中等專業學校教學用書

高等數學教程

上册

Н. П. ТАРАСОВ著　胥長辰譯
樓文林初校　許寶騄複校

商務印書館

中等專業學校教學用

高 等 數 學 教 程

上 册

H. П. 塔拉索夫著
胥 長 辰 譯
樓 文 林 初 校
許 寶 騄 複 校

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的塔拉索夫（Н. П. Тарасов）著“中等技術學校高等數學教程”（Курс высшей математики для техникумов）1951年第七版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲中等技術學校教科書。

高 等 數 學 教 程

上　册

胥 長 辰 譯

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號
〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕
新華書店華東總分店總經售
商務印書館印刷廠印刷
上海天通菴路一九〇號
(50857·2A)

1953年9月初版　1954年1月再版
版面字數165,000（8月第5次印）87,001—95,000
定價￥7,200

第七版原序

在這次第七版中，只修正了一些發現到的印刷上的錯誤。其餘與前版沒有什麽不同。

恩·塔拉索夫

第六版原序

這次第六版與以前各版有本質上的不同。這些重大的改變，首先是由於課本必須適合於中等技術學校的新的數學教學大綱。書中包含着新教學大綱的全部內容，並遵照它規定的順序加以敍述。

不包含在最低教學大綱中的材料，而又爲某些中等技術學校所要研究的，用小號字排印。

因爲學習數學教程的教學計劃規定可能用積分求初等圓形體的體積，所以在本文的最後一章中，推出這個問題的全部公式，並作爲積分應用原則的例題，順便求出角錐的體積公式。敍述這些材料內容的各節，用小號字排印。

對於作爲初等性質敍述的本文不十分恰當的個別定理的證明和公式的推求，用小號字排印。

在修改課本時，也注意到許多教師指出的課本中的缺點。首先是對於分析的基本概念——函數概念，不够注意。因此對這個問題的解釋較爲詳細。同時我認爲必須把反三角函數比別的初等函數研究得更詳細些，原因如下：第一，因爲在分析內，函數的單值性和連續性的概念，只有分出反三角函數主枝的值，意義才完全清楚；第二，同學們一般在三角教程內並不澈底了解反三角函數。應當注意，教學大綱並不要求研究

這些問題。因此全部後面的屬於上述各項的材料，在教學過程中必要時或願意時可以省去，而"微分學"的研究，可從"變量的極限"一節開始。

我累次的得到關於函數連續性問題說明不清楚的批評。在本版內我已設法改正這個缺點。

現在是按另一種方法解釋極限的理論，把變量極限的一般概念轉變成敍列的極限和變元連續變化的函數的極限的特別場合。同時全部的解釋都用幾何的直觀性，而不用形式邏輯的結構。極限理論的定理和無限小量無限大量的定義，也敍述得更加嚴密。爲了使同學們更清楚的了解求變量極限過程的意義，又加上"幾個求極限的方法"一節。

在前版書中，由我看來認爲敍述得不好的許多問題，也經過基本上的修改。其中有函數臨界值的理論和微分概念對於近似計算的應用。

恩·塔拉索夫

高等數學教程

緒　論

同學們已經學過兩門數學科目：幾何和代數。其中第二門科目，代數，好像是與幾何對立的。大家都說，究研三角形的性質是幾何的對象，而解二次方程則屬於代數的範圍。

本書第一節詮述一門科目的要義，它的名稱是"解析幾何"。可見它並不就是以前所學的幾何。"解析幾何"是這樣一門科目，它的對象在於用代數研究幾何形象（圖，線，面，等等）。

在初等幾何中同學們也曾遇到代數的應用：許多幾何問題是由於列出方程而得到解決的。不過在初等幾何中，代數的應用並不是有系統的方法，而在解析幾何中，卻用代數研究幾何形體的最本質的特徵：它們的形狀和相互位置。例如同學們會看到如何用方程表示圓周。

在此企圖更詳細地說明解析幾何用以研究幾何形體的方法，未必適宜，因爲這樣我們簡直就要講到這門科目本身的內容了。

本書的其餘兩篇旨在詮述微分學和積分學的要義。

此二科目的基礎，是同學們所知的變量的極限的概念。同學們在學習幾何時已經知道了這個概念；但是在幾何中，只是偶爾的應用一下，而在微分與積分中，極限概念卻是此二科目所由建立的基礎。此二科目的研究對象是什麼，它們的方法的實質是什麼——在此不能予以說明，因爲這樣簡直就要開始宣講本書的內容了。

在現今的時代，微積分是最廣大的數學領域——"數學分析"——

的入門。

數學分析大約產生於三百年前。它的根源在於一連串的物理，天文，幾何，力學上的問題，而這些問題本身則產生於與航海，天文，軍事，光學，建築各方面以及一切與技術，文化及文明之發展有關的研討上的需要。在現在的時代，沒有分析的基本知識，就不可能學習任何一門技術。數學分析的宏偉而美麗的大廈是許多偉大的數學家的努力所建築起來的，其中俄國數學家的姓名射出永垂不朽的光榮。

在這簡短的緒論中，不但不可能概述俄國學者在數學上所作的巨上貢獻，就連單純地列舉卓越的數學家的姓名也是不可能的。因此，我們不得不限於僅提到在數學史上有重要地位的少數學者。

講到分析的發展史，不能不提到俄國學者米哈爾·瓦塞里維奇·奧斯特若格拉德斯基院士(Михаил Васильевич Остроградский)(1801–1862)。米·瓦·奧斯特若格拉德斯基的許多科學上的結果收入本書，他的姓名為一切數學家所熟知。奧斯特若格拉德斯基不但在數學方面，而且在力學方面，天體力學方面以及其他與數學接近的領域內均遺留下顯著的成果。

樸費努幾·里渥維奇·車比雪夫(Пафнутие Львовича Чебышев)(1821–1894)的姓名是盡人皆知的，他在幾乎所有的數學部門內留下不可磨滅的痕跡。他的著作在純粹數學範圍內和應用科學範圍內都是第一流的工作。他在機械理論方面的工作是經典的。樸·里·車比雪夫創造了 40 種以上不同的機械。

車比雪夫的學生亞力山大·米哈勞維奇·李樸諾夫(Александр Михайлович Ляпунов)(1857–1918)也是大數學家。亞·米·李樸諾夫在數學和力學的許多部門內作了工作。他在解決困難問題時所作的研究之精確性與嚴密性是可驚的。有趣的是，著名的法國學者樸昂卡列(А. Пуанкаре)(1854–1912)用自己的署名發表了一篇著作，而裏面他所得到的結果不過是亞·米·李樸諾夫的論文中結果的一部分。

同學們當然已經知道最偉大的數學家之一，尼克拉・依渥諾維奇・羅巴契夫斯基（Николае Иванович Лобачевский）(1793–1856) 的姓名。羅巴契夫斯基在幾何方面創作了自己的名垂不朽的天才著作。尼・依・羅巴契夫斯基發明了新的幾何，它不同於自歐幾里德時代以來爲人所知的幾何。羅巴契夫斯基的觀念如此地超過了他的時代，甚至連那時的卓越數學家都完全不能接受，一直到他死後才得到公認。

已往的俄國天才數學家，或則如羅巴契夫斯基那樣孤獨地工作着，或則僅在少數學生的圍繞之下工作着。他們的工作成了少數專家的財產，他們的功績之爲社會輿論所公認是根本談不到的。執政當局不但對於俄國科學的發展漠不關心，而且甚至常常仇視。讀俄國卓越學者的傳記，將驚奇於他們在執政者的惰性面前堅持鑽研科學的毅力。因此，近年來科學，包括數學，的繁榮，是從偉大的 1917 年十月才開始的，這是毫不足怪的了。

在偉大的社會主義十月革命以後，科學成爲爲羣衆性的。在全國組織了廣大的新高等學校與科學機構網。蘇聯公民全體都能享受教育。我們的科學工作者由於黨和政府的關懷而獲得的美好工作條件是盡人皆知的。在所有盟員共和國內建立了巨大的科學中心。因此，現在幾乎已經不可能指出一位卓越的學者，在他周圍沒有聚起衆多的學生和門徒。科學創造成爲集體的了。

由於科學在蘇聯的繁榮，在數學的各部門：函數論，數論，概率論及其他等等，建立了蘇維埃學派，許多蘇聯數學家成功地在實用的領域內工作着。蘇聯數學家在捍衛我們祖國的光榮工作中也有不小的功績。

蘇聯的數學現在在世界上佔有領導的地位。

上册目錄

第一篇　平面解析幾何學初步

第二篇 微分學初步

第一篇　平面解析幾何學初步

第一章　平面上點的直角座標、座標法在簡單問題上的應用

§1　用數決定平面上點的位置　1. 解析幾何學的第一個問題，就是建立一個用數來決定平面上點的位置的方法。

設想在平面上有兩條互相垂直的直線 Ox 和 Oy（圖 1）。我們認爲這兩條直線在平面上的位置是已知的、給出的、擺定的，並將依據這個直線系來確定平面上任意一點的位置。

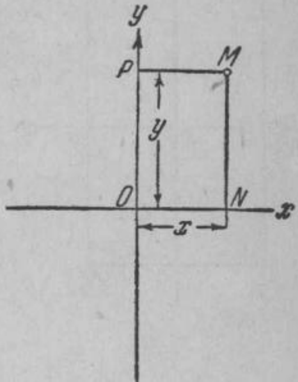

圖 1

設 M 是平面上的任意一點。由此點分別向直線 Oy 和 Ox 作垂線 MP 和 MN　並選取不論何種的尺度來測量這兩條垂線的長度 x 和 y①。我們使這兩數 x 和 y 與點 M 對應，將它們看作此點的特徵，並叫做點 M 的座標。

從圖上顯然可以看出，平面上每一點 M 都有它的確定而唯一的一對座標 x, y 與之對應。

2. 反之，如果知道了一點的座標，便可在平面上作出此點，如圖 1 所示。作法如下：從點 O 截取線段 $ON=x$（在直線 Ox 上）和 $OP=y$（在直線 Oy 上）。經過點 N 作垂直於直線 Ox 的垂線，經過點 P 作垂直於

① 垂線 MN 和 MP 的長度，不一定要用同樣的尺度來度量。但是在以後的一切推演中，都假定尺度是同樣的。

直線 Oy 的垂線。這兩條垂線的交點，就是所求的點 M。

我們可以更簡單地把點 M 作出，即從點 O 開始在直線 Ox 上截取線段 $ON=x$，並在點 N 處作 Ox 軸的垂線；然後，在這條垂線上從點 N 開始截取線段 $NM=y$；這個線段的終點，顯然和我們由前一作法所得的點 M 相同。

3. 從我們的論述中，或許造成一種印象，以爲不但每點具有一對確定的座標，而且反過來，每一對座標有平面上唯一的確定的點與之對應。但事實上，暫且還不是這樣。

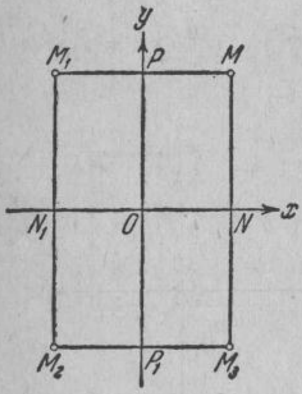

圖 2

將線段 MP 從點 P 向左延長(圖 2)，並在延長線上截取線段 $PM_1=MP=x$。從點 M_1 到直線 Oy 和 Ox 的距離與從點 M 到它們的距離是一樣的；這就是說，同一對座標 x，y 有平面上兩個位置不同的點 M 和 M_1 與之對應；很容易看出，這樣的點甚至不衹兩個而共有四個：事實上，點 M_2 和 M_3 顯然也和點 M 具有相同的座標。

因此，我們還沒有完全解決所提出的問題——用數來表示點的位置，而方才所得到的那種就已知的座標來作點時的非惟一性，必須消除。這個問題可從同學們在三角學中所學過的符號法則得到解決。

§2 符號法則　直線 Ox 和 Oy 的交點 O，將它們各分爲兩部分。在我們的圖 1 和圖 2 中，直線 Ox 被點 O 分爲左右兩部分，而直線 Oy 被分爲上下兩部分。

從平面上一點向直線 Ox 所作垂線的垂足，必然落在直線 Ox 的兩半之一的上面，而表示座標 x 的線段必在點 O 的右側或其左側。我們規定，在其中一種情況(不論哪種情況)之下，座標 x 的值爲正，而在另一情況之下其值爲負。通常是當表示座標 x 的線段在點 O 之右時規定

該座標的值爲正，在點 O 之左時爲負。因此在圖 2 中，點 M 和 M_3 的座標 x 是正的，而點 M_1 和 M_2 的座標 x 是負的。

通常在直線 Ox 上，將自左至右的方向定爲正向，而將相反的方向定爲負向。在圖上，正向由箭頭表示出來(圖 3)。

我們可以類似地在直線 Oy 上規定兩個方向(正向通常是自下而上的)。這就使得平面上點的第二座標 y 也有了符號 (在圖 2 上，點 M 和 M_1 的座標 y 是正的，而點 M_2 和 M_3 的座標 y 是負的)。

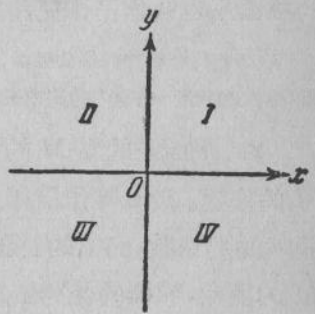

圖 3

直線 Ox 和 Oy 將整個平面分爲四個部分，叫做四個象限，它們的編序如圖 3 所示。在某象限內的點的座標，其符號的組合與其餘三個象限中點的座標符號的組合全都不同。我們很容易看出，對應於各種象限之座標的符號組合是由下表確定的：

象　　限	橫標的號	縱標的號
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

從表中可以看出，在所有可能的符號組合中 沒有一對是相同的。所以，有了符號法則後，每一對給定的(帶有符號的)座標 x, y 便有唯一確定的點與之對應，而反之，每點有唯一的一對座標 x, y 與之對應。

這樣一來，用數來決定平面上點的位置的問題，便完全解決了。

§3 笛卡兒直角座標系、平面上點的座標 1. 在解決用數來決定平面上點的位置的問題時，我們規定了直線 Ox 和 Oy 上的正負方向。一條直線，如果在它上面選取了一定的方向作爲正向，另外並附有一尺度，就叫做軸。這樣說來，平面上一點的位置，是對於軸 Ox 和 Oy 而

決定的;這兩個軸叫作座標軸。軸 Ox 和 Oy 構成座標系。我們現在所研究的是兩條互相垂直的座標軸。因此這系叫作直角座標系。由於作座標法的系統性闡釋的偉大的法國數學家笛卡兒(1596–1650)的姓氏,我們的座標系也叫作笛卡兒座標系。座標軸的交點 O 叫做原點。

在詳細的解析幾何學教程中,不僅研究直角座標系,而且還研究斜角座標系,卽軸 Ox 和 Oy 交於角度 $\omega \neq 90°$ 的座標系。

2. 平面上的點 M 的位置是用數 x 和 y 決定的。這兩個數叫作點 M 的座標。數 x 叫作橫標。橫標的絕對值[①]等於表示由該點到軸 Oy 的距離的那個數,而它的符號是按照上述的符號法則決定的。數 y 叫做點 M 的縱標,縱標的絕對值等於表示該點到軸 Ox 的距離的那個數,而它的符號是按照符號法則決定的。

在幾何學中,線段的長度通常和線段[②]本身有同樣的記法。因此對於點 M (參看圖 2)我們有: $x=ON=PM$, $y=OP=NM$; 對於點 M_1, 我們有: $x=-ON_1=-PM_1$, $y=OP=N_1M_1$, 依此類推。

爲了表明點 M 是由座標 x,y 所決定的,我們把它寫作: $M(x,y)$; 在括號內,橫標必須佔據第一位,而縱標佔據第二位。

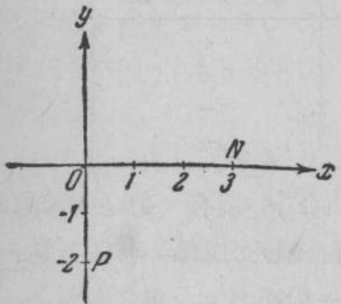

圖 4

在橫軸上的一切點其縱標等於零,而在軸 Oy 上任意一點其橫標等於零。例如在圖 4 中, 點 N 有橫標 $x=3$ 與縱標 $y=0$; 點 P 有橫標 $x=0$ 與縱標 $y=-2$。

原點的座標是(0,0)。

① 正數的絕對值指的是此數本身,而負數的絕對值是與此數符號相反的數。a 的絕對值,用記號 $|a|$ 來記。

② 界於兩點之間的直線部份叫作線段。表明所給線段包含單位線段(卽作爲長度單位的線段)多少次的那個數,叫作線段的長度。線段的長度永遠是正數。這數可能是整數、分數或無理數。

例1　在平面上給定一點 M。試求它的座標(圖5)。

解　從點 M 向軸 Ox 作垂線 MN，並度量線段 ON 和 NM(長度單位如圖所示)，得：$x=-ON=-2.5$；$y=NM=3.4$。如果從 M 點向座標軸作垂線 MN 和 MP，並測量線段 ON 和 OP，我們也可得到同樣的結果。

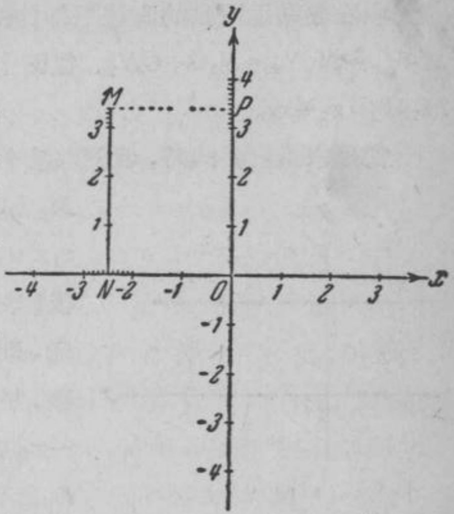

圖 5

例2　試作點 $M(-3,-4)$。

解　先作座標軸 Ox 和 Oy，並選取一長度單位；在軸 Ox 上從原點向左(點 M 的橫標是負的!)截取線段 ON 等於三個長度單位，再於這個線段的終點 N 處作軸 Ox 的垂線，並向下(點 M 的縱標是負的)截取一線段等於四個長度單位。這個線段的終點就是所求的點 M(圖6)。如果在軸 Ox 和 Oy 上分別截取線段 $ON=|-3|$ 和 $OP=|-4|$，並且經過點 N 和點 P 作平行於座標軸的直線，直到它們相交(在點 M)之處，也可得到同樣的點 M。

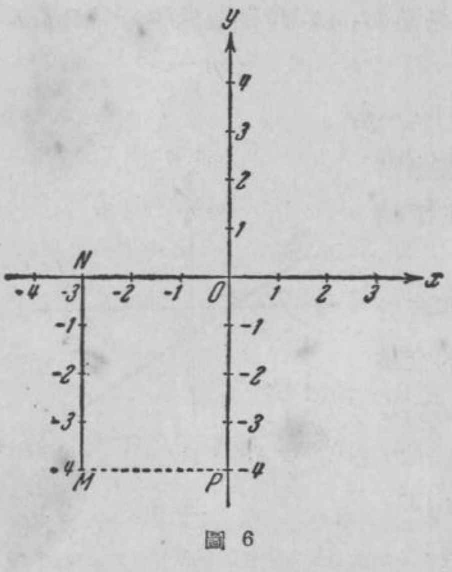

圖 6

註　這裏所敍述的用數來決定平面上點的位置的方法，是最簡單的，但並不是唯一的方法：另外還有許多用座標決定點的方法。除了這裏所講的以外，其中最常用的一種，就是第十二章所敍述的極座標法。

§4　兩點間的距離　1. 設已知點 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$。我們

首先假設經過這兩點的直線平行於軸 Ox（圖 7）。於是 $y_2=y_1$。線段 $M_1M_2=N_1N_2=N_1O+ON_2$。從圖中得：$N_1O=-x_1$，$ON_2=x_2$，所以 $M_1M_2=x_2-x_1$。

當推求這個公式時，我們注意差 x_2-x_1 是一個正數；就圖 7 上點 M_1 和 M_2 的位置來說，橫標 $x_2>0$，橫標 $x_1<0$，因此 $-x_1>0$，從而差 $x_2-x_1>0$。很容易看出，如果點 M_1 和 M_2 易地而處，則橫標 x_2 是負數，而橫標 x_1 是正數，於是表示線段 M_1M_2 的長度的差 x_2-x_1 成為一個負數．這與線段的長度的概念不相符合，因為線段的長度是永遠算作正數的，因此，在一般情況下，我們有：

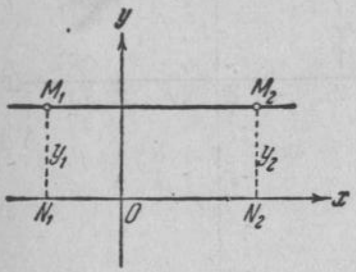

圖 7

$$M_1M_2=|x_2-x_1|, \tag{1}$$

在這裏和平常一樣，是用 $|x_2-x_1|$ 表示差 x_2-x_1 的絕對值。

同理，如果 $x_2=x_1$，即如果經過點 M_1 和 M_2 的直線平行於軸 Oy，則我們有：

$$M_1M_2=|y_2-y_1|。 \tag{2}$$

2. 如果 $x_2\neq x_1$ 和 $y_2\neq y_1$，則經過點 M_1 和 M_2 的直線不平行於任何座標軸（圖 8）。

作經過點 M_1 和 M_2 而分別平行於軸 Ox 和 Oy 的直線。這兩條直線的交點記作 R，它的座標很容易看出是 (x_2,y_1)。根據公式（1）和（2），得到：

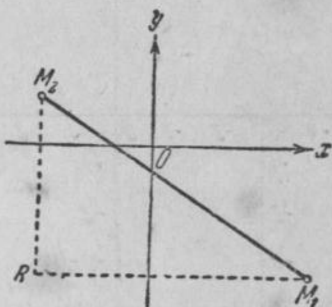

圖 8

$$M_1R=|x_2-x_1|,\quad RM_2=|y_2-y_1|。$$

從直角三角形 M_1RM_2 我們有：

$$M_1M_2=\sqrt{(M_1R)^2+(RM_2)^2};$$

將 $(M_1R)^2$ 和 $(RM_2)^2$ 的值代入，最後便得：

$$M_1M_2=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}。\qquad (3)$$

在公式(3)中的根號下，我們寫的不是差 x_2-x_1 與 y_2-y_1 的絕對值的平方和，而是差數本身的平方和，因為一數的絕對值的平方顯然等於它本身的平方。

公式(3)中的根表示兩點間的距離，因此，是一個正數，須取 + 號。

如果兩點之一是原點，即點 $O(0,0)$，而將第二點的座標記作 (x, y)，我們便得從原點到該點的距離的公式：

$$d=\sqrt{x^2+y^2}。\qquad (3^*)$$

例　試求與三已知點：$M_1(1,2)$，$M_2(-1,-2)$ 和 $M_3(2,-5)$ 有相等距離的點。

解　«試求一點» 的意思，就是求這個點的座標。設所求的點是 M，它的座標是 x, y。那麼，我們必須求出兩個未知數：x 和 y；為此，我們須由問題的條件作出兩個方程。這些條件給出下面兩個等式：

$$M_1M=M_2M \text{ 和 } M_2M=M_3M。$$

根據公式(3)，我們有：

$$M_1M=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2},$$
$$M_2M=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2},$$
$$M_3M=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}。$$

因此我們得到關於未知數 x, y 的兩個方程：

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2},$$
$$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}。$$

解這兩個方程，便得：$x=\frac{8}{3}$，$y=-\frac{4}{3}$。因此所求的點是 $M\left(\frac{8}{3},-\frac{4}{3}\right)$。

註　所求的點是經過已知點 M_1，M_2 和 M_3 的圓的中心。

§5　線段的定比分割　關於線段的定比分割，應當了解為下列的