普通高等教育"十二五"规划教材

工程数学

钟 韬 等编

GONGCHENG SHUXUE

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

工程数学

主　编　钟　韬　张新萍
副主编　管永娟　袁文胜
编　委　方卫东　王　洋

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书共包括五章，分别为线性代数、线性规划、概率论、数理统计、MATLAB的工程数学应用。本书在知识讲解的过程中列举了大量的数学工程实例，很好地体现了理实一体的教学理念；每节末、每章末都配备有相应的习题，以利于学生巩固所学知识；每章末还配备了数学实践和数学问题两个板块，增强学生的学习兴趣和培养学生解决实际问题的能力。

本书可以作为高等院校公共基础课工程数学课程的教材，也可以作为工程技术人员学习工程数学知识的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/ 钟韬主编. --上海：同济大学出版社，2015.2

ISBN 978-7-5608-5773-2

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①钟… Ⅲ. ①工程数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 026829 号

普通高等教育“十二五”规划教材

工程数学

主编 钟 韬 张新萍 **副主编** 管永娟 袁文胜 **编委** 方卫东 王 洋

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 李志伟

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

（上海市四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021－65985622）

经　　销 全国各地新华书店

印　　刷 三河市海新印务有限公司

开　　本 787mm×1092mm 1/16

印　　张 18.5

字　　数 370000

版　　次 2015 年 2 月第 1 版 2015 年 2 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5608-5773-2

定　　价 36.80 元

前　言

“工程数学”作为高等院校理工科一门重要的基础理论课，对提高学生的素质、优化知识结构，培养学生的逻辑思维能力、抽象思维能力、分析问题和解决问题的能力，提高创新意识，为后续课程的学习打下坚实的数学基础起着重要的作用，在公共基础课中有着重要的地位．因此，我们组织了多年从事高校数学教学的一线教学骨干教师结合目前工程数学教学的特点，在研究、对比多种同类教材的基础上，编写了本书．本着“替读者着想”的原则，更注重了内容的实用性与表述的简洁性．在内容取舍上，加强了一些在工程实践中有较广泛应用的内容；在表述上力求做到讲清思路，深入浅出，而不刻意追求证明的完整性，尤其是一些比较繁杂的定理证明．归纳起来，本书有如下特色：

1．思想性强，目的明确

作为一本基础性教材，本书不可能把工程数学的全部内容包揽无遗，本书从现实情况和实际需求出发，仅包括工程数学中的两个主要基础部分：线性代数、概率论与数理统计，这是工程数学的基础和主要内容，也是目前应用最为广泛和教学需要的两个重要部分．编写中既注意了各部分内容的相对独立性，也注意了它们间的关联性，各部分可以单独选用，方便于不同学科的需求．

为适应计算机的应用和普及现状，书中还特别介绍和应用了现代计算机软件MATLAB．该软件功能强大、语法简单、界面友好、使用方便，加之已经极为普及，用它提供的计算、绘图、方程求解等功能，可使书中所有的数值计算都可以不用烦琐的手工演算．这样，既能提高教学效率，又可减轻学生负担，还有利于读者今后的学习和工作．

2．体例新颖，理实一体

本书在每章开始设置了“知识结构”板块，使学生更加系统地了解本章将要学到的数学知识．知识讲解的过程中应用了大量的典型例题，帮助学生理解掌握所学知识．同时，数学概念的引入力求以生产、生活实际问题为切入点，充分凸显数学的应用功能．本书的最大特色是，无论是知识讲解过程中的例题，还是每章末的“数学

实践”和“数学问题”两个板块，都强调数学知识与实践生活的紧密结合，不仅可拓宽学生的知识面，同时充分培养学生的学习兴趣.

3. 难易适中，系统完整

本书完全按照工程教育“重视实用性和可操作性”的思想，从“实用”和“需求”的角度选材和编排. 尽量根据理工科专业的特点和需求，用较少篇幅讲清数学上的一些基本概念、基本定理和解决问题的基本思路及方法，对重点知识注重理论导出和方法运用. 对理论的证明及理论性较强的内容做了适当的淡化处理，主要利用实例及图形加以直观说明，降低了学生掌握知识的难度. 这样安排是为了适应学生继续深造的需要，有利于实施弹性模式教学，扩大本书的适应性. 例题的选择具有代表和示范性，使学生较快掌握解题方法. 习题的配备类型合理，难易适中，并具备一定的梯度和灵活性，有利于学生消化所学内容.

本书适合作为高等院校理工类学生的公共基础课“工程数学”课程的教材，也可以作为工程技术人员学习线性代数、概率论与数理统计知识的参考书.

本书由钟韬负责全书的提纲设计、组织协调工作. 执笔分工如下：第一章由钟韬编写，第二章由张新萍编写，第三章由管永娟编写，第四章由方卫东、王洋编写，第五章由袁文胜编写. 由于作者水平有限，本书难免有不足、遗漏和错误之处，衷心希望广大读者不吝指正，以使本书在教学实践之中不断完善.

编　者

2015 年 1 月

目 录

Contents 目录

Contents

目录

Contents

目录

第一章

线性代数

在初等数学中，我们已经学习过二元、三元一次方程组及其求解问题. 在工程、科技及经济领域中，我们还会遇到多个变量之间存在线性关系的问题. 行列式和矩阵作为从研究实际问题中抽象出来的两个数学概念，是研究由多个未知数构成的线性方程组的重要工具. 本章将介绍行列式、矩阵的基本概念与运算，以及如何用行列式、矩阵求解线性方程组.

知识结构

线性代数
- 知识内容（工具）
  - 1. 行列式（行列式的基本概念、性质、运算）
  - 2. 矩阵（矩阵概念、运算、逆矩阵、初等变换、秩、特征值）
- 知识应用（解线性方程组）
  - 1. 用行列式解线性方程组（克拉默法则）
  - 2. 用逆矩阵解线性方程组
  - 3. 用初等变换解线性方程组

第一节　行列式的概念与性质

【思考】　在初等数学中，用加减消元法或代入消元法求解线性方程组，有没有可用的求解公式？

分析　考察下列二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

用加减消元法求解，得到

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{cases} \quad (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0).$$

这个结果显然可以作为公式使用,但记忆不易,如果记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

则有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

对于方程组来讲,当 $D \neq 0$ 时,二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$ 有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

那么,更多元的线性方程组是否也有以上形式的求解公式?这个问题的讨论有一定的现实意义.

一、行列式的基本概念

(一) 二阶行列式

定义 1 由 4 个数排成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式,横排为行,竖排为列. 称 a_{ij} $(i = 1,2; j = 1,2)$ 为行列式第 i 行第 j 列的元素.

行列式表示一个值,二阶行列式的计算方法为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

等号右端称为行列式的展开式. 展开规则为:从左上角到右下角的对角线用实线相连,连线元素之积带正号,从右上角到左下角的对角线用虚线相连,连线元素

之积带负号，这种方法称为二阶行列式的对角线展开法则.

(二) 三阶行列式

定义 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

等号左端称为三阶行列式，右端称为三阶行列式的展开式. 三阶行列式展开式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号，其运算的规律性可用“对角线法则”来表述(图 1-1).

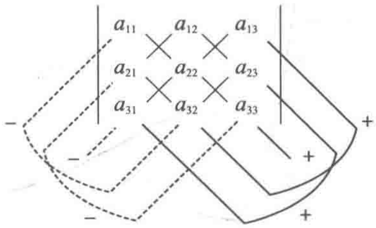

图 1-1

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

若系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=\ \ 8,\\ \ x_1-2x_2=-3.\end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}2&3\\1&-2\end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times1=-7,$

$D_1=\begin{vmatrix}8&3\\-3&-2\end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,$

$D_2=\begin{vmatrix}2&8\\1&-3\end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times1=-14.$

因 $D=-7\neq0$,故所给方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&5\\-1&0&6\end{vmatrix}.$$

解
$$\begin{aligned}D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&5\\-1&0&6\end{vmatrix}&=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-3\times0\times(-1)-\\&\quad 1\times5\times0-4\times2\times6\\&=-10-48=-58.\end{aligned}$$

例 3 解三元线性方程组

$$\begin{cases}\ \ x_1-2x_2+\ x_3=-2,\\ 2x_1+\ x_2-3x_3=\ \ 1,\\ -x_1+\ x_2-\ x_3=\ \ 0.\end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&1&-1\end{vmatrix}\\&=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1-(-1)\times1\times1-\\&\quad 1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)\\&=-5\neq0,\end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\1&1&-3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&0&-1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

(三) n 阶行列式

定义 3 由 n^2 个元素组成的记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，这里数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的元素. $n\geqslant 4$ 的行列式称为高阶行列式.

高阶行列式类似于二阶、三阶的展开公式，比较复杂，下面介绍行列式按行(列)展开.

定义 4 在 n 阶行列式 D 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素，由余下元素组成的 $n-1$ 阶行列式，称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，再记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

对于三阶行列式可以验证下式成立：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\left(-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}\right)+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

一般地,对于高阶行列式的计算,有以下定理.

定理1 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或
$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

可以验证,还有下面结论成立.

定理2 行列式任一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零.

例4 试按第三列展开计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

解 将 D 按第三列展开,则有

$$\begin{aligned} D &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} \\ &= 3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} + \\ &\quad (-1)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 0\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3\times 19 + 1\times(-63) + (-1)\times 18 + 0\times(-10) = -24. \end{aligned}$$

下面是几种特殊形式的行列式:

(1) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(2) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(3) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

二、行列式的性质

为简化行列式的计算,我们需要学习有关行列式的性质,行列式性质有多条,这里重点学习四条,其余性质读者可参阅相应参考书.

性质 1 行列互换值不变(表明:行的性质可转化为相应列的性质,行列式的"行"与"列"等权). 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2 行列式的两行(列)对调,值互为相反数. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

上述性质的使用记为 $r_i \leftrightarrow r_j$. 若第 i 列与第 j 列互换,记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行(列),等于用数 k 乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

该性质也表明计算行列式时,可按行或列提取公因子,以使计算简单.

推论 行列式中若有两行(列)元素对应相同或成比例,则此行列式为零.

性质 4 将行列式的某一行(列)的所有元素都乘数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式值不变.

注 以数 k 乘第 j 行各元素加到第 i 行相应元素上,记作 $r_i + kr_j$;以数 k 乘第 j 列各元素加到第 i 列相应元素上,记作 $c_i + kc_j$. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

计算行列式时,常用该性质,把行列式化为三角形行列式来计算.

例 5 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 先将第一行的公因子 3 提出来,再运用性质 4,得

$$D = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & -9 & -18 \end{vmatrix} = 27\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 54\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 54\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 54 \times 3 = 162.$$