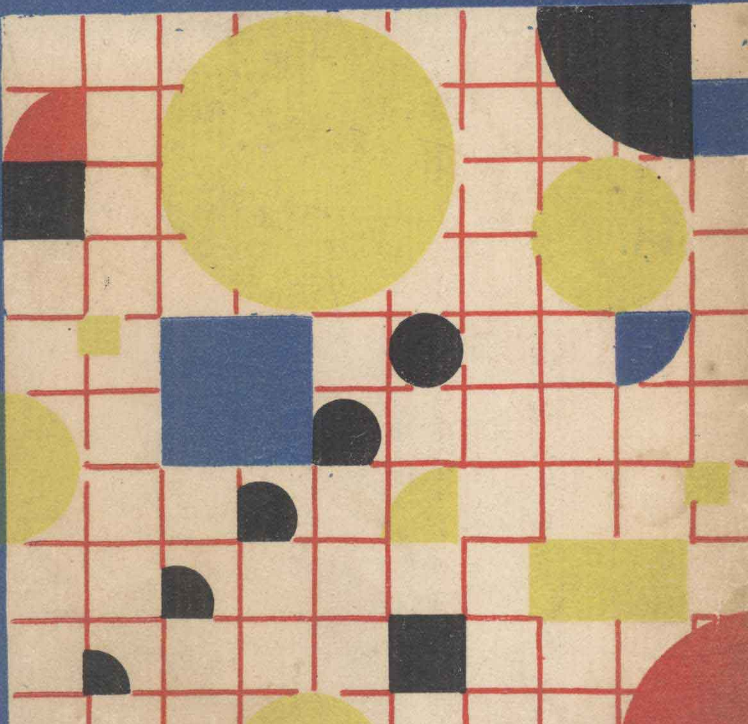
师专试用教材

概率统计初步

杨承稊 编

湖南教育出版社



师专试用教材

概率统计初步

杨承稊 编

出版社

概率统计初步
杨承秭　编
责任编辑：郑落沙

*

湖南教育出版社出版发行（长沙市展览馆路3号）
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷
字数：318,000　印张：14　印数：1——700
ISBN 7—5355—0442—6／G・438

统一书号：7284・1046　定价：3.00 元

序

这是一本叙述概率论与数理统计的基本理论的书，适用于作为三年制师范专科学校数学科的教材。

本书对概率论的基本概念讲得很清楚，理论比较严密，而且联系实际（特别是联系中学教材实际）的例题很多，学生学完本书后，到中学教授概率论课，当无困难。这是本书区别于其他概率论教材的特点之一。对一些重要概念，交代得很详细，许多题目，往往是一题有数种解答方法，这有利于读者自学和思考。每章都附有习题，并附有单元自我检查题。

作为师专的教材，本书是可以胜任的。我们期望它将取得好的教学效果。

王梓坤

86.11.20.

目 录

第一章　事件和概率

学 习 指 导

1．概念方面：要注意“两事件和”与“两事件积”的区别，“两事件和”与“两事件差”的区别,“两事件互斥”与“两事件互逆”的区别和联系,“两事件互斥”与“两事件独立”的区别。

2．公式方面:要注意七个公式各自成立的前提条件和适用范围。重点是古典型公式，难点是贝叶斯公式。

3．基本训练方面，要注意以下三点：

(1) 善于判断什么情况下用什么公式；

(2) 主动地、有意识地培养自己将概念和公式进行推广的能力；

(3) 多做古典型公式的题目,并总结自己的解题经验和教训,这不仅对掌握本章内容至关重要，而且对今后搞好中学概率论课程的教学也是十分重要的。

§1　随机试验和随机事件

在千变万化的客观世界中，许多事物我们是无法事先断定它们的结果的。

例1 从某工厂生产的产品中随意地抽取5件进行检查，看有几件次品．可能结果是：无次品，恰一件次品，恰二件次品，恰三件次品，恰四件次品，五件次品．检查之前，我们无法断言哪种结果发生．

例2 从一批水稻品种中随意地抽取3粒在试验田里种植，看有几粒发芽．可能结果是：均不发芽，恰一粒发芽，恰二粒发芽，三粒发芽．事先我们也无法断言哪种结果发生．

在这类事物面前，我们是否就束手无策了呢？不！辩证唯物主义又肯定了事物发展过程中必然性和偶然性之对立的统一．认为必然性寓于偶然性之中．革命导师恩格斯说："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律"．(见《马克思恩格斯选集》第四卷第243页，1972年版）恩格斯说得好极了．我们的任务就在于，要从看起来无法事先断言其结果的偶然性之中找出其本身固有的内在必然规律．概率论就是研究大量偶然现象之必然规律的一个数学分支．下面就从这两个例子开始，叙述概率论的初步知识．

以上两例均可看作试验．它们的共同特点是：1° 可以在相同条件下重复进行；2°每次试验的可能结果不只一种，并且能事先明确所有可能结果；3°试验之前，不能确定哪一种结果发生（出现）．我们把这类具有上述三个特点的试验称为**随机试验**（简称**试验**）．随机试验的一种**可能结果**叫做一个**随机事件**（简称**事件**）．特别地，随机试验的一种**直接结果**叫做一个**基本事件**．如上述例1中"抽取5件产品检查次品件数"就是一个随机试验．这个随机试验共有六种直接结果："无次品"，"恰一件次品"，…，"五件次品"．这六种直接结果就是六个基本事件．在一次试验下，这六个基本事

件有且只有一个发生."至少三件次品"是随机试验中的一种结果，从而是一个随机事件，它是由"恰三件次品"、"恰四件次品"和"五件次品"这三个基本事件复合组成的.又如上述例2中,"抽取3粒水稻品种播植检查发芽粒数" 也是一个随机试验. 这个随机试验共有四种直接结果:"均不发芽","恰一粒发芽","恰二粒发芽"和"三粒发芽".这四种直接结果是四个基本事件. 在一次试验下，这四个基本事件有且只有一个发生."有奇数粒发芽" 是随机试验的一种结果，从而是一个随机事件，它是由"恰一粒发芽"和 "三粒发芽" 这两个基本事件复合组成的.

由此可见：**基本事件是随机事件的一种，在一次试验之下，有且只有一个基本事件发生；一般的随机事件总是由若干基本事件复合组成的；当且仅当组成事件A的一个基本事件发生时A发生.**

一个随机试验的基本事件的全体称为这个试验的**基本事件空间**. 将复合成A的基本事件全体记作$\widetilde{A}$.

请注意,"基本事件" 是相对于确定的随机试验而言的.例如，在 "播种三粒种子考察其发芽粒数" 的随机试验中只有 4 个基本事件（见上),也就是说，这个试验的基本事件空间包含4个元素.但在"播三粒种子考察各粒发芽情况"的随机试验中，基本事件就不是4个,而是8个.即此试验中，基本事件空间包含8个元素.如下表所示：

事件名称	第一粒	第二粒	第三粒
B_0	不发芽	不发芽	不发芽
B_1	发芽	不发芽	不发芽
B_2	不发芽	发芽	不发芽

B_3	不发芽	不发芽	发芽
B_4	发芽	发芽	不发芽
B_5	发芽	不发芽	发芽
B_6	不发芽	发芽	发芽
B_7	发芽	发芽	发芽

很显然，在这个新的随机试验中，事件"恰一粒发芽"就不再是基本事件了，它是由B_1、B_2和B_3这三个基本事件复合组成的一般的随机事件.

由此可见，在具体问题中，十分重要的是：认清基本事件空间是由什么构成的.

在随机试验中，必然发生的事件称为**必然事件**. 例如，在上述例1的"抽取5件产品检查次品件数"这一随机试验中，事件"抽到次品件数不多于5"是必然发生的事件，故是必然事件. 同样，事件"抽到次品件数不多于8"也是必然发生的事件，故也是必然事件. 凡是必然要发生的事件，显然都由全部基本事件复合组成(例如，两个必然事件"抽到次品件数不多于5"和"抽到次品件数不多于8"都是由全部基本事件（共六个）复合组成的).于是，在名称和记号上一般不再加以区分，统一称为必然事件，统一用字母Ω(希腊文，读音"欧米嘎")来记.

在随机试验中，不可能发生的事件称为**不可能事件**. 在上述例1的随机试验中，"次品件数多于8"和"次品件数为7"都是不可能发生的，都是不可能事件. 凡是不可能事件，显然都不能由任何一个或几个基本事件复合组成，因而在名称和记号上一般不再加以区别，统一称为不可能事件，统一用字母$\varnothing$(丹麦文，读音"欧")来记.

本来，必然事件和不可能事件并不具有随机性，但为讨论的

方便，我们把必然事件和不可能事件也都算作是随机事件.

练习1—1

1．写出本节例2这个随机试验中的全部事件.

2．随机试验E是：连掷两次硬币，观察各次出现正、反面情况，试先写出E的全部基本事件，再写出其他全部事件.

3．随机试验E是：连掷2次骰子，观察各次出现点数.

(i)写出E的全部基本事件，再指出共有多少个事件；

(ii)“第一次点数不小于第二次点数”这一事件是由哪些基本事件复合而成的？

4．随机试验E是：从6件产品(一等品1件，二等品2件，三等品3件)中随意取出2件，观察所得产品是几等品.

(i)写出E的全部基本事件，并指出有多少个事件；

(ii)“所得2件产品等级不同”这一事件是由哪些基本事件复合组成的？

5．随机试验E是：从甲、乙、丙三人中任选两人下棋，观察胜、负、平局情况.

(i)写出E的全部基本事件，并指出共有多少个事件；

(ii)“甲胜”这一事件由哪些基本事件复合组成？

6．随机试验E是：从分别标有号数1，2，3，4，5，6，7，8，9，10的十张号签中任取一张，考察抽到几号签(见高中代数第三册P.86)，问E中共有多少个随机事件.

§2　事件的概率

在生产斗争和科学实验中，往往要求我们能从数值上确切地预言某随机事件发生的可能性究竟有多大．例如，需要知道从某

工厂所生产的产品中随意抽一件得到次品的可能性究竟有多大；又如，一束纤维中随意抽一根其长度符合国家标准的可能性究竟有多大等等．本节便来讨论这个问题．

我们发现，尽管在一、两次试验中随机事件的发生带有偶然性，然而，对同一事件，作大量次数的试验，却又呈现出一种完全确定性的规律来．这个规律性告诉我们：随机事件发生的可能性大小是可以度量的，或者说，是可以用数值来表达的．下面通过实例加以说明．

例1 历史上有人进行过投掷硬币考察出现正、反面情况的试验．试验结果如下表：

试验者	隶莫庚	蒲丰	皮尔逊	皮尔逊	杰万斯
投掷次数n	4092	4040	12000	24000	20480
出现正面次数f	2148	2048	6019	12012	10379
出现正面频率f/n	0.5005	0.5069	0.5016	0.5005	0.5068

从这个实例看到：第一，随着投掷次数的增加，出现正面的频率围绕着一个确定的常数(0.5)作幅度愈来愈小的波动；第二，这种试验由不同的人各自独立地作出，而所得的结果——正面出现频率稳定于0.5——却是一致的．这说明正面出现频率稳定于0.5是一个客观存在的事实．

例2 下表是俄罗斯的一个统计资料，它说明，在五年之中，无地址平信出现的频率也是稳定的（相差不到10^{-5}）．

年份	1906	1907	1908	1909	1910
平信总数n	983×10^6	1076×10^6	1214×10^6	1357×10^6	1507×10^6
无地址平信数f	26112	26977	33515	33643	40101
无地址信频率f/n	27×10^{-6}	25×10^{-6}	27×10^{-6}	25×10^{-6}	27×10^{-6}

上述两个历史资料以及其他许许多多客观事实都表明这样一个结论：当试验次数充分大时，随着试验次数的增加，事件A出现的频率围绕着一个确定的常数p作幅度愈来愈小的波动（当然，也可能出现少数次较大波动）．这种性质称为**频率的稳定性**，而p称为**稳定中心**．

这也就是说，随机事件频率围绕其稳定中心摆动是它本身所固有的属性，并且这个稳定中心是可以通过大量重复试验来得到的．因此很自然地将频率稳定中心作为事件发生可能性大小的度量．于是我们引进概率的直观性定义如下：

在随机试验中试验次数不断增加的情况下，事件A之频率的稳定中心$\boldsymbol{p}$称为$\boldsymbol{A}$的概率，并记为$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$，即$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{p}$．

于是，在“投掷硬币考察出现正、反面情况”的随机试验中，若用A记事件“出现正面”，即令$A=\{$出现正面$\}$，则$P(A)=\frac{1}{2}$．

在实际意义上，$P(A)$就是事件A出现的可能性大小的数值表示：$P(A)$越大，事件A出现的可能性也就越大．

上述概率的概念，是人们通过长期实践总结出来的，是客观规律的反映．一般在实际应用中，常常把试验次数n很大时事件的频率，作为事件的概率的近似值．

必然事件和不可能事件可看作随机事件的两个极端情形．由

于必然事件Ω的频率总是1，自然它的频率稳定中心也是1，即其概率为1，即$P(\Omega)=1$．这和我们通常所说的“必然发生的事件有100%的把握要出现”是相符的（100%=1）．由于不可能事件$\varnothing$的频率总是0，自然它的频率稳定中心也是0，即其概率为0，即$P(\varnothing)=0$．这和我们通常所说的“不可能发生的事件出现的可能性为零”相符．由于任何事件A的频率不可能是负数，也不可能比1大，自然它的稳定中心也不可能是负数或比1大．即其概率只可能是介于0与1之间的数．故**对任何事件A都有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$．**

到此，自然会发问：对一给定事件A，究竟怎样确定它的概率$P(A)$呢？前面说过，可以做多次试验，取A的频率近似地作为A的概率．我们对这种近似代替不应该有不满意或不实在的感觉，因为大家知道，这种“近似代替”是正常现象，也是普遍现象．例如，一张具体桌子的高度是多少？我们只能通过测量得到它的近似值，无法得到它的精确值，也无需得到它的精确值．就象这并不影响几何学的发展和应用一样，取频率作为概率的近似值，也不会影响概率论的发展和应用．这是因为平面几何学的主要任务并不在于确定某具体的几何图形的度量，而在于揭示其内在规律．概率论也是这样，它的主要任务并不在于确定某具体的随机事件的概率究竟是多少，而在于揭示其内在规律．

§3 事件间的关系和运算

我们现在研究同一随机试验中的多个事件及其相互间的关系．在§1例1中的“任取5件产品，检查次品件数”随机试验（本节一律简称它为随机试验E）中，就有许许多多的随机事件，这些随机事件之间是存在着关系的．譬如，随机事件{恰一件次品}和

{偶数件次品}就有关系：它们不能同时发生。很显然，事件之间的关系必然导致它们的概率之间也存在一定的关系。研究并掌握这种关系就有可能从某一些事件的概率去求得另一些事件的概率，从简单事件的概率去求得复杂事件的概率。为此，首先应当熟悉事件间的关系及其运算，常见的事件间的关系及运算有如下几种：

一、包含关系

在同一随机试验中，如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，记为$A \subset B$（或$B \supset A$）。例如，在随机试验E中，事件{恰一件次品}的发生必然导致事件{奇数件次品}发生。所以，事件{奇数件次品}包含事件{恰一件次品}。同样道理，事件{奇数件次品}还包含事件{恰3件次品}和{5件次品}。显然，

1° 任一随机事件包含复合成它的每一基本事件；

2° 若$A \subset B$，$B \subset C$，则$A \subset C$；

3° 若$A \subset B$，则复合成A的每一基本事件也是复合成B的一个基本事件。即$\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$。

特别地，如果$A \subset B$和$B \subset A$同时成立，则称A与B等价或A与B相等。记作$A = B$。显然，

1° $A = A$　　　　2° 若$A = B$，则$B = A$；

3° 若$A = B$，$B = C$，则$A = C$；

4° 若$A = B$，则复合成A的基本事件全体和复合成B的基本事件全体重合。即$\widetilde{A} = \widetilde{B}$。

上述事件相等的定义表明，在同一随机试验中，如果两事件总是同时发生（因而也总是同时不发生），则应将它们看成是没有区别的。于是，当一个事件什么时候发生什么时候不发生完全确