華氏中西算學全書初集

初集二

十分數

金匱華蘅芳學

分數中另有一種其分母之數惟首位爲一其右俱爲空位者謂之十分數亦謂之小分數

如十分之幾百分之幾千分之幾萬分之幾之類是也十分數之加減乘除各法比尋常之分數較易故必設法將尋常之分數化爲十分數

凡尋常之分數有能化之爲十分數者有雖不能化之爲十分數而能化得與分數最相近之十分數其差可至極微則其用幾與分數無異

如二分之一可化之爲十分之五　如四分之三可化之爲百分之七十五　如八分之三可化之爲千分之三百七十五

如十六分之五可化之爲萬分之三千一百二十五

如七分之四　若化之爲十分之五則其差不及十分之一　若化之爲百分之五十七則其差不及百分之一　若化之爲千分之五百七十一則其差不及千分之一　若化之爲萬分之五千七百一十四則其差不及萬分之一

凡將尋常之分數於其分子之右累加〇而以分母除之則其除得之數爲十分數之分子其分母之首位爲一其右爲各〇其〇之個數與累加之〇同數

一題　設有四分之三欲化之爲十分數

則於分子之右先加〇得三〇爲實分母四爲法除之商得七以乘法得二八以減三〇餘二加〇於其右爲二〇商得五以乘法得二〇以減二〇適盡共計加兩個〇所以其分母爲一〇〇其分子爲除得之七五即得百分之七十五爲所化之十分數

四)三〇(七五
二八
二〇
二〇
〇

二題　設有十六分之七欲化之爲十分數

則因共加四個〇所以其化得之十分數爲萬分之四千三百七十五

一六)七〇〇〇〇(四三七五
六四
六〇
四八
一二〇
一一二
八〇
八〇
〇

三題　設有七分之一欲化之爲相近之十分數令其差不及萬分之一

則除時共加四個〇其化得之十分數爲萬分之一千四百二十八

七)一〇〇〇〇(一四二八
七
三〇
二八
二〇
一四
六〇
五六
四

若遇尋常之分數其分子之末數位爲〇者須用心所加之〇勿與原有之〇相混

四題　設有七分之一百求其相近之十分數其差不及千分之一

則除時須共加三個○所以其相近十分數當爲千分之一萬四千二百八十五

七)一〇〇(一四二八五
七
三〇
二八
二〇
一四
六〇
五六
四〇
三五
五

若其分母分子之末數位俱爲○者可於法實之末各截去若干○而後除之其截去之○可以不計

五題　設有三百五十分之二百欲化之爲相近之十分數其差不及百萬分之一

則其母子之末各可截去一個○故以三五爲法二〇爲實

三五)二〇〇(五七一四二八
一七五
二五〇
二四五
五〇
三五
一五〇
一四〇
一〇〇
七〇
三〇〇
二八〇
二〇〇

其化得之十分數爲一〇〇〇〇〇〇分之五七一四二八

若分母之末有○而分子之末無○者可截去其分母之○以爲法惟至除得之後計其○數之時必將實尾所加之○與法尾截去之○合而計之以作十分數分母之○數

六題　設有八百分之一求其十分數

則於八〇〇中截去其右邊之兩○得八爲法以除其一計除時共加三個○連法尾所截之兩○共爲五個○所以其化得之十分數其分母之右邊當有五個○即一〇〇〇〇〇分之一二五也

八)一〇(一二五
八
二〇
一六
四〇
四〇
〇

或有問者曰余觀五六兩題之數似乎無甚差別何以其截去之圈在五題則可不計在六題則必計之

答之曰五題之數其分母分子各截去一圈則與以十約其母子無異所以可不計其截去之圈

六題之數其分母爲三位之數分子爲一位之數以三位之法除一位之實則應於實尾加兩圈又因法之首位大於實之首位應於實尾再加一圈是一之右邊本須共加三圈而後能除也今因法尾已截去兩圈而其法降爲單位之數則實尾應加之三圈中已有兩圈與法尾之截去者暗中相抵所以只須加一圈已可除惟至除畢而計其所加圈數之時則不可忘此暗中抵去而未加之圈故仍以法尾之圈抵還之其實所計者並非法尾之圈也乃是實尾未曾寫出之圈也若不計其法尾之圈則與八分之一無

異矣所以其圈不可不計

或問曰常分數既可用除法變爲十分數其十分數亦有法能變爲常分數乎

答之曰欲變十分數爲常分數只須用約分之法求之

小數

惟因十分數之分母其首位之數恒爲一其右之各位恒爲○所以凡記十分數者可不必寫其全式惟計其分母之右邊有若干○則從其分子之右邊亦數去若干位而作點以誌之此點名曰定位之點簡言之亦曰定點

若其分子之位數少於分母之○數則必於分子首位之左加○以足其位然後於最左之○之左作此定點

如一○分之三可作.三　如一○○分之三可作.○三　如一○○○○分之一二三四可作.一二三四

則觀其點右之數有若干位即知其分母之○亦有若干位而分母可不必寫出矣

既不寫其分母則其分子之有定點者亦不便仍名之爲分子故又另立一名謂之小數亦謂之小分數

名之爲小數其初原欲專指數之小於一者而言惟有時小於一之數亦與任何整數相連於是遂無論其點左有數無數概稱之爲小數惟學者心中須知其點左之數乃是整數點右之數方是小於一之數

如.七或.○七其數皆在點之右邊者則純爲小數

如一.七或一○.○七則其點右之七爲小於一之數其點左之一與一○皆爲整數

凡作點以誌小數必用心其作點之方位不可在兩字之中間必稍高而在字之肩上其故因各種深算學內有作點於兩字之間以明其兩數相乘者所以此點不可與之相混也

小數加法

凡將若干小數相加或將整數與小數相加必齊其位而列之命其定位之各點在一直線然後如常法相加仍作點以誌其位

一式

三四七八一.○一八九
四九九.五
九三○○.七八一四九六
八.三○二
四九○八三二.○○一九
.九七○四七
五三五四二二.五七四七六

二式

四二.六三四
五四.二八○六
二.○○一
五四
一五二.九一五六

或有問者曰二式之五四一行何以不作定位之點

答之曰此乃整數五十四也凡整數不與小數相連者其右邊之末一位爲單位之數可以不必作點學者若以爲無點易混目則於單位之右加一點爲五四.亦可

小數減法

凡將兩小數相減或將小數與整數相減者列數之大者於上小

者於下齊其定位之點如常法減之惟遇上下有缺少之處心中須當其空處亦有○在焉

一式
九一·七三
二·一三八
八九·五九二

二式
九二五·七八四二九
四·九八九
九二○·七九五二九

三式
三四
·○九八
三三·九○二

小數乘法

凡將兩小數相乘或若干小數連乘或整數與小數相乘連乘皆與尋常之乘法無異惟得數之後而作定位之點必計各小數共有若干位則其乘得之數亦有小數若干位若其乘得之數不滿若干位者則必補○於左以足之然後於○左作點

一式 三二·六 與 二三·六 相乘得 七六九·三六

二式 三·二六 與 二三·六 相乘得 七六·九三六

三式 三二·六 與 二·三六 相乘得 七六·九三六

四式 三·二六 與 二·三六 相乘得 七·六九三六

五式 三·二六 與 ·二三六 相乘得 ·七六九三六

六式 ·三二六 與 二·三六 相乘得 ·七六九三六

七式 三二六 與 二三·六 相乘得 七六九三·六

八式 三·二六 與 二三六· 相乘得 七六九·三六

九式 ·三二六 與 二三六· 相乘得 七六·九三六

十式 三二六 與 二三六○ 相乘得 七六九三六○

十一式 三·二六 與 二三六○ 相乘得 七六九三·六○

十二式 三二·六 與 二三六○ 相乘得 七六九三六○·

十三式 ·三二六 與 二三六 相乘得 ·○七六九三六

十四式 ·○三二六 與 ·二三六 相乘得 ·○○七六九三六

十五式 ·三二六 與 ·○二三六 相乘得 ·○○七六九三六

十六式 ○三二六 與 ·○二三六 相乘得 ·○○○七六九三六

十七式
一二·三
四·五
六·七
·八
九一·○
二六九九七·五一六○○

十八式
·一二三
·四五
六·七
八·
九一○·
二六九·九七五一六○○

十九式
一二·三
·四五
·○六七
·○○八
九一○·
二·六九九七五一六○○

二十式
·一二三
·四五
·六七
·八
·九一○
·○二六九九七五一六○○

若將兩個小數相乘祇欲得幾位小數者可反其法之次第使法之當一之位與實之第幾位小數相齊用截位之法乘之

一題　設將三四八·八四一四與五一·三○七四二相乘祇欲得四位小數

三四八八四一四
二四七〇三一五

一七四四二〇七〇
三四八八四一四
一〇四六五二四
二四四一九
一三九五
七〇

一七八九八 一五二二

二題　設將一三六 四〇七二與一 三〇六〇九相乘祇欲得七位小數

一三六四〇七二〇〇〇
九〇六〇三一

一三六四〇七二〇〇〇
四〇九二二一六〇〇
八一八四四三二
一二二七六六

一七八一六〇〇七九八

三題　設將四四七一六一八與三 七七一九二一四相乘祇欲得七位小數

三七七一九二一四
八一六一七四四

一五〇八七六八六
一五〇八七六八
二六四〇三四
三七七二
二二六三
三八
三〇

一九五六六八六一

四題　設將三三一六六二四八與一 四一四二一三六相乘祇欲得五位小數

〇三三一六六二四八
六三一二四一四一

五二六六一三三
〇五六六二三一
六六一三三
六六二三一
三六六
三三
〇一
二

四 六 九 〇 四 一 五

小數除法

凡以小數除小數或小數除整數或整數除小數者先將兩數齊其位而列之視其右邊上下相當之位有缺少之處必加圈以足之然後用其二數爲法實如常法除之則所得者爲整數再於實尾加圈仍以前法除之則所得者爲小數欲除得小數幾位則加幾圈惟此除時所加之圈不可與前此補足位數之圈相混

一題　設有七六九 三六欲以二 三 六除之

則因兩數皆有兩位小數故可即將所設之數爲法實如常法除之

二 三 六 七 六 九 三 六 三 二 六
七 〇 八
六 一 三
四 七 二
一 四 一 六
一 四 一 六
〇

其除得之三 二 六爲整數

二題　設有七六九三六欲以二三六除之

則將所設之兩數齊其位而列之如

七六九三六
二三六

加〇補足其右上之位爲

七六九三六〇
二三六

乃以七六九三六〇爲實以二三六爲法除之

二三六)七六九三六〇(三二六〇
七〇八
六一三
四七三
一四一六
一四一六
〇

則除得三二六〇爲整數

三題　設有七六九三六欲以二三六除之

則齊其位而列之如

七六九三六
二三六

加〇補足爲

七六九三六
二三六〇

二三六〇)七六九三六(三二六
七〇八〇
六一三六
四七二〇
一四一六〇
一四一六〇
〇

又式

二三六)七六九三六(三二
七〇八
六一三
四七二
二三六)一四一六(六
一四一六
〇

四題　設有七六九三六欲以二三六除之

則齊其位列之如

七六九三六
二三六

補足如

七六九三六
二三六〇〇〇〇

則應以七六九三六爲實二三六〇〇〇〇如常法除之又可截去法尾之〇以二三六爲法七六九三六爲實

二三六〇〇〇〇)七六九三六(〇三二六
七〇八〇〇〇〇
六一三六〇〇〇
四七二〇〇〇〇
一四一六〇〇〇〇
一四一六〇〇〇〇
〇

簡式可作

二三六)七六九三六(〇三二六
七〇八
六一三
四七二
一四一六
一四一六
〇

五題　設有七六九三六欲以二三六除之

則齊其位而列之如

三九˙六七
六˙三二

加〇足之爲

三九˙六七
六˙三二〇

然後如常法除之

二三六|七六九|三六三˙二六
七〇八
六一三
四七二
一四一六
一四一六
〇

小數之除法又有可從簡易者可於欲得之若干位作一縱線則線右之數皆可略之

六題　設有一六˙八〇四三七九二一欲以三˙一四二除之祇須得五位小數

三˙一四二)一六˙八〇四三七|九二一(五三四八三〇
一五七一〇
一〇九四三
九四二六
一五一七七
一二五六八
二六〇九
二五一四
九五
九四
一

或有問者曰小數與十分數之別不過是省寫其分母之數故即借分子之位數作點以誌分母之〇數耳其實與十分數無異也則用小數以作加減乘除當與分數無異今乃與整數無異其故何也

答之曰小數之加減乘除既與整數無異卽與分數亦無異因整數必以一爲分母則亦爲分數也子既知小數之卽爲十分數何以反不知整數之卽爲一分數乎惟因整數之分母爲一而其右無〇所以可於單位之右亦作定位之點則與小數可一例推之此乃以整數遷就小數非以小數改爲整數也小數之加減乘除仍與分數之理無異也

或又曰吾聞此說覺心中尙未明自能爲我一破疑團則幸甚

答之曰十分數之名乃是渾而言之猶言其分母之數首位恒爲一其右則有〇位也若必欲名稱其實則不但有十分之數亦有百分之數千分之數萬分之數如是以至多位皆以分母之〇數定之一分之數其分母之數爲一而其右無〇十分之數分母之首位亦爲一而其右有一〇自此以上每以多加一〇之數爲分母而成百分千分萬分等等所以整數能與小數一例推因整數與小數皆有分母則皆爲分數所以小數與尋常之分數其加減乘除之法其理相同也

或曰其相同之理能爲我一一證明之乎

答之曰分數之加減必先化之爲同母之分數而後以其分子相加減因其母若不同則子卽不齊故不能徑行其加減之法也惟

過其分數本爲同母者則可徑以分子相加減而通分之法不必用矣

整數之分母恒爲一則無論何整數必爲同母之分數所以可徑行其加減之法而不必顧及分母惟列其各數之時必使其一十百千萬上下相當而後可用其加減之法是其位次固不可不齊也其位次所以不可不齊之故因誤進一位則宛如以十乘之誤退一位則宛如以十除之若一數獨進獨退則令分母不同也

小數加減之時其分母之不同者雖不見其齊同之迹而其中實暗寓齊同之理蓋其定點之右每多一位即是以十乘之每少一位即是以十除之故其列數之時令定位之各點皆在一直行之內則其母無不同矣其子無不齊矣所以可徑行其加減之法是小數加減之理與整數無異即與分數無異也

分數相乘之時母乘母爲母子乘子爲子整數相乘之時其分母一乘一仍爲一故可不必言分母而但以分子相乘爲乘得之數十分數之分母其首位恒爲一其右之各位爲○則兩母相乘之時一乘一亦仍爲一其乘得之○數與將兩母之○相加者無異所以小數相乘之時亦不必顧及分母惟於得數之後而作定點之時即是料理分母相乘之事也是小數之相乘其理亦與分數無異也

或曰既如此則小數之除法亦當於得數之後以法之小數之位減其實之小數之位而作一定位之點今觀除法各算草乃不用此法而必於未除之時先審定其除得之單位數此何故也

答之曰以法實小數之位相較而定除得小數之位論理固當如是惟此法有時易致錯誤故不得已而變爲先審其除得之單位數以免其弊也

或曰其所以易致錯誤之故可得聞歟

答之曰凡小數既有點以定其位數則小數右邊之○與整數左邊之○俱爲無用之物所以凡遇小數之末位或末數位爲○者往往可以省去之如·七○與·七無異則有時以·七○省作·七以爲省去其○於小數之理無害也然在小數相乘之時往往有末位相乘而得進一位之數者如·二乘·五得·一○此數若省去其○而作·一就·一○與·一而言其數仍無異惟若以·二除·一而以相減之法定其位必誤作五而不能得·五矣且無論·二與·五相乘所得之·一○不能當保其右邊之○不省去或其·一非從·二與·五相乘而得而爲·三與·四相減而得者則其右本無○若謂其○即可省去即於本無○者亦可隨意加之則加一○與加數○皆可又何從知以·二除·一則其·一當作·一○乎此較數定位之法所以不能無弊也如欲知以·二除·一則其·一當作·一○惟於法實之大小審之乃可知所以有審定除得位數之法

又有問者曰觀截位相乘之法其法數必反其次第且其乘得之每行反退一位其故何也

答之曰凡將兩數相乘者不過以法之每位各乘實之諸位各爲一行而再將各行相加耳若其各行之數不亂其相當之位則無論相加之次序如何其所得之相數無不相同

如
一二三
四五六
七三八
六一五
四九二
五六〇八八
若將其法四五六每位各爲一數則變爲
六
五〇
四〇〇
三數以此三數各與實一二三相乘則得
一二三
六
七三八
一二三
五〇
六一五〇
一二三
四〇〇
四九二〇〇
將此三個乘得之數相加共有六樣排列之法其加得之數無不相同

一式
七三八
六一五〇
四九二〇〇
五六〇八八

二式
七三八
四九二〇〇
六一五〇
五六〇八八

三式
六一五〇
四九二〇〇
七三八
五六〇八八

四式
六一五〇
七三八
四九二〇〇
五六〇八八

五式
四九二〇〇
七三八
六一五〇
五六〇八八

六式
四九二〇〇
六一五〇
七三八
五六〇八八

觀以上六式知其第一式
七三八
六一五〇
四九二〇〇
五六〇八八
與原式
七三八
六一五
四九二
五六〇八八
無異又知其第六式
四九二〇〇
六一五〇
七三八
五六〇八八
即與反其法數之次第以乘實如
一二三
六五四
四九二
六一五
七三八
五六〇八八
者無異其各行必遞退一位者乃將
七三八
六一五
四九二
反其上下而成
四九二
六一五
七三八
也

又如
一二·三四五六
一二·三四五六
七四〇七三六
六一七二八〇
四九三八二四
三七〇三六八
二四六九一二
一二三四五六
一五二·四一三八三九三六
若祇欲得四位小數亦可截去右半之
七三六
八
四
而留
一二·三四五六
一二·三四五六
七四
六一七二
四九三八二
三七〇三六八
二四六九一二
一二三四五六
一五二·四一三八二
然不如作
一二三四五六〇
六五四三二一
一二三四五六〇
二四六九一二
三七〇三六八
四九三八〇
六一七〇
七三八
一五二·四一三七六
之易於乘且不占篇幅也其末兩位之七六可將六進爲上位之一而成八故所得之四位小數可以無差

又有問者曰凡數以他數乘之則爲本數之若干倍故其數必變大凡數以他數除之則爲本數若干分之一故其數必變小今觀分數小數之算式有乘之反能變小除之反能變大者此則余之所不解也敢問其理

答之曰數之變大變小亦視其用以乘除之數大小如何耳如其

所用以乘除者其數爲一則其乘得除得之數不能大於原數亦不能小於原數所以仍爲原數如其用以乘除者爲大於一之數則其乘得之數必大於原數除得之數必小於原數如其用以乘除者爲小於一之數則其乘得之數必小於原數除得之數必大於原數此皆數理之自然也

循環小數

凡常分數或十分數於分子之右屢加〇而以分母爲法除之有除得若干位小數而餘數爲〇者則爲可以除盡之數亦有任除至多位而餘數總不能盡者則爲除不盡之數

除不盡之數其小數之位數可以多至無窮然其數往往依次第先後重複所以能反覆無窮此種小數名曰循環小數

小數之循環有從小數之首位起者亦有數位之後方起循環者其循環之位數有爲一位者有爲數位者有爲多位者

如三分之一其小數爲.三三三… 如九分之一其小數爲.一一一… 是以一位爲循環其循環從小數之首位起也

如六分之一其小數爲.一六六六… 是以一位爲循環其循環從小數之第二位起也

如十一分之一其小數爲.〇九〇九… 則以〇九兩位爲循環也

如二七分之一其小數爲.〇三七〇三七… 則以〇三七三位爲循環也

如四一分之一其小數爲.〇二四三九… 則以〇二四三九五位爲循環也

小數之循環其位數之最多者必以分母少一之數爲限

如七分之一其小數以.一四二八五七六位爲循環

如十七分之一其小數.〇五八八二三五二九四一一七六四七十六位爲循環

凡遇循環之小數可作點於首末兩數之上以記之若其小數爲一位循環者則於其上作一點

如.三三三…可作.三　如.一六六六…可作.一六　如.〇九〇九…可作.〇九

如 ·〇三七〇三… 可作 ·〇三·七 如 ·一四二八五七… 可作 ·一四二八五·七

既知分數之除不盡者其小數必有循環則觀除得之若干位若其數已有兩三位依次序與前重複則知其數已循環故可依循環之法記之不必再除向下又可任引長至若干位

小數之所以能循環因其除餘之數能前後相同故其除得之數亦能前後相同

如以七除一其算式為

七)一〇(·一四二八五七
七
三〇
二八
二〇
一四
六〇
五六
四〇
三五
五〇
四九
一

則因已除得六位小數 一四二八五七 而餘數為一與原實之數相同若將此餘數加〇再除向下必又得 一四二八五七 而餘數再為一所以除至又得數位之數如 一四二 即知其數已循環則以循環之法記之而可不必除下矣

凡循環之小數其循環之位數若為偶數則中分其數為左右兩數而相加其加得之數各位必相等

如將 一四二八五七 中作縱線分之為 一四二|八五七 以左數 一四二 右數 八五七 如常法相加

一四二
八五七
九九九 則各位俱成九

如 二一 分之一 其小數之循環為 〇四七六一九 分為左數 〇四七 右數 六一九 相加

〇四七
六一九
六六六 則各位俱為六

所以用除法以求循環之數若除至位數已過半限而未見其循環之迹可將除得之若干位用此法試之

如以 一七 除一 已除得 〇五八八二三五二九四 則因其最多之循環位數以十六為限其半限為八今已除得十位之數為已過半限所以可將其 〇五八八二三五二九四 作縱線分其左八位之數如 〇五八八二三五二|九四 而將 九四 與 〇五 相加得 九九

則知其左右兩邊之數相加必各位俱爲九故可列

九九九九九九九九　以

〇五八八二三五二

減之得其右邊之數

九四一一七六四七

從分母分子用除法求得之各餘數爲分子與第一餘數所成之連比率滿分母去之之數所以可任從第幾餘數求其以下各餘數

如七分之一其分子與各餘數爲一三二六四五一若以一三爲連比例之首兩率則求得各率如一三九二七八一二四三七二九去其滿七之數亦得一三二六四五一

從此得一捷法可將除得之任幾位數累以餘數乘之分子除之或將分子先約其餘數然後累乘之乃將乘得之各數各降幾位相加即得任多位之數與除得者無異

如一九分之一其除法爲

一九)一〇〇(〇五二六

九五

五〇

三八

一二〇

一一四

六

以餘數六累乘其〇五二六則得

〇五二六

六

三一五六

六

一八九三六

六

一一三六一六

六

六八一六九六

六

四〇九〇一七六

六

二四五四一〇五六

將此各數遞降四位相加

〇五二六

三一五六

一八九三六

一一三六一六

六八一六九六

四〇九〇一七六

二四五四

〇五二六三一五七八九四七三六六二二一〇五二六三一

若將一九分之一用除法得

一九)一〇〇(〇五二六三
九五
五〇
三八
一二〇
一一四
六〇
五七
三

以餘數三

累乘〇五二六三則得

〇五二六三
三
一五七八九
三
四七三六七
三
一四二一〇一
三
四二六三〇三
三
一二七八九〇九

將此各數

遞降五位相加

〇五二六三
一五七八九
四七三六七
一四二一〇一
四二六三〇三
一二七八九〇九
三八
〇五二六三一五七八九四七三六八四二一〇五二六三一五七八九四七

如一九分之三用除法得

一九)三〇〇(一五七八九
一九
一一〇
九五
一五〇
一三三
一七〇
一五二
一八
一七一
九

以三約其餘數九得三以此約得之三累乘其除得之數

一五七八九則得

一五七八九
〇三
四七三六七
〇三
一四二一〇一
三
四二六三〇三
三
一二七八九〇九
三
三八三六七二七

將此各乘得數遞

降五位相加

一五七八九
四七三六七
一四二一〇一
四二六三〇三
一二七八九〇九
三八三六七二七
一一五
一五七八九四七三六八四二一〇五二六三一五七八九四七三六八四二

由此知兩個分數其分母同而分子不同者其循環之小數惟爲首之位不同而其依次而下之數則同所以既求得一個分數之循環小數即可由此而得同母異子各分數之循環小數

如已知一九分之一其循環小數爲〇五二六三一五七八九四七三六八四二一㊀又欲求一九分之三之

循環小數可從除法得

一九)三〇(一五七
一九
一一〇
九五
一五〇
一三三
一七

則可從㊀式中之一五七起周而復始即得一五七八九四七三六八四二一〇五二六三爲一九分之三之循環小數

或有問者曰小數循環之理可謂神妙莫測矣而究其源則從分數而出不知此外尙有他種精深微妙之數能從分數變出者乎答之曰從分數又可化爲連分數而連分數中又有一種名曰循環連分數其理甚深其用愈妙惟其數不能以尋常之數學算式明之學者未通代數之術不能與論此種算法也

開方論

金匱華蘅芳學

數學中以開方爲最難古今算學家論開方之法其書不下數十種可謂詳且備矣然讀者或病其艱深且以方廉雜糅必欲以條段明之而頭緒愈繁翻益混淆非可以迹象顯之而心思難寄也余所著數根積較各術闢從正負諸乘方之理自謂獨闢蹊徑然其書祇能爲已知開方者進論深奥之義不能爲未知開方者導其先路也茲卷不論帶縱方而但論正方且不論多乘方而但論平方蓋取開方中最淺最易之事使學者熟習其法則於尋常淺近之算學中已足致用庶從事於斯者不至視開方爲畏途而不敢嘗試云爾

開方爲除法之進一步工夫其法畧與除法相似惟除則有法有實開方則其初但有實而無法須先求得第一位之數乃有法而其法非可常用每除得一位必變其法方可再除得下一位之數其每次減實之數亦與除法不同所以開方之法比除稍難其算式亦較繁

開方所得之數謂之方根亦謂之方邊其第一位之數謂之初商第二位之數謂之次商第三位之數謂之三商以下各位依此類推

開平方法

既知自乘之數爲平方積則從自乘之還反求之即能得開平方之法因開平方爲自乘之還原也

乘法之還原爲除則自乘之還原當爲自除今祇有平方之積則是但有實耳何從能用除法然學者可試思之若必有法有實而後能除則是尋常之除法矣何必名之爲自除哉所以必謂之自除者原是於無法之時先作一有法之想而知其以法除實所得之數必與法數相等所以心中卽可忖度之當以何數爲法則能使除得之數與所用之法數相等此卽開平方之法所由立也

驟觀此說幾疑其所商之數必由於屢次遷就而成假如先用某數爲法試除其積若除得之數大於某數則是某數太小也必增之若除得之數小於某數則是某數太大也必損之如是屢次增損其數以除其所設之積亦能漸近於密合

如是漸增漸損以求密合在最深最難之算學中萬不得已之處有時亦偶用之而開平方則不至如此繁難也況算法之中乘易於除若必增損以求合何不用自乘之數以與積相課何必舍易就難而用除法哉吾知天下斷無此種愚人也

所謂自乘與積相課者如先用某數自乘見其積小於所設之積則棄之而更取一大於某數者自乘見其積大於所設之積則又棄之而更取其兩數間之數自乘以觀其大小如何如是屢取大小兩數間之數以求其自乘之數漸近於所設之積此種屢次遷就之法在旣明乘法而未習開方之人往往不學而自能

其所以不學而自能者因早已有一開平方之理具於胸中也蓋開平方之法其初亦不外乎自乘與積相課之理惟更有遷求其

各位之法故除初商以外其算式幾與除法相似而不必屢次自乘焉

若所設之平方積其數不多於兩位則開之極易因積數爲一位兩位則邊必爲單位之數故可於九九歌訣中背誦其首兩字相同之各句從一一如一二二如四以至九九八十一若遇某句中下半句之數與所設之積相等者則此句之首兩字卽爲所求之兩邊

一題　設有平方積九求其方邊若干

則因三三如九所以知方邊之數爲三

二題　設有平方積八十一求其方邊若干

則因九九八十一所以知方邊之數爲九

前兩題以一位二位之積開得單位數之方根此固夫人而知之亦夫人而能爲之也然以多位之平方積開其數位之方根其理仍不外乎是

何也十之自乘爲百百之自乘爲萬千之自乘爲百萬苟明乘法者亦莫不知之則從此可見積之不滿百者其根必爲單位之數也積之滿一百而不滿一萬者其根必爲兩位之數也積之滿一萬而不滿百萬者其根必爲三位之數也是其積多於兩位則其根必多於一位也其積多於四位其根必多於兩位也其積多於六位其根必多於三位也多位之積其根依此類推

所以凡遇多位之平方積可將其數橫列之從單位起每滿兩位則作一點至其左不多於兩位而止

如　一二三四五　則可作點如　一·二三·四五

如　一二三四五六　則可作點如　一二·三四·五六

則其橫列之積數被所作之點分開爲若干幅視其所分之幅數卽爲其根之位數

如　一·二三·四五　則爲三幅故其根當爲三位之數

如　一二·三四·五六　亦爲三幅故其根亦爲三位之數

平方之積既用作點之法分之爲各幅則可名其最左之一幅爲第一幅其右爲第二幅再右爲第三幅如是以至最右之一幅則謂之末幅

如　一·二三·四五　其最右之一爲第一幅其二三爲第二幅其四五爲第三幅亦卽末幅

平方積之幅數既與根之位數相同則其每幅之數略與根之每位相當所以根之第一位自乘之數不出平積之第一幅根之首兩位自乘之數不出平積之首兩幅以下各位並同此理

如平方積　一·二三·二一　其方根爲　一一一　根之首位爲　一〇〇　自乘得　一〇〇〇〇　根之首