华中師範大學 龙岗附属中学
THE LONGGANG HIGH SCHOOL AFFILIATED TO CENTRAL CHINA NORMAL UNIVERSITY

广东省深圳市龙岗区专家提升计划课题项目
深圳市教育科研规划立项课题（gh041）

函数中的典型问题与解题方法

孙文彩 编著

HANSHUZHONGDE DIANXINGWENTI YUJIETIFANGFA

华中师范大学龙岗附属中学第一批校本教材
深圳市龙岗区高中数学校本教材

山西出版传媒集团
山西科学技术出版社

华中师范大学龙岗附属中学
THE LONGGANG HIGH SCHOOL AFFILIATED TO CENTRAL CHINA NORMAL UNIVERSITY

广东省深圳市龙岗区专家提升计划课题项目
深圳市教育科研规划立项课题（gh041）

函数中的典型问题与解题方法

孙文彩　编著

HANSHUZHONGDE DIANXINGWENTI YUJIETIFANGFA

9634

华中师范大学龙岗附属中学第一批校本教材
深圳市龙岗区高中数学校本教材

250

山西出版传媒集团
山西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

函数中的典型问题与解题方法 / 孙文彩编著. —太原：山西科学技术出版社，2015.1

ISBN 978-7-5377-5033-2

Ⅰ. ①函… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①代数课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 016845 号

函数中的典型问题与解题方法

出 版 人：张金柱
作　　者：孙文彩
责任编辑：牟　博
责任发行：阎文凯
封面设计：侯亚萍

出版发行：山西出版传媒集团·山西科学技术出版社
地址：太原市建设南路 21 号　邮编：030012
编辑部电话：0351-4922134　0351-4922063
发行电话：0351-4922121
印　　刷：山西嘉祥印刷包装有限公司
网　　址：www.sxkxjscbs.com
微　　信：sxkjcbs

开　　本：787mm×1092mm　1/16　印张：9.75
字　　数：145千字
版　　次：2015年1月第1版　2015年1月第1次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5377-5033-2
定　　价：38.00元

本社常年法律顾问：王葆柯

广东省深圳市龙岗区专家提升计划课题项目
深圳市教育科研规划立项课题(gh041)

组　长: 孙文彩

副组长: 王中峰　　杨世明　　黄海萍

成　员(按姓氏笔画排序):

丁晓宇	马光明	马海斌	王小红	王振东
冯晋文	巩丽萍	毕永莲	刘俊红	李学萍
李春娥	李晓萍	杨文清	吴　敏	张新燕
陈记梅	武秀梅	赵　莉	赵　凌	郝　宏
钱晓燕	高焕晨	常磊文	崔志清	葛　平
董继相	裴建平	樊　宇	薛　莹	薛鹏飞

前言

函数是数学中的一个最基本也是最重要的概念,在现代数学中,它几乎渗透到高中数学的各个分支,三角、解析几何、不等式、数列等都与函数有着密切的关系.函数是高中数学的一条主线,因此函数不仅是历届高考关注的一个热点内容,同时也是数学竞赛中一个长盛不衰的内容.

函数中隐含着许多重要的数学思想,例如:函数与方程思想、化归转化思想、数形结合思想、分类讨论思想等等,同时也隐含着许多重要的解题方法,例如:配方法、换元法、判别式法、待定系数法、构造法等等.这些都是函数概念、性质等知识在高层次上的提炼和总结,是在知识和技能反复学习运用中抽象或概括出的带有观念性、经验性的思维指导与解题方法,是高中学生必须了解或学习的基本内容.

本书是华中师范大学龙岗附属中学首次开发的校本教材,是与高中课程标准教材《必修1》相匹配的一本课外阅读参考书.教材系统地归纳了高中函数中的一些典型问题,全面介绍了相关问题的一些基本解题方法,目的是希望同学们对函数知识与体系有一个较为全面、深入的认识与了解,形成较为合理的函数知识体系,为进一步学习奠定坚实的数学基础.

本教材非常适合于高中一年级学生、中学数学教师课外阅读,也可作为数学课外活动、专题讲座、数学培优的教学参考书.

限于编者水平,对某些问题的认识和了解可能不够全面,旨在抛砖引玉,恳求各位专家指正!

孙文彩

2014年9月

CONTENTS

目录

第一节　集合及其应用

集合是一种基本的数学语言、数学工具.它不仅是高中数学的第一课，而且是整个数学的基础.集合论作为纯粹数学的一个分支是近一百年的事，它的创始人是德国数学家康托尔(1845—1918),1874年他发表了一篇《关于实代数数所组成的集合的一个性质》的论文,此篇论文标志着集合论的诞生.用集合的观点分析和考察数学问题,可以使问题变得更加清晰,更加深刻.因此对集合的学习就不能停留在高中数学起始课的水平上,而是要随着数学学习的发展不断进行深化.

下面我们介绍集合知识中的几个重要定理与概念.

1. 德摩根公式(教材必修1上有介绍)

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_UA)\cup(\complement_UB)$,$\complement_U(A\cup B)=(\complement_UA)\cap(\complement_UB)$.

2. 容斥原理(符号card(A)表示集合A的元素个数)

定理1　对任意两个有限集合A,B,则有$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

定理2　对任意三个有限集合A,B,C,则有$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$.

一般地,对任意n个有限集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$,有$\mathrm{card}(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n)=[\mathrm{card}(A_1)+\mathrm{card}(A_2)+\mathrm{card}(A_3)+\cdots+\mathrm{card}(A_n)]-[\mathrm{card}(A_1\cap A_2)+\mathrm{card}(A_1\cap A_3)+\cdots+\mathrm{card}(A_1\cap A_n)+\cdots+\mathrm{card}(A_{n-1}\cap A_n)]+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\mathrm{card}(A_1\cap A_3\cap\cdots\cap A_n)$.

容斥原理常常用来解决求有限集合元素的个数问题.

3. 幂集合

设A是一个集合，以A的一切子集作为元素所组成的集合称为A的幂集合，记为$P(A)$，$P(A)=\{X\mid X\subseteq A\}$，例如$A=\{1,2\}$，$A$的幂集合$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$，则需要注意的是现行中学课本教材中没有这样的定义，因此只作为课外拓展阅读.

有n个元素的集合A，其幂集合$P(A)$中有2^n个元素.

4. 集合论悖论(历史故事欣赏)

相传古代有一位理发师，在过新年时，由于店里的顾客特别多，于是他给自己立了一条规则：他只给村子里自己不给自己刮胡子的人刮胡子，一天晚上夜深人静时，他突发奇想：那我该不该给自己刮胡子？

如果他不给自己刮胡子，那么，他属于“自己不给自己刮胡子”的那一类村民，按约定，他必然给自己刮胡子.

如果他给自己刮胡子，那么他属于“自己给自己刮胡子”的那一类村民，按规则，他决不应该给自己刮胡子.

该不该给自己刮胡子，已形成矛盾.这个故事有没有发生过，已无从考证，但故事本身所蕴含的深刻的哲学思辨曾引起集合中一个问题的激烈讨论——集合论悖论.

1902年英国数学家罗素提出了著名的“集合论悖论”，如果设A为一切不含自身为元素的集合所组成的新集合，记为$A=\{x\mid x\notin A\}$，那么$A\in A$还是$A\notin A$？仿照理发师的逻辑，你无论如何都能得到$A\in A\Leftrightarrow A\notin A$这样一个矛盾结论，这就是震惊世界的集合论悖论，悖论引起了数学界激烈的争论，从而引发数学史上的危机，称为第三次数学危机，到目前为止，该危机也没有获得彻底解决，然而对于它的研究，却大大地促进了数学的发展.

5. 集合的基数

比较两个班级的人数是一件很容易的事情，只要一个一个计数就行，比

较两个有限集合元素个数的多少也可用一一计数法或一一对应法，然而当两个集合是无限集时，数数的办法就无能为力了，例如自然数与自然数集中的偶数谁多？大多数同学都会认为自然数多，但如果建立如下一一对应：

$$n \to 2n$$

可以说自然数与自然数集中的偶数一样多，你难道不相信？可事实就是这样.

定义1　设有两个集合X,Y，如果存在一个X到Y上的一一对应$f: X \to Y$，则称集合X与集合Y等势，记作$X \sim Y$，例如，$[0,1] \sim [0,10] \sim [0,100] \sim \cdots$.

定义2　按等势的等价关系可以将集合进行分类，一切与集合X等势的集合归于一类，称为X的基数或势，记作$\overline{X}$.

思考一个问题：集合$A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$与集合$B=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$中的元素是否一样多？学生普遍认为集合$B$比集合$A$多两个元素0，1，事实上这两个集合中的元素"一样多".

我们作如下映射对应关系：

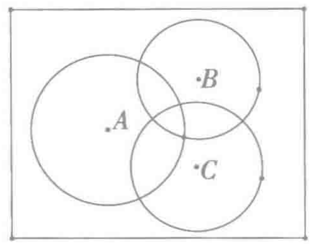
$$f(x)=\begin{cases} 0, x=\dfrac{1}{2}, \\ 1, x=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{n-2}, x=\dfrac{1}{n}, n=4,5,\cdots, \end{cases}$$

显然映射f是一个从集合A到集合B的一一对应，也就是说集合A与集合B的元素一样多，即集合A与集合B等势，记作$A \sim B$.

有限集中基数与元素个数概念一样，无限集中没有元素个数概念，只有基数概念，对集合基数的研究是高等数学的内容，这里不再赘述.

典例分析

一、课本拓展



例1 开运动会时,高一某班共有28名同学参加比赛,有15人参加游泳比赛,有8人参加田径比赛,有14人参加球类比赛,同时参加游泳比赛和田径比赛的有3人,同时参加游泳比赛和球类比赛的有3人,没有人同时参加三项比赛,问同时参加田径比赛和球类比赛的有多少人?只参加游泳一项比赛的有多少人?

解 设A={参加游泳比赛的人},B={参加田径比赛的人},C={参加球类比赛的人},由已知条件知$\text{card}(A\cap B)=3$,$\text{card}(A\cap C)=3$,$\text{card}(A\cap B\cap C)=0$.

由容斥原理$\text{card}(A\cup B\cup C)=\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(A\cap C)-\text{card}(B\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap C)$,

得$28=15+8+14-6-\text{card}(B\cap C)+0$.

所以$\text{card}(B\cap C)=3$,只参加游泳一项比赛的人只有$15-3-3=9$人.

答 同时参加田径比赛和球类比赛的有3人,只参加游泳一项比赛的有9人.

【点评】 容斥原理有多种推广形式,是高中数学竞赛中的一种重要解题方法,下面我们再介绍容斥原理的一个其他应用.

如果记$[x]$表示x的整数部分,即不大于x的最大整数(常称为高斯函数),则易验算$[3]=3$,$[3.4]=3$,$[3.9]=3$.

引理 自然数$1,2,3,4,\cdots,n$中,能够被正整数k整除的数的个数为$\left[\dfrac{n}{k}\right]$.

利用容斥原理我们很容易求得.

题　自然数1,2,3,4,…,n中,既不能被m整除也不能被k整除的数有多少个?(其中m,k的公约数为1)

解　设既不能被m整除也不能被k整除的数有W个,则被m整除的个数为$\mathrm{card}(A)=[\frac{n}{m}]$,被$k$整除的个数为$\mathrm{card}(B)=[\frac{n}{k}]$.

由容斥原理 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$,得被$m$或者被$k$整除的个数为$\mathrm{card}(A\cup B)$.

所以既不能被m整除也不能被k整除的个数为

$W=n-[\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)]=n-[\frac{n}{m}]-[\frac{n}{k}]+[\frac{n}{mk}]$.

二、"补集思想"在解题中的应用

例2　若下列三个方程:$x^2+4ax-4a+3=0$,$x^2+(a-1)x+a^2=0$,$x^2+2ax-2a=0$中至少有一个方程有实根,试求实数a的取值范围.

解　若三个方程均无实根,则有$\begin{cases}\Delta_1=(4a)^2-4(-4a+3)<0,\\ \Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\ \Delta_3=(2a)^2-4(-2a)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2},\\ a<-1,或a>\frac{1}{3},\\ -2<a<0\end{cases}$

$\Rightarrow-\frac{3}{2}<a<-1$,即$A=\{a\mid-\frac{3}{2}<a<-1\}$,于是三个方程至少有一个方程有实根时实数$a$的取值范围为$\complement_U A=\{a\mid a\leqslant-\frac{3}{2},或a\geqslant-1\}$.

故实数a的取值范围是$a\leqslant-\frac{3}{2}$,或$a\geqslant-1$.

【点评】　本题的正面解答有七种情形需要考虑,而其反面只有一种,即"三个方程均无实根",使用"补集思想"先考虑其反面,再求正面是本题的解题捷径."补集思想"体现的是"正难则反"的解题策略,值得我们认真体会、学习并运用.

三、名题鉴赏

例3 设S为满足下列两个条件的实数所构成的集合:①S内不含1;②若$a\in S$,则$\frac{1}{1-a}\in S$.解答下列问题:

(1)若$2\in S$,则S中必有其他两个元素,求出这两个元素;

(2)求证:若$a\in S$,则$1-\frac{1}{a}\in S$;

(3)在集合S中元素的个数能否只有一个?请说明理由.

解 (1)由$2\in S\Rightarrow -1\in S\Rightarrow \frac{1}{2}\in S\Rightarrow 2\in S$,得$-1,\frac{1}{2}$为所求.

(2)由$a\in S\Rightarrow \frac{1}{1-a}\in S\Rightarrow \frac{1-a}{1-a-1}\in S$,得$1-\frac{1}{a}\in S$.

(3)在集合S中元素的个数不能只有一个.

$\because$由$a=\frac{1}{1-a}\Rightarrow a^2-a+1=0$,该方程无实数解,

故S不能只有一个元素.

【点评】 本题是集合中经常出现的一道名题,事实上集合S只有三个元素,形成一个闭循环,即$S=\{a,\frac{1}{1-a},1-\frac{1}{a}\}$.

若$a\in S$,则$1-\frac{1}{a}\in S$,或若$\frac{1}{1-a}\in S$,则$1-\frac{1}{a}\in S$,也能得到集合S.

例4 已知集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant 2)$,其中$a_i\in \mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,k)$,由$A$中的元素构成两个相应的集合:$S=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a+b\in A\}$,$T=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a-b\in A\}$.其中$(a,b)$是有序数对,集合$S$和$T$中的元素个数分别为$m$和$n$.

(1)若集合$A=\{-1,1,2\}$,写出相应的集合S和T;

(2)判断m和n的大小关系,并证明你的结论.

解 (1)相应的集合S和T分别为$S=\{(-1,2),(2,-1),(1,1)\}$,$T=\{(1,-1),(1,2),(2,1)\}$.

(2)$m=n$.证明如下:

①对于$(a,b)\in S$，根据定义，$a\in A$，$b\in A$，且$a+b\in A$，从而$(a+b,b)\in T$.而且如果(a,b)与(c,d)是S的不同元素，那么$a=c$与$b=d$中至少有一个不成立，从而$a+b=c+d$与$b=d$中也至少有一个不成立.故$(a+b,b)$与$(c+d,d)$也是T的不同元素.可见，S中元素的个数不多于T中元素的个数，即$m\leqslant n$.

②对于$(a,b)\in T$，根据定义，$a\in A$，$b\in A$，且$a-b\in A$，从而$(a-b,b)\in S$.如果(a,b)与(c,d)是T的不同元素，那么$a=c$与$b=d$中至少有一个不成立，从而$a-b=c-d$与$b=d$中也至少有一个不成立，故$(a-b,b)$与$(c-d,d)$也是S的不同元素.可见，T中元素的个数不多于S中元素的个数，即$n\leqslant m$.

由①②可知，$m=n$.

【点评】 证明两个集合相等，必须证明$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，证明两个集合中元素的个数相等，也可仿此证明.

四、创新高考题

例5 (2009年高考北京卷)设A是整数集的一个非空子集，对于$k\in A$，如果$k-1\notin A$且$k+1\notin A$，那么k是A的一个“孤立元”，给定$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，由S的3个元素构成的所有集合中，不含“孤立元”的集合共有________个.

解 依题意可知，“孤立元”必须是没有与k相邻的元素，因而无“孤立元”是指在集合中有与k相邻的元素，因此，符合题意的集合是$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，$\{3,4,5\}$，$\{4,5,6\}$，$\{5,6,7\}$$\{6,7,8\}$共6个.

故应填6.

例6 (2011年高考广东卷)设A是整数集$\mathbf{Z}$的一个非空子集，如果$\forall a$，$b\in S$，有$ab\in S$，则称S关于数的乘法是封闭的，若T，V是$\mathbf{Z}$的两个不相交的非空子集，$T\cup V=\mathbf{Z}$，且$\forall a,b,c\in T$，有$abc\in T$；$\forall x,y,z\in V$，有$xyz\in V$，则下列结论恒成立的是　　(　　)

A. T,V中至少有一个关于乘法是封闭的

B. T,V中至多有一个关于乘法是封闭的

C. T,V中有且只有一个关于乘法是封闭的

D. T,V中每一个关于乘法是封闭的

解 取$T=\{x \mid x\in(-\infty,0),x\in \mathbf{Z}\}$，$V=\{x \mid x\in[0,+\infty),x\in \mathbf{Z}\}$，可得$T$对乘法不封闭，$V$关于乘法封闭，排除D；又取$T=\{奇数\}$，$V=\{偶数\}$，可得$T$，$V$关于乘法均封闭，故排除B，C.

故选A.

【点评】 “孤立元”与“封闭”都是新定义的数学概念，例5、例6主要考查学生的阅读与理解能力，信息迁移与处理能力，以及学生分析问题、解决问题的能力，这种新定义型信息题是近几年高考试题改革的一个亮点.

例7 （2013年高考湖南卷）对于$E=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$的子集$X=\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\}$，定义$X$的“特征数列”为$x_1,x_2,\cdots,x_{100}$，其中$x_{i_1}=x_{i_2}=\cdots=x_{i_k}=1$，其余项均为0，例如，子集$\{a_2,a_3\}$的“特征数列”为0，1，1，0，0，…，0.

（1）子集$\{a_1,a_3,a_5\}$的“特征数列”的前3项和等于________.

（2）若E的子集P的“特征数列”$p_1,p_2,\cdots,p_{100}$满足$p_i+p_{i+1}=1(1\leqslant i\leqslant 99)$；$E$的子集$Q$的“特征数列”$q_1,q_2,\cdots,q_{100}$满足$q_j+q_{j+1}+q_{j+2}=1(1\leqslant j\leqslant 98)$，则$P\cap Q$的元素个数为________.

解 （1）子集$\{a_1,a_3,a_5\}$的“特征数列”的前三项为1，0，1，故前三项和为2.

（2）依题意E的子集P的“特征数列”为1，0，1，0，1，0，1，0，…，1，0，即$P=\{a_1,a_3,a_5,\cdots,a_{99}\}$，$E$的子集$Q$的“特征数列”1，0，0，1，0，0，1，0，0，…，0，1，即$Q=\{a_1,a_4,a_7,a_{10},\cdots,a_{100}\}$，集合$Q$中有34个元素，其下标为奇数的有17个，因此$P\cap Q=\{a_1,a_7,a_{13},\cdots,a_{97}\}$，共有17个元素.

故应填（1）2；（2）17.

【点评】 本题是集合与数列的综合创新题目，其解题的关键是对“特征数列”概念的正确理解以及性质的运用.

对已有知识的创新，特别是对有集合背景的问题进行创新已成为高考命题的一大亮点，这种题能较好地考查学生的知识迁移能力和转化能力，从而可检测出学生理性思维的广度和深度.

五、老生常谈

例8 已知集合$A=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x \mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若$A\cap B=B$，

求m的取值范围.

解　$\because A\cap B=B$，$\therefore B\subseteq A$.下面对集合B进行分类讨论：

(1)若$B=\varnothing$，则$m+1>2m-1\Rightarrow m<2$.

(2)若$B\neq\varnothing$，则$m\geqslant 2$.

$\because B\subseteq A$，则有$\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\2m-1\leqslant 5\end{cases}\Rightarrow -3\leqslant m\leqslant 3$，

结合$m\geqslant 2$，则有$2\leqslant m\leqslant 3$.

综合(1)(2)，可得m的取值范围是$m\leqslant 3$.

【点评】　此类题是集合运算中经常遇到的一种题型，老生常谈，主要考查学生的基本运算能力，没有什么特别的技能与技巧，除需要注意条件$A\cap B=B$的转化外，特别需要注意含参变量的集合$B=\varnothing$的情形.

六、老树开花

例9　若集合A_1，A_2满足$A_1\cup A_2=A$，则称(A_1,A_2)为集合A的一种分拆，并规定：当且仅当$A_1=A_2$时，(A_1,A_2)与(A_2,A_1)为集合A的同一种分拆.

(1)集合$A=\{a,b\}$的不同分拆种数为多少？

(2)集合$A=\{a,b,c\}$的不同分拆种数为多少？

(3)由上述两题归纳一般的情形：集合$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$的不同分拆种数为多少？（不必证明）

解　(1)$A_1=\varnothing$时，$A_2=A$，此时只有1种分拆；

A_1为单元素集时，$A_2=\complement_A A_1$，或$A_2=A$，此时A_1有2种情况，故拆法为4种；

当$A_1=A$时，A_2可取A的任何子集，此时A_2有4种情况.

总之，共有9种拆法.

(2)$A_1=\varnothing$时，$A_2=A$，此时只有1种分拆；

A_1为单元素集时，$A_2=\complement_A A_1$或$A_2=A$，此时A_1有3种情况，故拆法为6种；

A_1为双元素集时，此时A_1有3种情况，故拆法为12种；

当$A_1=A$时，A_2可取A的任何子集，此时A_2有8种情况.

总之，共有27种拆法.

(3)集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的不同分拆种数为3^n.

【点评】 一个普通的集合的并集运算,在集合基础上对元素进行“分拆”定义,却变成一个很有意思的问题,老树新花别样红.

巩固训练

1. 设$S=\{(x,y)|xy>0\}$,$T=\{(x,y)|x>0,y>0\}$,则 ( )

A. $S\cup T=S$　　B. $S\cup T=T$

C. $S\cap T=\varnothing$　　D. $S\cap T=S$

2. 区间$[0,m]$在映射$f:x\to 2x+m$下所得的象集区间为$[a,b]$,若区间$[a,b]$的长度比区间$[0,m]$的长度大5,则$m=$ ( )

A. 5　　B. 10

C. 2.5　　D. 1

3. 由等式$x_4+a_1x_3+a_2x_2+a_3x+a_4=(x+1)^4+b_1(x+1)^3+b_2(x+1)^2+b_3(x+1)+b_4$定义映射$f:(a_1,a_2,a_3,a_4)\to(b_1,b_2,b_3,b_4)$,则$f(4,3,2,1)=$ ( )

A. $(1,2,3,4)$　　B. $(0,3,4,0)$

C. $(-1,0,2,-2)$　　D. $(0,-3,4,-1)$

4. 已知集合$M=\{x|x^2+14x+48<0\}$,$S=\{x|2a^2+ax-x^2<0\}$,若$M\subsetneqq S$,则实数$a\in$ ( )

A. $[-3,0]$　　B. $[-3,6]$

C. $[-3,0)\cup(0,6)$　　D. $(0,6)$

5. 已知集合$A=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$,则$A\cap B=$ ( )

A. $(0,1),(1,2)$　　B. $\{(0,1),(1,2)\}$

C. $\{y|y\geqslant 1\}$　　D. $\{y|y=1,或y=2\}$

6. 集合$A=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x|x^2-mx+2=0\}$,$A\cap B=B$,则实数m的取值范围是______.

7. 若规定$E=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$的子集$\{a_{k_1}a_{k_2},\ldots,a_{k_n}\}$为$E$的第$k$个子集,其中$k$

$=2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_n}$，则

(1) $\{a_1,a_3\}$是E的第__________个子集；

(2) E的第211个子集是____________.

8. 已知集合$M=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$S=\{0,|x|,|y|\}$，且$M=S$，则$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2014}+\frac{1}{y^{2014}})$的值等于________.

9. 集合$A=\left\{x \mid x\in\mathbf{Z}，且\frac{600}{5-x}\in\mathbf{Z}\right\}$的元素个数是__________.

10. 某班期末对数学、物理、化学三科总评成绩有21个优秀，物理总评19人优秀，化学总评有20人优秀，数学和物理都优秀的有9人，物理和化学都优秀的有7人，化学和数学都优秀的有8人，该班有5名学生没有任一科是优秀，试确定全班人数以及仅数学、仅物理、仅化学单科优秀的人数范围.