要计算一般的连续曲线围成的平面图形的面积，关键在于求曲边梯形的面积.

如何求曲边梯形的面积呢？下面以实例加以说明.

例 2 求由曲线 $y=x^2$、x 轴和直线 $x=1$ 围成的图形的面积.

分析 该图形如图 3 所示，它是曲边梯形中垂直于底边的一条直边退化为一点的情形. 现在设想用垂直于 x 轴的一组直线将曲边梯形分割成 n 个底边长

为$\frac{1}{n}$的窄曲边梯形，把每个窄曲边梯形用高为其左直边、底为$\frac{1}{n}$的矩形近似代替（如图 3），则这 n 个窄矩形面积的和就是所求曲边梯形的面积的近似值，且分割得越细，此和越接近于曲边梯形的面积. 当 n 无限增大时（每个窄曲边梯形的底边长都趋于零），这 n 个窄矩形的面积的和将无限逼近于一个确定的极限值 A，则这个确定值就为所求曲边梯形的面积. 具体地说，有以下的解法.

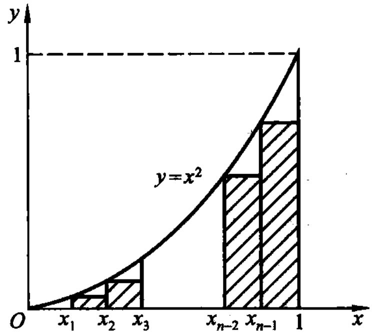

图 3

解　把 x 轴上的闭区间$[0,1]$分成 n 等分，得分点

$$x_0=0, x_1=\frac{1}{n}, x_2=\frac{2}{n}, \cdots, x_{n-1}=\frac{n-1}{n}, x_n=1.$$

过各分点作 x 轴的垂线，把曲边梯形分割成 n 个窄曲边梯形. 对每个窄曲边梯形，用以它的底边为底、它的左直边为高的窄矩形来近似代替. 把这 n 个窄矩形的面积加起来，就得到所求曲边梯形的面积的近似值

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.\end{aligned}$$

当 n 无限增大时，则

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{1}{3}$$

为所求曲边梯形的面积.

以上解决曲边梯形面积的方法，是通过分割，把曲边梯形分成 n 个窄的曲边梯形，每个窄的曲边梯形用以它的底边为底，它的左直边为高的窄矩形近似代替，最后考察当 n 无限增大时，n 个窄矩形面积的和无限逼近的数值即是所求的曲边梯形的面积.

以上介绍的两个基本问题分别代表微分学和积分学的两大类问题，而这两个基本问题的解决都需要用到“无限趋近”、“无限增大”或“无限逼近”等概念，这类概念描述的是动态的，且是无限的过程. 这正是从第一章开始要讨论的极限概念及其基本理论. 极限既是解决两大类问题的工具，又是一种思考问题的方法. 极限的思想和方法不仅是高等数学的基础，而且在自然科学和社会科学的许多基本概念中都有广泛应用.

三、牛顿(Newton)、莱布尼茨(Leibniz)与微积分的发明

很多书上常说微积分学是由牛顿和莱布尼茨创建的.但事实上,早在2300多年前,古希腊人欧多克索斯(Eudoxus)和阿基米德(Archimedes)用"穷竭法"计算抛物弓形的面积和圆锥曲线旋转所形成的立体被平面截取部分的体积,已经研究和揭示了积分的基本思想;由于那时还没有提出微分学的有关问题,因此微积分并没有在当时产生.到了17世纪,对于"运动"的研究,许多卓越的数学家和物理学家作了大量的研究工作,如法国的费马(Fermat)、笛卡儿(Descartes),英国的巴罗(Barrow)、沃利斯(Wallis),德国的开普勒(Kepler)等,都为微积分的最终诞生作了准备.牛顿在1660年第一个明确地提出了极限与导数的思想,他这样评价自己的贡献:"如果说我看得比别人远,那是因为我站在了巨人的肩膀上."费马和牛顿在剑桥的老师巴罗就是其中的两个巨人,牛顿非常熟悉他们常用的求切线的方法和求导与积分的互逆关系.莱布尼茨对数学的认真研究开始于1672年,他在法国巴黎肩负着外交使命的同时,会见了许多科学家,例如,惠更斯(Huygens)指导他将注意力放在科学与数学的最新进展上.他还寻求创立一种符号逻辑和符号系统去简化逻辑推理,特别在他1684年出版的《微积分学》一书中,就建立了现在我们所使用的关于求导的符号和规则.牛顿与莱布尼茨在前人工作的基础上,成功地揭示了微分与积分的内在联系,建立了计算积分的牛顿-莱布尼茨公式,各自独立地发明了微积分学.

不幸的是,17世纪90年代,在牛顿和莱布尼茨的拥护者之间出现了一场剧烈的争论——究竟是谁先发明了微积分?莱布尼茨甚至被英国皇家学会的成员以剽窃罪名起诉.事实上,两人是独立地发明了微积分.牛顿虽是首先完成了微积分学说,但是由于他害怕争论,而没有立即发表自己的研究成果,直到1687年在他的巨著《自然哲学的数学原理》中第一次公开发表了他所发明的微积分(1665—1666年完成).因此莱布尼茨于1684年发表他的微积分学说要比牛顿早了3年.

四、我国古代学者的极限思想

公元前3世纪,道家代表人物庄子的《天下篇》中"一尺之棰,日取其半,万世不竭"的记载,反映了早在两千多年前我国古人就有了初步的极限观念.公元263年,我国数学家刘徽创立的割圆术中进一步叙述了这种思想.他说:"以六觚之一面乘半径,因而三之,得十二觚之幂.若又割之,次以十二觚之一面乘半径,因而六之,则得二十四觚之幂.割之弥(越)细,所失弥少.割之又割,以至于不可割,则与圆周合体,而无所失矣."[2]就是:设A为某圆的面积,$A_{3\times2^n}$为该圆的内接正3×2^n边形的面积,则刘徽的思想是A与n足够大的$A_{3\times2^n}$相近.