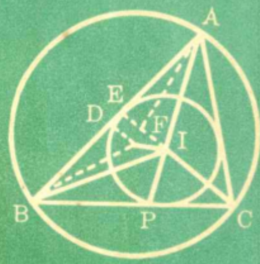
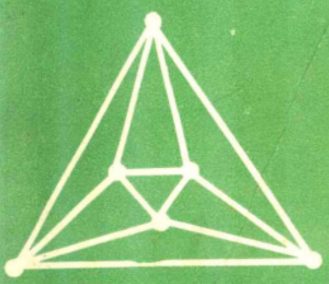
高中数学竞赛辅导讲座

常庚哲 史济怀 严镇军 陈天平 等编

（续编）

上海科学技术出版社





高中数学竞赛辅导讲座(续编)

常庚哲　史济怀　严镇军　陈天平　等编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是《高中数学竞赛辅导讲座》的续编，力求充实近年全国数学竞赛范围内的知识，并将以往国际数学奥林匹克竞赛内容作系统的归纳，构筑起一个有机的知识体系.

本书共分十二讲，取材新颖，例题、习题丰富，部分题目取自国外最新资料，着重数学思维能力的培养和解题技巧的训练.

本书可供高中学生、中学数学教师和其他数学爱好者阅读.

责任编辑　宗大路

高中数学竞赛辅导讲座(续编)

常庚哲　史济怀　严镇军　陈天平　等编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行　上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 11　字数 260,000

1990年12月第1版　1990年12月第1次印刷

印数：1—3,000

ISBN 7-5323-1509-6/G·225

定价：3.70 元

目　　录

第一讲

从整体性看问题

中国科学技术大学　苏　淳

考察事物特定方面的具体性质，同考察事物整体上的某种性质，本来是两桩不同的事情，但是这两桩事情之间却有着密切的联系，它们构成了我们考察事物时的不可偏废的、相辅相成的两个方面。如果我们能自觉地养成从两个方面考察事物的习惯，那么就会更加有利于我们看清问题，因而获益非浅。在解答数学问题上也是这样。

无庸置疑，紧扣题目条件或是所需要回答的问题中所涉及的特定对象、特定方面，来考察其中的数量关系及变化规律、寻求问题的答案，是我们解答数学问题的常用办法。但是我们也应该看到，在有些时候，对某些数学问题，如果只注意考察这一个方面，那么也还是不能把问题看清楚的。在这种时候，我们就应当学会换一个角度来考察问题，包括从具体的对象中“跳”出来，站高一点、站远一点，以便于观察事物的全貌，并从整体上来把握事物的性质。乍一想来，似乎会觉得这样做的结果，会使自己远离了问题的主要线索，但实际上却由于我们从整体上看清了全貌，反而使我们离开问题的答案更近了。

要养成这样一种习惯是不容易的，尤其是在已经对一个问题作了许多试探而未得到答案之时，人们往往不愿丢开原来的思路而去另辟蹊径，更难以一下子“跳”开去，去考察它的整体方面。但是这种习惯却是应当培养起来的，因为它可以使我们少走许多弯路，而有利于看清问题。数学竞赛试题，大致来说有两种类型：一类是对古典问题的改造、拔高、抽象，使之具有某种一般性；另一类则是对现代数学问题的简化、稀释，使之成为某种一般性命题的特殊情况。因此，它们或者具有一般性的形式，却有着特殊形式的原型；或者具有特殊化的形式，却有着一般形式的背景。这就告诉我们，对它们的考察，既不应当离开具体的事物、特定的对象，又不应当忘记它们的整体方面、普遍的规律，也就是说应当学会从两个方面来考察它们。

笔者曾在一些场合介绍过考察事物的特定方面的具体性质的一些方法，并专门写过一本小册子《从特殊性看问题》(中国科学技术大学出版社，1988 年出版)来介绍它们。在这篇短文中，笔者则打算通过对一些竞赛试题的分析，着重介绍一下“从整体性看问题”的方法。本文中的大多数内容，笔者已在 1988 年暑期的一些数学竞赛讲习班上作过介绍，本文则是在这些讲座的基础上总结而成的。

我们来看一些例题。

例 1　有一张 $2n\times 2n$ 的方格表（即每行每列都含有 $2n$ 个方格的正方形表格），在它的每 1 个方格中都点上 1 个红点或 1 个蓝点，使得在每 1 行以及每 1 列中都恰有 n 个红点和 n 个蓝点。用蓝色线段将每两个处于相邻方格（即具有公共边的方格）中的红点连结起来，用红色线段将每两个处于相邻方格中的蓝点连接起来。证明，最终所得到的红、蓝两色线段的数目相等。

分析 乍一拿到这道题目，会觉得应当采用数学归纳法。$n=1$ 的情形固然很简单，但由 $n=k$ 向 $n=k+1$ 的归纳过渡却不得不面对各种各样的可能性，而需作多种情形的讨论。但是如果我们"跳"出来，从整体方面作一番考察，那么效果可就两样了：

首先，我们将每两个处于相邻方格中的点都用线段连接起来(不分红点和蓝点)。于是我们立即就可以看到：由红点所连出的线段总数目同由蓝点所连出的线段总数目相等(这一结论可由红点与蓝点在分布上的特点来保障)。从而当我们擦去那些连结着 1 个红点和 1 个蓝点的线段后，剩下来的连结着两个红点和连结着两个蓝点的两类线段的数目仍然相等，而这正是所要证明的。

证明 (略).

以上所采用的对于例 1 的考察方法，就是一种从整体性来看问题的方法，它使我们摆脱了对红点蓝点分布情况的分门别类的考察，一下子就跳到了一种显然成立的等量关系上，并以此作为基础，极为直观地过渡到我们所需要证明的等量关系上。这样来考察问题的好处，自然是不言而喻的。下面再来看一个与方格纸有关的例题.

例 2 有一张 $n\times n$ 的方格表 $(n\geqslant 3)$. 先允许在表中任意选择 $n-1$ 个方格涂成黑色，接下来再把那些凡是至少与两个黑格相邻的方格也都涂黑。证明，不论怎样选择最初的 $n-1$ 个方格，都不能按这样的法则将表中所有的方格全都涂黑.

分析 乍一拿到这道题，容易使人想到用抽屉原则. 因为表中共有 n 行 n 列，而开始涂黑的方格却只有 $n-1$ 个，因此必然会有某一行和某一列中没有这些方格。然而再作进一步的分析时，就会使人感觉头绪纷繁而难以迅速奏效了。这时如果我们能够"跳"出来，从整体方面去考察问题的话，那么却会收到很好的效果。

事实上，如果我们观察一下"黑色区域"(即由所有已经涂黑的方格所形成的区域)的扩张规律，就会发现：它在扩大"领土"面积的过程中，边界(即黑白区域的分界线)的长度却始终没有增大。这是因为我们每次都只能涂黑那些至少与两个黑格相邻的方格，因此在每涂黑一个方格之后，都至多是变化了边界线的位置而不能增加它的长度 正是这一发现可以为我们指出问题的答案之所在：

因为一开始，我们仅能涂黑 $n-1$ 个方格。假若每个方格的边长为 1，那么即使这 $n-1$ 个方格都互不相邻，"黑色区域"的边界长度 L 也不过为 $4(n-1)$；而如果其中有些黑格相邻，则 L 还要小些；总之都有 $L\leqslant 4(n-1)$。在每一步的涂黑之后，边界长度都不增加，因此都有 $L\leqslant 4(n-1)$。但若能够涂黑所有的方格，那么"黑色区域"的边界即为整张方格纸的周长，即应达到 $4n$，可见这是不可能的。由此即得所证之结论。

证明 (略).

这种"跳"出来，不去考察最先的 $n-1$ 个方格的分布情况，却去考察与问题的答案似乎并无太大关系的边界长度的变化规律，正是一种从整体性看问题的思考方法。这种思考方式，初一想来似乎难乎接受，其实却是很自然的。原因就是它并不是凭空产生的，而是在原来的从抽屉原则出发考虑问题的思路受阻之后，为摆脱困境而另辟蹊径的一种产物。问题在于我们应当养成习惯，学会这种不断变换角度思考问题的方法，多想几个方面，不但想局部的、具体的方面，而且想全局的、整体的方面，这样我们的路子就宽了，办法就活了，就能使我们较多地立于不败之地.

下面再来继续看一些例子.

例 3 在立方体上标出所有的顶点和各面的中点，并连出所有面上的对角线。试问，能否沿着这些对角线上的线段走遍所有标出的点，并且每个点处都刚好经过一次？

分析 如果我们实际地尝试一下，便会发现，每当我们离开 1 个顶点，必然要经过 1 个中点；而每当离

开1个中点，就必然要经过1个顶点。因此在我们所经过的点中，顶点和中点是交替出现的。这就告诉我们，在行程中的每一时刻，所走过的顶点数和中点数都至多相差1个。但由于立方体中共有8个顶点和6个中点，它们的数目之差为2，因此若要求每个点都恰好经过一次，显然是办不到的，所以本问题的结论是否定的。

证明 （略）。

例4 在一个小正方块上用粉笔标出100个不同的点。证明，我们一定可以用两种不同的方法把方块放到黑色的桌子上（并且准确地放在同一位置上），使得它们在桌子上留下的粉笔印痕不完全重合。（如果粉笔点在方块的棱上或顶点上，也将产生印痕。）

分析 应当注意，这里所说的不同放法，包括将方块的不同的面放在桌面上，也包括将方块的同一个面按不同的角度放在桌面上，但都必须准确地放在同一位置上，因此共有24种不同放法。

如果上述24种放法所产生的粉笔印痕都完全一样，那么100个粉笔点在正方块的表面上势必要呈如下的分布：1．如果有1个顶点被点为粉笔点，那么8个顶点都应当被点为粉笔点。所以100个粉笔点中，或者含有0个顶点或者含有8个顶点。2．如果有1个棱上的点被点为粉笔点，那么12条棱上的相应点都应被点为粉笔点。如果有1个面上的点被点为粉笔点，那么至少在6个面上的相应之点也应被点为粉笔点。所以100个粉笔点中，所含有的棱上及面上的点的数目都应当是6的倍数。但是由刚才的分析可知，100个粉笔点中含有100个或92个棱上或面上的点，它们都不是6的倍数，可见24种放法所产生的印痕不可能都完全一样。所以我们可以用两种不同的方法把方块放在黑色的桌面上，使得它们在桌面上留下的粉笔印痕不完全重合。

证明 （略）。

上述两例的思路大体相同，它们都是一方面具体地探求点的分布规律，一方面则注意点的整体性质，并从中引出矛盾来。这种思考方法是大家所熟悉的，它们经常被用来证明一些否定性的命题，或是出现在运用反证法证题的过程之中。

上面的思考方式也可以用来解决一些肯定性的问题，以下的例5就是一个这方面的例子。

例5 数字$a_1, a_2, \cdots, a_{1989}$是自然数$1, 2, \cdots, 1989$的任意一种排列，将每个数字$a_k$都与其脚标$k$相乘，得到乘积$ka_k$。证明，在所得的1989个乘积中，最大者不会小于$995^2$。

分析 这道题乍一看来似觉很难，但从整体性的角度来看却很容易。事实上，在自然数$1, 2, \cdots, 1989$中，不小于995的数有995个，超过一半，因此它们不可能都排在前994个位置上。这也就是说，在不小于995的995个自然数中，至少会有1个数的脚标不小于995，将其同脚标相乘，乘积当然不小于995^2。

证明 （略）。

通过考察和数来考察事物的数量规律，是一种常用的从整体性来看问题的方法，应用得非常广泛。下面就来通过一些例子，着重介绍一下这种方法。

例6 在正25边形的顶点上依次放上数字$a_1, a_2, \cdots, a_{25}$，其中$a_1 = a_2 = \cdots = a_{13} = 1$；$a_{14} = a_{15} = \cdots = -1$。将每两个相邻顶点上的数字相加，并记$b_1 = a_1 + a_2$，$b_2 = a_2 + a_3$，$\cdots$，$b_{25} = a_{25} + a_1$，再以数字$b_1, b_2, \cdots, b_{25}$取代数字$a_1, a_2, \cdots, a_{25}$。然后再对这组数字进行同样的操作，如此共进100次。证明，在最终所得的25个数字中，至少有1个数字将大于10^{20}。

分析 由于本题所给的条件都很具体，所以一般人拿到题目后便会自然地进行实际的操作，以图发现其中最大值的变化规律，达到解题的目的。然而只要进行不多的几步考察，便会发现这种最大值的变化规律并不是非常规则的，在经过若干次操作后，便会出现不易讲清规律的局面。因此，不如考察25个数字的

总和更为妥当。

证明 记 $S_0=a_1+a_2+\cdots+a_{25}=1$，在经过1次操作之后有

$$S_1=b_1+b_2+\cdots+b_{25}=2S_0=2,$$

并且立即就可以看出，对任何自然数 k，都有

$$S_k=2S_{k-1}=2^k.$$

因此在100次操作之后，就有 $S_{100}=2^{100}$。这样，在所得的25个数字中，至少会有1个数 t 不小于它们的算术平均值：

$$t\geqslant\frac{S_{100}}{25}=\frac{2^{102}}{100}>\frac{(2^4)^{25}}{100}>\frac{10^{25}}{10^2}=10^{23}>10^{20}.$$

可见我们所证得的结论比题目所要求的还要强得多。

例7 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 是自然数 $1, 2, \cdots, 2n$ 的任意一种排列，将每个数字 a_k 都与其脚标 k 相加，得到和数 $k+a_k$。证明，在所得的 $2n$ 个和数中，至少有两个被 $2n$ 除时的余数相同。

证明 我们仍然来考察和数。首先，这 $2n$ 个和数的总和为：

$$S=(1+a_1)+(2+a_2)+\cdots+(2n+a_{2n})=2(1+2+\cdots+2n)=2n(2n+1),$$

可见有 $2n\mid S$。而另一方面，如果这 $2n$ 个和数被 $2n$ 除的余数各不相同，那么由它们所得的余数必然为 $0, 1, 2, \cdots, 2n-1$ 每样一个，从而 S 被 $2n$ 除时的余数就应当与如下的和数被 $2n$ 除时的余数相同：

$$0+1+2+\cdots+(2n-1)=n(2n-1).$$

由于 $2\nmid(2n-1)$，故知 $2n\nmid S$。上述的矛盾即说明了，在所得的 $2n$ 个和数中，至少有两个被 $2n$ 除时的余数相同。

例8 有两张圆形硬纸片，将每一张都划分为1989个相等的扇形。自每一张上都随意挑出200个扇形涂为红色，其余涂为白色。将这两张纸片迭合起来，使圆心及扇形的边都一一重合，但使上面一张可绕圆心转动，不过每次转动的角度都应为 $\frac{2\pi}{1989}$ 的整数倍。这样，上面一张圆形纸片就一共可有1989个不同的停止位置。证明，至少有84个停止位置使得两张纸片上相互重合的红色扇形数目不多于20个。

与上面几个例题相似，我们也可以从和数上来考察这个问题中的整体性质。

证明 假设至多只有83个停止位置使得两张纸片上相互重合的红色扇形数目不多于20个，那么在其余 $1989-83=1906$ 个位置上，两张纸片上重合的红色扇形就都不少于21个。由此算来，至少有

$$81\times0+1906\times21=40026>40000$$

对不同的相互重合的红色扇形。但是另一方面，由于两张纸片上分别只有200个红色扇形，因此一共只能有 $200\times200=40000$ 对相互重合的扇形。这个矛盾就说明了至少会有84个位置，使得两张纸片上相互重合的红色扇形数目不多于20个。

以上几道例题的思路大体相同，都是从考察某种数量的和数的角度来看问题的。求和的本身，就已把事物看成了一个整体，因此可以说和数是事物的整体性质在一定程度上的反映。正由于如此，也正如我们所已经看到的，通过求和来解答问题，是一种常用的方法。下面再看一个例子。

例9 试问，能够把任何一个凸多边形分割为有限个非凸的四边形吗？

在解答这一例题前，我们先来简单提及一下非凸的四边形的有关性质。在非凸的四边形中，必有1个顶点位于其余3个顶点所形成的三角形的内部，这个顶点叫做它的非凸顶

点，这个三角形叫做它的**凸包**。非凸的四边形的位于非凸顶点处的内角大于180°，但四边形的4个内角之和仍然为360°。下面就来解答例9。

证明 假设有某个凸多边形M被划分成了n个非凸的四边形，于是这些四边形的内角之和为

$$S=n\cdot 360^\circ.$$

显然，任何1个非凸的四边形的非凸顶点都不会位于M的周界上，而任何两个非凸的四边形的非凸顶点都不能共点，因此这n个非凸的四边形的非凸顶点就是M的n个不同的内点。这也就意味着这n个内点是这些被分出的非凸的四边形们的公共顶点，从而这些被分出的非凸四边形的内角之和S就应当是这n个内点处的周角之和再加上M的所有内角之和，即有$S>n\cdot 360^\circ$，于是导致矛盾。可见所述的划分是不可能实现的。

同上述几个例题一样，我们在这里也是从某种假设出发，而用两种不同的办法估计出某种数量的总和，并从它们的不相等中导出矛盾，从而推翻一开始的假设，于是也就证明了题目中的结论成立。由此看来，利用反证法证题时，往往是需要伴随着某种整体上的思考的。

当然，从整体上看问题，作为一种考察问题的思考方法，并不一定都要伴随着运用反证法的，关于这一点，我们已经从前面的一些例子中看到过。为了加深印象，我们再来看一个例子。

例10 证明，在任何凸$2n$边形中，都存在一条对角线不平行于它的任何一条边。

分析 应当注意，我们这里只对凸$2n$边形陈述命题，而不去触及凸奇数边形，是由于对于凸奇数边形，这个命题并不一定成立。事实上，在正五边形中，每一条对角线都平行于它的某一条边。

我们知道，凸$2n$边形共有$S=n(2n-3)=2n^2-3n$条对角线。而另一方面，对于凸$2n$边形的每一条边，都至多可以有$n-2$条对角线同它平行，于是综观它的$2n$条边，即知至多只会有

$$S_1=2n\cdot(n-2)=2n^2-4n$$

条对角线可以平行于它的某一条边。综合上述两方面，即知至少会有$S-S_1=(2n^2-3n)-(2n^2-4n)=n$条对角线不平行于它的任何一条边。

证明 （略）。

从上述结果看出，我们所得出的结论比起题目所要求证明的结论还要强一些，这种情形我们已不是第一次碰到了。这种情况表明从整体性看问题的思考方法有时还为我们提供了改进命题结论的机会。

最后，作为本文的结束，我们来看一道有关有限和无限的关系的例题。

例11 在一张$n\times n$的方格纸上码放黑、白两色的立方块，每块方块恰好占1格。首先任意码放了第一层，随之想起了限制条件：每块黑方块应与偶数块白方块相邻，每块白方块应与奇数块黑方块相邻。在码放第二层时就应使第一层的所有方块都满足这个条件。如果此时对于第二层的方块，这个条件也已经满足，则不需码放更多的方块，否则，则需码放第三层来使第二层的方块满足条件。如此下去，直至最后码上的一层方块也满足条件为止。试问，是否存在一种码放第一层方块的方法，使得这个过程永无休止？

分析 为了对这个问题获得一个初步的认识，我们可以先来看看$n=1$时的最简单的情形。这时每层只需放1块方块。容易看出，如果第一层放的是1个黑方块，那么不用再放第二层即已满足条件；如果第二层放的是1个白方块，那么第二层应当放1个黑方块，第三层再放1个白方块，此时即已完全满足条件，因而无需再码放更多的方块了。由此可见，不论第一层如何码放，整个过程都只需有限步即可结束。$n=1$的

情形是一般情形的特例，由它所发映出来性质当然也是一般情形下性质的缩影。因此我们有理由猜测，在一般情形下，码放过程也只需有限步即可结束。下面我们就来证明这一猜测。

由于对于每一个任意取定的自然数 n，每一层的码法都只有有限种（2^{n^2} 种），因此如果需要无休止地码放下去的话，那么势必可以找到 $i<j$，使得第 i 层与第 j 层的码法完全相同，第 $i+1$ 层与第 $j+1$ 层的码法完全相同。而这样一来，由码放规则就可以推知，第 $i-1$ 层与第 $j-1$ 层的码法相同，第 $i-2$ 层与第 $j-2$ 层的码法相同，…，第 2 层与第 $j-i+2$ 层的码法相同，第 1 层与第 $j-i+1$ 层的码法相同。这也就告诉我们，码放过程在第 $j-i$ 层之后即可结束。由此可见，码放过程不需要无休止地进行下去。

证明 （略）。

就这样，我们由每一层方块码法的有限性出发，从整体上把握了各层码法的花样变化规律性，并因此一举证明了码放过程的有限性。今后我们将会看到，这种方法在数学的许多分支中都是有用的。

思 考 题

1. 在一张正方形的纸上有 1989 个穿了小孔的点，这些穿了孔的点连同纸的 4 个顶点中的任何 3 点都不共线。沿着一些互不相交的直线段剪开这张纸，每一条线段的两个端点都属于上述 1993 个点（包括 4 个顶点），以致将这张纸剪成了一些三角形。现知每个三角形中除了 3 个顶点外，都不再含有上述 1993 个点中的其它点。试问，共剪出了多少个三角形？一共剪了多少刀？（提示：考虑这些三角形的内角的总和。）

2. 有一张矩形的台球台，尺寸为 $p\times 2q$，其中 p 与 q 都是奇数，在每一个角上以及长为 $2q$ 的边的中点处各有一个小网袋。台球一旦落入网袋，便停止不动了；但台球只要未落入网袋，则在碰到球台的边时，便都按出射角等于入射角的折射定律折射出来。现从一个角上按与边成 45° 的方向发出一个小球。证明，小球必然落入中部的网袋之一。（提示：将球台对台球所碰到的边作对称映射，并从整体上考察台球的运动轨迹。）

3. 在序列 19752… 中，自第 5 个数码起，每 1 个数码都等于其前面 4 个数码之和的末位数。试问，在该序列中：(1) 能否出现数码组 1234 和 3269？(2) 能否再次出现数码组 1975？(3) 能否出现数码组 8197？（提示：考察序列中数码的奇偶性变化规律，便知 (1) 为不可能。由 4 位数共有有限个，知序列中可以找到两个相同的 4 位数码组 A，再证明在两个 A 之间必然出现 1975，知 (2) 的结论为肯定。再证明在数码组 1975 之前的一个数码是 8，知 (3) 的结论也是肯定的。）

4. 有 11 袋硬币和一台有两个秤盘的台秤，台秤上有指针，可以指出哪一边重以及重多少。已知有一个口袋中装的是假币而其余袋中全是真币。所有真币的质量都一样，所有假币的质量也相同但与真币质量不同。每个口袋中的硬币都足够多，且可打开口袋取出来称。试问，至少需要称多少次，就一定可以确定出哪个口袋中装的是假币？（提示：两次。为此需将口袋编号，并应利用指针所示的读数。）

第二讲

解数学竞赛题的几种思考方法

陕西师范大学　李俊秀

数学竞赛题题型新颖，技巧性强，知识面广，解法独特，无常规可循。它着重考查学生的是反应的敏捷，思维的灵活、构思的精巧。因而解数学竞赛题对于拓广知识面、熟练掌握基本技能技巧以及磨砺数学思维的锋芒都是有益的。这里介绍几种思考方法，可以帮助数学爱好者闯雄关，越险隘，培养探索能力和创新能力。

一、简化　即特殊化，它是从对一类对象的研究转向对包含于这一类中的部分对象的研究方法。通过把题目特殊化、具体化、简单化，以便较容易地探索到一般规律，作为解决原题的桥梁。

例 1　国际数学奥林匹克的评议会有 34 个国家参加，每个国家有两名与会：领队与副领队，会前某些与会者握了手，但领队与他的副手不握手。会后，某国领队问每个与会者，他们的握手次数是多少，各人的回答都不相同。这个国家的副领队与多少人握了手？

分析　把 34 个国家简化为二个国家，设为 P 和 Q，P 国的二人为甲、乙，Q 国的二人为丙、丁。甲问乙、丙、丁三人，依题意他们握手次数应为 0，1，2 中的一个。由于握手次数是 2 的人与其它国家的代表都握过手，只有握手次数为 0 的与他未握手，所以握手次数最多的与最少的为同一国家；由此也断定乙的握手次数应是 1，而丙和丁的次数分别是 0 和 2 或 2 和 0。于是回到原题。

解　34 个国家的 67 人中，握手最多 66 与最少 0，应同属一个国家，除去这两个人后，各国代表的握手次数恰好都减少 1，除某国领队外，各人握手次数仍不相同，依前规律，握手 65 与 1 次也属同一国，…，一般握手 m 次与 $66-m$ 次也属于同一个国家，从而某国两人握手的次数应相等，都应等于 $(0+66)\div 2=33$。

例 2　某中学有一列柜子，共 1000 个，依次编有序号，该校恰好有 1000 名学生，将这 1000 名学生也依次编号。现在，这 1000 名学生去开或关这 1000个柜的门。先由编号为 1 的学生打开所有的柜门，然后由编号为 2 的学生关上偶数号的柜门，而学生 3 对编号能被 3 整除的柜门作“相反动作”（即原来开的关上，原来关的打开），学生 4 又对编号能被 4 整除的柜门作“相反动作”，…如此下去（学生 n 对编号能被 n 整除的柜门作“相反动作”）。待 1000 名学生都作过这样的“相反动作”后，问还有哪几个编号的柜门是打开着的？

分析　不妨先考虑柜子数与学生数都是 10 的情形。10 名学生依次对 10 个柜子作题所规定的“相反动作”，其结果如下表：

从表中易知，1，4，9 号柜门，即序号是完全平方数的柜门开着。那么为什么序号是完全平方数的柜门一定开着？这结果对编号为 1000 时，是否仍然适用？

通过对下表的观察和分析发现：(1) 一个柜的序号数必能被对它作过“相反动作”的学生编号数整除。即如果一个柜号数中含有 k 个因数，那么这柜门必被且只被这 k 个学生作过“相反动作”；(2) 号数是完全平方数的柜门，正好有奇数个学生对它作过“相反动作”，而号数不是完全平方数的柜门，正好有偶数个

		柜子编号									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
学生编号	1	开	开	开	开	开	开	开	开	开	开
	2		关		关		关		关		关
	3			关			开			关	
	4				开				开		
	5					关					开
	6						关				
	7							关			
	8								关		
	9									开	
	10										关

学生对它作过"相反动作"。事实上,奇数次动作后使门打开,偶数次动作后,使门关闭. 由此可知: 序号数是完全平方数的柜门开着.

为了证实以上结果对编号为1000时仍然适用,我们观察非完全平方数24和完全平方数36.

$24=2^3\cdot3$, 它共有 $(3+1)\cdot(1+1)=8$ 个正因数,故序号为24的柜门, 必被且只被编号为1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24等8名学生作"相反动作",最终关闭.

$36=2^2\cdot3^2$, 它共有 $(2+1)\cdot(2+1)=9$ 个正因数,故序号为36的柜门, 必被且只被编号为1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36等9名学生作"相反动作", 最终打开.

解 (略).

一般,据算术基本定理, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 都是素数, 且 α_1, α_2, $\cdots$, $\alpha_k\in N$. 自然数 n 的正因数集 $D=\{p_1^{f_1}\cdot p_2^{f_2}\cdots p_k^{f_k}\mid 0\leqslant f_i\leqslant\alpha_i,\ f_i\in N\}$. 由于 D 中每一 f_i 可取 α_i+1 个值,故 n 的正因数个数共有 $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ 个.

当 n 为非完全平方数时, $\alpha_i(i=1,\ \cdots,k)$ 中至少有一个是奇数,这时 n 有偶数个正因数;

当 n 为完全平方数时, α_i 全是偶数, n 的正因数有奇数个;

故知当1000名学生依次对这1000个柜子门作题规定的"相反动作"后, 序号数是完全平方数的柜门开着.

例 3 在空间已知一直角的一边通过一已知点A, 而另一边与已知线段 BC 至少有一公共点,求该直角顶点的轨迹.

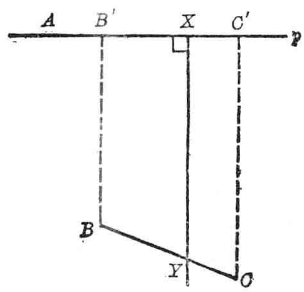


图 1

分析 先考察本题的特殊情形. 如图1所示, 平面上直角 AXY 的一边过定点 A, 另一边与定线段 BC 交于点 Y. 为了探求动点 X 在这个平面的轨迹的范围, 我们把问题又进一步特殊化: 固定直角的一边 XA 的方向,即假定 X 在过定点 A 的某一直线 p 上运动. 这时, 动点 X 的轨迹是 BC 在 p 上的射影 $B'C'$. 为了回到原题, 再把上述结论逐步推向一般:

(1) 直线 p 在平面内绕定点 A 旋转时, 点 B'、C' 分别画出怎样的一条曲线? 线段 BC 扫过怎样的一个范围?

(2) 直线 p 如果是在空间内绕定点 A 旋转，结果又将如何？

由此即可探求出动点 X 在空间的轨迹。

解法1 设轨迹为 M，我们先在一个平面内作考虑。如图2，p 是过点 A 的某一直线，过线段 BC 上的任一点 Y 作 p 的垂线，交 p 于 X，则点 X 属于所求的轨迹 M。显然，对于固定的直线 p，所有的点 X 的轨迹是线段 BC 在 p 上的射影 $B'C'$。当 p 变动时，B' 和 C' 的轨迹是分别以 AB 和 AC 为直径的圆 G_1 和 G_2（当点 A 与 B 或 C 重合时，则变成一点 A），点 X 的轨迹 M 是这两个圆 G_1、G_2，以及在一个圆的外部，同时又在另一圆内部的平面部分，即图2中的阴影部分。

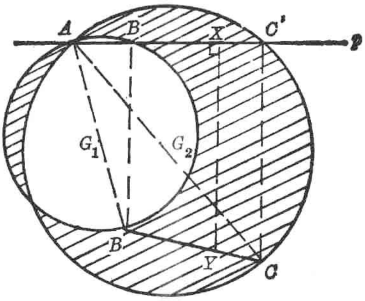


图 2

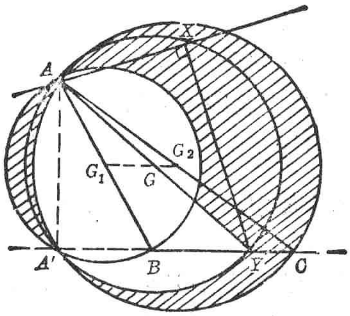


图 3

上面的结论不难推广到空间的情形：

分别过 B、C 对所有的过点 A 的直线 p 作相应的垂直平面，则交点的轨迹分别构成以 AB、AC 为直径的球面 K_1、K_2（当 A 与 B 或 C 重合时，则变成一点 A）。由此，所求几何轨迹 M 是两个球面 K_1、K_2 以及在一个球面外部，同时又在另一球面内部空间部分。

解法2 仍先限于一个平面内作考察．对于线段 BC 上的某一固定点 Y，显然点 X 的轨迹构成一个以 AY 为直径的圆 G。当点 Y 从点 B 运动到 C 时，则圆心 G 在 $\triangle ABC$ 的中位线 G_1G_2 上从 G_1 运动到 G_2，直径从 $|AB|$ 连续变化到 $|AC|$。

不难证明，这些圆都属于以 AA' 为公共根轴的同轴圆系。这里 A' 是从 A 向直线 BC 所作垂线的垂足（图3）。由此推知，点 X 的轨迹 M 是圆周 G_1、G_2 以及在一个圆的外部，同时又在另一圆内的平面部分。

这个结果同样可推广到空间的情形。

以上的例1和例2是化整体为部分，而例3是化高维为低维；例2和例3又分别作了二次特殊化；由此化难为易，化复杂为简单，化抽象为具体，较易探知规律，以作为解一般情形的先导。但特殊化不只是这两种形式，可依具体问题分析而定。

二、转化 转化是解数学题的基本思想。波利亚在他的名著《怎样解题》一书中说，数学解题是命题的连续变换，就是这个意思。实际问题转化为数学模型，一个领域的问题转化为另一个领域的问题，抽象转化为具体，未知转化为已知等，以上的特殊化实际上也是一种转化。转化必须通过类比，发现已知问题与现在待解问题的相似点与不同点，然后再进行转化。这里仅提供几个思路：

（一）结构转化　利用题目的结构特点，从整体出发，把各部分重新组合，以利于达到求解的目的。

例 4 从数 12345…585960 中划去 100 个数字，不改变原有数字的顺序，使剩下的数：(1) 最小；(2) 最大．求这两个数．

分析 观察发现所给的数有 $9+2\times 51=111$ 个数字，要求从中划去 100 个数字，可知余下的还有 11 个数字．

要使 11 个数字组成的数最小，应尽可能多保留 0 这个数字；要使数最大，应尽可能多保留 9．显然所给数从 10 到 60 有 6 个 0，而从 9 到 59 共有 6 个 9．

把从 10 到 50 的 0 留下，所给数为 0000051525354555657585960．

把从 1 到 50 中的 9 留下，所给数为 9999951525354555657585960．

于是不难得到：

最小数为：00000123450，

最大数为：99999585960．

解 (略)．

例 5 证明：
$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

分析 这是一个(符号交错的)角为等差数列的三角级数求和问题．解决这类问题，一般还是采用把每项表示为两项的差，然后抵消中间各项的方法，如证法 1．也可以借助于复数求这类三角级数的和，如证法 2．

证法 1
$$\begin{aligned}&2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)\\ &=\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}\\ &=\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{14}\ (\neq 0),\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{2}.$$

证法 2 $x^7-1=0$ 的 7 个根为 1, $\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}$, …,
$$\cos\frac{12\pi}{7}+i\sin\frac{12\pi}{7}.$$

由韦达定理，这 7 个根的和为 0，于是有
$$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cdots+\cos\frac{12\pi}{7}=0.$$

又因 $\cos\frac{2\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{8\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}$,
$$\cos\frac{10\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7},\ \cos\frac{12\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7},$$

所以
$$2\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)=1,$$

由此得到
$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

(二) 假借转化 即利用各种联系，借助于参数、辅助量、辅助函数、引理或关系作“舟”、“桥”进行转化．

例 6 求 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$ 的值．

分析 显然 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}>0$.

因 $\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)^2$

$$=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$=\frac{1+\cos\frac{2\pi}{7}}{2}+\frac{1+\cos\frac{4\pi}{7}}{2}+\frac{1+\cos\frac{6\pi}{7}}{2}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$$

$$-\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right),$$

故令 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=x$, 就有

$$x^2=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x,$$

即

$$2x^2+5x-3=0.$$

解之得 $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-3$ (因 $x>0$, 应舍去)

所以,

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

例 7 正四面体的外接球的中心到四面体的四个顶点距离之和，小于空间中其它任一点到四个顶点的距离之和。

分析 空间中的正四面体和平面上的正三角形相“类似”，所以我们先来考察平面上的类似问题：正 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心 O 到三个顶点距离之和，小于平面上其它任一点到这三个顶点距离之和(图4).

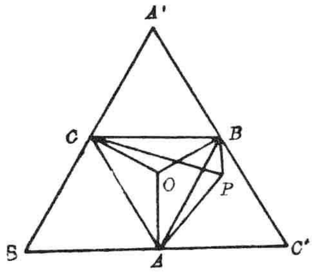


图 4

若我们作正 $\triangle ABC$ 的外接正 $\triangle A'B'C'$, 它的三边分别平行于 $\triangle ABC$ 的三边。连结 OA、OB、OC, 易知 OA、OB、OC 是 O 到正 $\triangle A'B'C'$ 三边的距离。

设 P 是 $\triangle A'B'C'$ 内任一点，由面积关系

$$S_{\triangle OB'C'}+S_{\triangle OA'C'}+S_{\triangle OA'B'}=S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle PB'C'}+S_{\triangle PA'C'}+S_{\triangle PA'B'},$$

知 P 到 $\triangle A'B'C'$ 各边距离之和总是等于 $OA+OB+OC$。而线段 PA、PB、PC 不全垂直于 $\triangle A'B'C'$ 的各对应边，因此

$$PA+PB+PC>OA+OB+OC.$$

若 P 在 $\triangle A'B'C'$ 的外部，显然不等式更成立。

把上述方法“移植”到空间，即可证明本题。

证明 为了简化问题的证明过程，先证明两个引理。

引理 1 由正四面体 $A'B'C'D'$ 内任一点 P, 到四面体各个面的距离之和，等于四面体的高 h。

证明 如图 5, 因 $V_{A'B'C'P}+V_{A'B'D'P}+V_{A'C'D'P}+V_{B'C'D'P}=V_{A'B'C'D'}$, 设正四面体 $A'B'C'D'$ 的每一个面的面积为 S, P 到各面的距离分别为 h_1、h_2、h_3、h_4, 则有

$$\frac{1}{3}Sh_1+\frac{1}{3}Sh_2+\frac{1}{3}Sh_3+\frac{1}{3}Sh_4=\frac{1}{3}Sh,$$

所以 $$h_1+h_2+h_3+h_4=h.$$

当 P 点在正四面体 $A'B'C'D'$ 的任一面上时，引理 1 仍然成立。

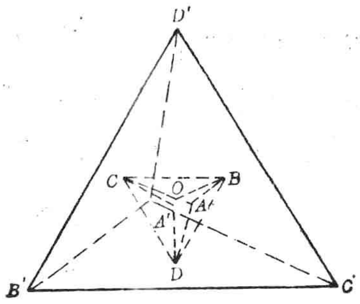


图 5

引理 2 若 P 点在正四面体 $A'B'C'D'$ 的外部，则有
$$h_1+h_2+h_3+h_4>h.$$

证明 四面体 $A'B'C'D'$ 的底面积和四面体 $A'B'C'P$, $A'B'D'P$, $A'C'D'P$, $B'C'D'P$ 的底面积都等于 S，但显然
$$\frac{1}{3}Sh_1+\frac{1}{3}Sh_2+\frac{1}{3}Sh_3+\frac{1}{3}Sh_4>\frac{1}{3}Sh,$$
所以 $$h_1+h_2+h_3+h_4>h.$$

现在转而来证本题的结论。

作四面体 $A'B'C'D'$ 外接于已知的正四面体 $ABCD$，且其对应的面互相平行，点 A、B、C、D 分别在 $A'B'C'D'$ 的面上。显然，这两个四面体相似，故知 $A'B'C'D'$ 也是正四面体。

四面体 $ABCD$ 的各高线交于一点，这点与该四面体的外接球的球心 O 重合。线段 OA、OB、OC 和 OD 恰是 O 点到四面体 $A'B'C'D'$ 各面的距离。据引理 1 有
$$OA+OB+OC+OD=h.$$

设 P 是四面体 $A'B'C'D'$ 内或面上（除 O 点外）的任一点，因为 PA、PB、PC、PD 分别大于 P 点到各面的距离，而 P 点到四面体 $A'B'C'D'$ 的各面的距离之和等于 h，故有
$$PA+PB+PC+PD>OA+OB+OC+OD.$$

据引理 2，对四面体 $A'B'C'D'$ 外任一点 P，以上不等式更成立。

（三）合分转化 即化整为零，聚零为整。解题中利用分与合的矛盾，以达到沟通条件与结论间的逻辑联系，从而得到解题途径。

例 8 将集 $M=\{(x,y)\,|\,x=0,1,\cdots,k_{n-1};y=0,1,\cdots,l_{n-1}\}$ 染上 n 种颜色。如果每一种颜色在每一行出现 k 次，在每一列出现 l 次，且这些同色的四个点所构成的矩形边与坐标轴不平行，这些同颜色的点称为相容的。求证：在每个颜色中进行可相容涂色的条件是 $kl\leqslant n(n+1)$。

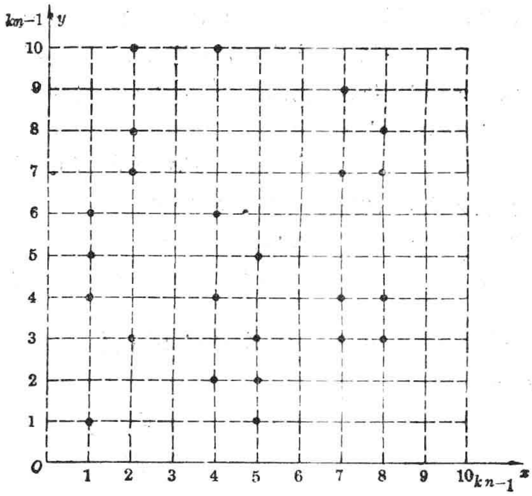


图 6

（图中 $k=3$, $l=4$, $j=4$）

分析 据题目特征，把问题分为四个小问题：

(1) 求某一颜色可相容涂色的"点对"的个数；

(2) 从 x 轴上的所有点取"点对"的个数有多少对？

(3) 建立不等式联系；

(4) 证明所求的不等式成立。

证明 不妨设 $k\leqslant l$，固定一种元素 c，如图 6，在 $y=j$ 上的两点 x 的坐标分别为 p, q，则"点对" $M_j=\{(p,q)\,|\,0\leqslant p\leqslant q\leqslant n-1,\ f(p,j)=f(q,j)=c\}$ 的个数是在 k 个点中取两点为矩形

顶点的“点对”， ∴ M_j 共有 $\frac{k(k-1)}{2}$ 对，l_n 行共有 $\frac{lnk(k-1)}{2}$“点对”。

在 x 轴上的所有“点对”(p, q)，$0\leqslant p\leqslant q\leqslant k-1$ 有 $C_{kn}^2=\frac{kn(kn-1)}{2}$ 对。

由于两点联线不平行于坐标轴，即 $M_j\cap M_i=\phi$，$0\leqslant i\leqslant j\leqslant l_n-1$。 ∴ $lnk(k-1)\leqslant kn(kn-1)$，即

$$l(k-1)\leqslant kn-1 \qquad ①$$

∵ $k\leqslant l$，∴ $k(k-1)\leqslant kn-1$，$k(k-n-1)\leqslant -1<0$，$k[k-(n+1)]<0$，$k<n+1$，$k\leqslant n$。

由①得：$l\leqslant n+\frac{n-1}{k-1}$ 两边同乘 k 得：$lk\leqslant nk+\frac{k(n-1)}{k-1}$。

∵ 函数 $y=ax+\frac{x(a-1)}{x-1}=ax+(a-1)+\frac{a-1}{x-1}$，$(a>2)$ 的导数 $y'=a-\frac{a-1}{(x-1)^2}$，当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，$y'>0$，∴ 函数在 $[2, a]$ 上是增函数。

当 k 增大到 n 时，代数式 $nk+\frac{k(n-1)}{k-1}$ 增大，故有

$$lk\leqslant nk+\frac{k(n-1)}{k-1}\leqslant n\cdot n+n=n(n+1)。$$

例 9 设 $\triangle ABC$ 的顶点 A 和 C 过以 O 为圆心的圆，又和线段 AB 和 BC 分别交于不同的点 K 和 N。 $\triangle ABC$ 和 $\triangle KBN$ 的外接圆恰相交于 B 和另一点 M。 求证：$\angle OMB$ 是直角。

分析 本题的条件与结论相距甚远，我们希望中间有一座“桥”把我们的思维路线分成两段，使每一段上的思维距离相对缩短。 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O_1， $\triangle KBN$ 的外接圆的圆心为 O_2， 由观察图 7 有 $OO_1 \mathrel{\underline{\parallel}} O_2B$。

先看 $OO_1 \mathrel{\underline{\parallel}} O_2B \xRightarrow{?} \angle OMB=90°$。

由图 7，$OO_1 \mathrel{\underline{\parallel}} O_2B \begin{array}{l}\Rightarrow OO_2=O_1B=O_1M\\ \Rightarrow OO_1=O_2B=O_2M\end{array}\Bigg] \Rightarrow O_1O_2 \parallel OM$，但 $O_1O_2\perp MB$，∴ $\angle OMB=90°$。

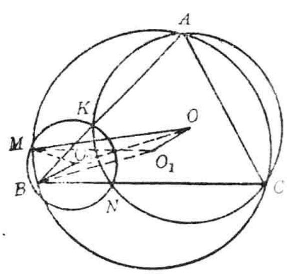


图 7

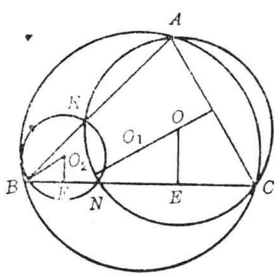


图 8

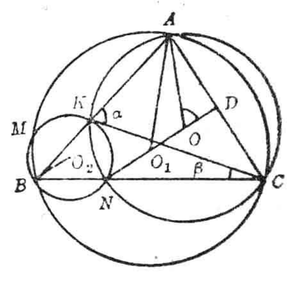


图 9

再看 $OO_1 \mathrel{\underline{\parallel}} O_2B$ 能否成立？我们又分两步：

(1) $OO_1 \overset{?}{\parallel} O_2B$ 如图 8，过 O 作 $OE\perp BC$ 交于 E，过 O_2 作 $O_2F\perp BC$ 交于 F，则

$\angle EOO_1=\angle C=\angle BKN=\angle BO_2F$，∴ $OO_1\parallel O_2B$。

(2) $OO_1\overset{?}{=}O_2B$ 如图 9，延 O_1O 交 AC 于 D，连 OA，O_1A 和 KC，令 $\angle AKC=\alpha$，$\angle KCB=\beta$，则 $\angle ABC=\angle AO_1D$，$\angle AOD=\alpha$，$\angle ABC=\alpha-\beta$，于是