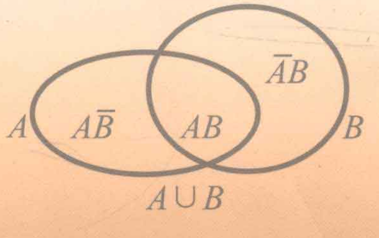
概率统计
解题方法与技巧

上海交通大学数学系　冯卫国　武爱文　编



上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

概率统计解题方法与技巧

上海交通大学数学系

冯卫国 武爱文 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书系作者根据长期教学经验，并参考国内外有关资料，把概率统计中常用的解题方法加以归纳总结而成。

全书根据当前通用教材的结构，按章给出了每章的基本概念、基本性质、习题分类、解题方法和示例。全书精选286道典型例题，大部分附有解题思路和方法的详尽分析。

本书可供各高等理工科院校讲授和学习概率统计的师生参考，也可作为读者自学时的辅助读物。

图书在版编目（CIP）数据

概率统计解题方法与技巧/冯卫国．武爱文编．—
上海：上海交通大学出版社，2011
ISBN 978-7-313-07095-1

Ⅰ．①概… Ⅱ．①冯…②武… Ⅲ．①概率论—高等学校—解题②数理统计—高等学校—解题 Ⅳ．①021-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第014241号

概率统计解题方法与技巧
冯卫国　武爱文　编
上海交通大学出版社出版发行
（上海市番禺路951号　邮政编码200030）
电话：64071208　出版人：韩建民
常熟市梅李印刷有限公司　印刷　全国新华书店经销
开本：787mm×960mm 1/16　印张：20.75　字数：389千字
2011年7月第1版　2011年7月第1次印刷
印数：1～4 030
ISBN 978-7-313-07095-1/O　　定价：36.00元

前　言

概率论与数理统计是高等院校工学、医学、农学、经济管理和财经类各专业的一门公共必修课程。它是学生首次接触的以随机现象为研究对象的数学课程，与研究确定性现象的数学课程有较大不同，它有自己的一整套崭新理论和方法。

“概率统计题目难做”，一些初学者常发出这样的感叹。面对习题不是缺乏思路、难以下手，就是道理有点明白，不知如何表达，做完一道题也不敢肯定是否对。这些都反映了初学者不习惯概率统计独有的思维方式。

概率统计的教科书中尽管介绍了很多概念、定义、定理、公式，但是由于篇幅和课时的限制，不可能对所有的问题都面面俱到，往往只能对最重要的内容作详尽的叙述，次要的一带而过。而许多相关知识、应用实例在正文中体现不出来，当然也不可能介绍很多解题方法、技巧以及解题中常会遇到哪些问题。

概率统计的教学现状告诉我们：仅靠一本教材，一星期两三个课时，再加课后少量练习，是很难学好、学深、学扎实的。

编写本书的目的，一是对概率统计教科书进行补充，拟从各个角度给出示范，告诉学生如何思考、分析和表达，使学生一进门就能抓住问题的本质，探求到大千世界各种随机现象的规律；二是通过对典型例题分析，帮助学生正确理解基本理论、基本概念，掌握解题方法和技巧，提高分析问题和解决问题的能力；三是开阔学生眼界，启迪思维，为今后深入学好用好本门课程打下坚实的基础。

编者根据多年来积累的教学经验，并参考国内外有关资料，把概率统计中常用的解题方法与技巧加以归纳总结，撰写成本书。精心挑选的 286 个典型例题几乎涵盖了本科概率统计（非数学专业）教学大纲中的所有知识点，因此本书可作为概率统计的一本题典，平时同步学习，期末考试复习，均可参考。

需要强调的是，翻看本书，绝不能自己不动脑筋，不独立思考，完全照搬照抄，这样就不会“丰收”。因为没有春天的播种就不会有秋天的收获，没有经过大脑思考的东西，永远不会成为自己的知识。

本书分为两部分，第一部分为概率论，第二部分为数理统计，每部分都按照教材内容分章详细讨论。为使读者方便和节省时间，在每章开头均列出本章的基本概念和基本性质，对一些基本公式一般不作证明；然后将每章的习题加以分类，对

各类问题的解题方法分别作详细介绍，并举例说明之。

本书前五章概率论部分由冯卫国执笔，后四章数理统计部分由武爱文执笔，全书由冯卫国统稿。在本书的编写与出版过程中，得到了上海交通大学出版社的大力支持和帮助，在此表示深切感谢。

由于编者水平有限，书中错误与不当之处，很希望听到大家的批评和建议，让我们为不断提高概率统计的教与学的质量而共同努力。

编　者

于上海交通大学

2011 年 5 月

目 录

总论 …… 1

第一部分 概率论

第一章 随机事件及其概率 …… 7
一、基本概念和基本性质 …… 7
二、习题分类、解题方法和示例 …… 9
1. 古典概型 …… 9
2. 几何概型 …… 15
3. 条件概率 …… 18
4. 独立事件的概率 …… 26
5. 伯努利概型 …… 29
6. 概率恒等式和不等式的证明 …… 31

第二章 随机变量及其分布 …… 38
一、基本概念和基本性质 …… 38
二、习题分类、解题方法和示例 …… 39
1. 离散型随机变量的分布律和分布函数 …… 39
2. 连续型随机变量的密度函数和分布函数 …… 47
3. 正态分布的应用 …… 56
4. 随机变量的函数的分布 …… 57
5. 既不离散也不连续的随机变量 …… 63
6. 证明题 …… 66

第三章 多维随机变量及其分布 …… 70
一、基本概念和基本性质 …… 70
1. 二维随机变量——(X,Y)的联合分布函数 …… 70
2. 边际分布函数 …… 71
二、习题分类、解题方法和示例 …… 71

1. 联合分布函数的确定 …… 72
2. 离散型随机变量的联合分布和边际分布 …… 72
3. 连续型随机变量的联合分布和边际分布 …… 76
4. 条件概率分布 …… 82
5. 随机变量的独立性 …… 89
6. 多维随机变量的函数分布 …… 96
7. 证明题 …… 109

第四章　随机变量的数字特征 …… 120
一、基本概念和基本性质 …… 120
1. 随机变量的数学期望 …… 120
2. 随机变量的方差 …… 121
3. 多维随机向量的数字特征 …… 122
二、习题分类、解题方法和示例 …… 122
1. 数学期望的计算与应用 …… 123
2. 方差的计算与应用 …… 137
3. 协方差和相关系数的计算 …… 145
4. 证明题 …… 150

第五章　大数定律与中心极限定理 …… 163
一、基本概念和基本性质 …… 163
1. 切比雪夫不等式 …… 163
2. 大数定律 …… 163
3. 中心极限定理 …… 164
二、习题分类、解题方法和示例 …… 164
1. 切比雪夫不等式的应用 …… 164
2. 大数定律的应用 …… 169
3. 中心极限定理的应用 …… 172

第二部分　数理统计

第六章　样本及其抽样分布 …… 179
一、基本概念和基本性质 …… 179
1. 总体 …… 179

2. 个体 …… 179
3. 样本 …… 179
4. 简单随机样本 …… 179
5. 统计量 …… 180
6. 抽样分布 …… 180
二、习题分类、解题方法和示例 …… 184
1. 样本与统计量 …… 184
2. 样本均值的分布 …… 186
3. χ^2 分布 …… 188
4. t 分布 …… 196
5. F 分布 …… 199
6. 其他常用抽样分布 …… 203

第七章　参数估计 …… 208
一、基本概念和基本性质 …… 208
1. 矩估计法 …… 208
2. 最大似然估计法 …… 209
3. 参数估计的评价标准 …… 210
4. 区间估计 …… 212
二、习题分类、解题方法和示例 …… 216
1. 矩估计法 …… 216
2. 最大似然估计法 …… 218
3. 无偏性 …… 228
4. 有效性 …… 233
5. 一致性 …… 240
6. 单个正态总体均值 μ 和方差 σ^2 的区间估计 …… 244
7. 两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 和方差比$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$的区间估计 …… 250
8. 单侧置信区间 …… 253
9. 非正态总体中未知参数的区间估计 …… 254

第八章　假设检验 …… 262
一、基本概念和基本性质 …… 262
1. 实际推断原理 …… 262

2. 假设检验问题 …… 262
3. 原假设 …… 262
4. 备择假设 …… 262
5. 第一类错误 …… 262
6. 第二类错误 …… 263

二、习题分类、解题方法和示例 …… 263
1. 单个正态总体参数的假设检验 …… 263
2. 两个正态总体参数的假设检验 …… 274
3. 非参数的假设检验 …… 288

第九章 方差分析和回归分析 …… 299
一、基本概念和基本性质 …… 299
1. 单因素试验方差分析 …… 299
2. 两因素无重复试验的方差分析 …… 301
3. 两因素等重复试验的方差分析 …… 303
二、一元线性回归分析 …… 305
三、习题分类、解题方法和示例 …… 308
1. 单因素试验方差分析 …… 308
2. 两因素无重复试验的方差分析 …… 312
3. 两因素等重复试验的方差分析 …… 314
4. 一元线性回归分析 …… 316

主要参考文献 …… 322

总　　论

一、解题的目的

有学者说:未来的文盲不再是不识字的人,而是没有学会怎样学习的人.

学习能力的培养,解题无疑是重要手段之一.

著名数学家华罗庚曾经说过:“学习数学如果不做习题,就等于入宝山而空返.”

在概率论与数理统计教学过程中,解题是一个很重要的环节.

首先要端正做题目的.有的学生误认为学数学就是做数学题,故而对课程内容不加复习,对基本概念、基本性质不图理解,一头扎在题目堆里,乱套公式拼凑答案.做习题主要是检查自己对基本概念、基本性质掌握的情况,也可以启发自己将已学的理论用于分析和解决实际问题.所以做习题完全是为理解和掌握课程内容服务的,更是为今后能将理论应用于实践而服务的.

解题的过程,也就是应用所掌握的知识进行分析、判断和逻辑思维的过程.解题须根据题中所给的条件,经过分析找出正确的解题线索.

解题的过程还能培养正确的思维习惯和良好的工作习惯.所谓思维习惯,就是指独立思考、善于估计、周到全面、有条有理、步步有据等;所谓工作习惯,就是认真、细心、负责、顽强等.

概率统计研究的是现实世界中各种随机现象的一般规律,由于有很多不确定因素,使概率统计中的许多问题显得比较复杂,难以解决.为此编者根据长期教学经验把概率统计中常用的思维方法、解题方法和技巧加以归纳总结,并针对不同的内容分章讨论,希冀能帮助读者学好概率统计这门学问.

二、解题的要求和建议

为帮助读者顺利地求解概率统计习题,以下提出一些要求和建议,供参考.

1. 认真复习

做题前必须认真复习教学内容，钻研和理解其基本概念. 必须纠正先做题后看书的颠倒顺序以及死记硬背、乱套公式的错误做法. 只有在认真复习的基础上做题，才能取得“事半功倍”的学习效果.

2. 仔细审题

做题时一定要逐字逐句仔细审题，真正理解题意；简要列出题目中的已知条件、隐含条件和待求结果；必要时可画示意图，有助于梳理解题思路，或画出几何图形，使数形结合，便于理解.

3. 寻找规律

抓住问题的本质，找出解题的正确途径和适合解同类型题的一般规律. 注意弄清所用公式或定理的适用范围和成立条件. 有时一道题往往可用不同的方法求解，解题后则要加以比较其简繁，以分清方法的优劣.

4. 列式求解

一般根据题意列出方程式或解析式，有时可采用作图或画表的方式帮助列出解析式，有时还须文学叙述与解析推导结合进行，有时则先列出文字式，再转化成解析式.

5. 检验讨论

对结果要检验讨论. 这里的检验并不是从头至尾再演算一遍，而是粗略地估计答案的准确程度；通过对结果的讨论可以加深对问题的理解，起到举一反三的效果，有时还需要讨论结果的合理性、结果还能否拓展等问题. 对解法也要讨论，看看能否改进，是否还有别的更好的解法.

要做适当数量的习题，并不是说做得越多越好，而是重在分析，务求透彻，讲究质量，提炼出解题规律和技巧，启迪思维，打开思路，触类旁通，这是培养和提高解题能力的关键.

要掌握正确解题方法，针对不同的问题，采用不同的解题方法，包括思维方法. 不得其法，则事倍功半.

以上建议也是解题的一般顺序. 只有坚持高标准、严要求，认真做好每一道题，才能提高数学素养，培养出严谨的科学作风.

三、学习方法探讨

对历届工科学生考研数学成绩进行分析，会发现高等数学与概率统计有如下差异：

(1) 概率统计平均得分率低于高等数学平均得分率.

(2) 高等数学成绩分布呈现两头小、中间大，概率统计成绩分布呈现两头大、中间小.

概率统计是借助微积分理论发展起来的一门随机数学学科，高等数学没学好，概率统计也不会学好，所以后者得分率低于前者.

概率统计有自己一套独特的概念、理论，考虑问题常用"不确定性"思维方法，如果套用"确定性"思维方法就会出错. 基本概念没搞懂，即使遇到简单的题目也犯惑，从而出现低分多的现象；除了古典概型、二维随机变量函数的分布及证明题外，概率统计中的难点不是很多，如果概念清楚，解题往往很顺利，这正是高分较多的原因.

上面的分析启示我们，不能把高等数学的学习方法照搬到概率统计的学习上来，必须根据概率统计自身特点提出学习方法，才能取得事半功倍的效果.

下面对概率统计的学习提出一些值得注意的地方.

1. 学习概率论需注意的要点

(1) 把对基本概念的理解放在首位. 概念不理解，懵懵懂懂做题目是毫无意义的.

比如有人问"孔夫子出生于公元前某年某月某日的概率是多少?"某个人若回答出概率是多少，则会被笑掉牙的. 此人一定不理解什么是随机试验，什么是随机事件. 随机试验必须满足 3 个条件，其中一个条件是：在相同条件下试验可以重复进行. 孔夫子妈妈生孔夫子，显然不能重复进行，所以"孔夫子出生于公元前某年某月某日"不是随机事件，从而无概率可求！

又比如根据公式，参数 μ 的置信度为 95% 的置信区间为 $\left(\overline{X}-z_{0.25}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{0.25}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$，$\sigma$ 已知. 将样本数据代入，得置信区间(2.85，3.19)，这是否意味着参数 μ 落在区间(2.85，3.19)的概率为 0.95？即是否有 $P(2.85<\mu<3.19)=0.95$？若回答"是"的话，这就属于概念不清. 事实上，参数 μ 是客观真值，它不是随机变量，2.85 与 3.19 都是定数，所以事件$\{2.85<\mu<3.19\}$非随机，故不可能有概率 0.95. 换言之，μ 要么落在区间(2.85，3.19)内，要么不落在区间(2.85，3.19)内.

(2) 在学习中，对概念的引入，要问些为什么，这样可以加深对概念的理解. 比

如为什么要引入随机变量？不引入行不行？原先随机事件是定性描述的，即以文字叙述. 例如事件 $A=\{$抽查一件产品发现是次品$\}$，引入随机变量 X 后，$A=(X=1)$（规定发现次品 X 取 1，发现正品 X 取零），即能定量描述随机事件了，进而能将事件的概率定义为分布函数 $P(X\leqslant x)=F(x)$，于是

$$P(A)=P(X=1)=P(X\leqslant 1)-P(X<1)=F(1)-F(1-0),$$

概率的计算变成了函数值 $F(1)$ 和极限 $F(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)$ 的计算. 若随机变量 X 是连续的，则它落在区间 (a,b) 内的概率

$$P(a<X<b)=\int_a^b \mathrm{d}F(x)=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

从而经典的微积分有了用武之地. 可以想象，若不引入随机变量，概率永远停留在概率上，不可能发展成概率论这门学科.

(3) 学习中，既要注意概念的引入和背景，也要注意概念的内涵和相互间的联系及异同. 比如随机事件的相互独立和互不相容是两个容易混淆的概念，前者是事件的概率性质，后者是事件的运算性质，两者之间有一定联系. 若概率非零的两事件 A,B 相互独立，则 A,B 一定相容. 类似地，两个随机变量 X,Y 的相互独立和不相关也是两个容易混淆的概念，前者表示 X（或 Y）取值的概率如何，毫不受 Y（或 X）的影响，后者表示 X,Y 之间没有线性相关的关系，两者之间有一定联系. 若 X,Y 相互独立，则 X,Y 一定不相关，反之不真.

(4) 弄清概率计算的难点，一维情形相对较容易，主要难在二维情形，即概率第三章的内容.

① 概率分布的计算

虽然公式都给出了，具体计算却常会出错. 比如已知 $(X,Y)\sim f(x,y)$（$f(x,y)$ 为分段函数，要求 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$，或者求 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 此时用的公式是

$$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$F_Z(z)=P(g(X,Y)\leqslant z)=\iint\limits_{G:g(x,y)\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 $f(x,y)$ 是分段函数，所以 $F(x,y)$ 和 $F_Z(z)$ 一般也是分段函数，计算时先后会遇到两个难点：

一是分段点如何确定. 对于 $F(x,y)$ 来说，就是二维平面分成几块；对于 $F_Z(z)$ 来说，就是轴上插入几个分界点，而这些都不是一眼能看出的.

二是重积分如何化为累次积分，即积分限如何确定. 在每一个分段区间内，积分限自然是不同的，有一个积分限定错，计算结果就不会对.

② 含极大、极小、绝对值的期望、方差以及概率分布的计算

比如已知$(X,Y)\sim f(x,y)$，计算$E[\min(X,Y)]$，$E[\max(|X|,|Y|)]$，$D(|X-Y|)$以及已知$X\sim F(x)$，求$Y=\max(X,2008)$和$Y=X+|X|$的概率分布等.

(5) 每一章学完后要善于小结归纳，一是内容的小结归纳，二是方法的小结归纳. 不要搞题海战术，为做题而做题. 要把精力放在理解不同题型涉及的概念及解题的思路上，真正实现“事半功倍”.

2. 学习数理统计需注意的要点

(1) 数理统计是一门实用性很强的学科. 故首先要了解数理统计能解决哪些实际问题，解决的过程是怎样的，这样学起来就不会觉得抽象枯燥.

(2) 学好统计方法，除了要掌握与问题有关的专业知识外，还必须对统计概念有直观的理解以及对统计方法的理论基础的认识，这样才能学得扎实、记得牢靠.

(3) 通过求解各种类型的统计习题，既可进一步理解数理统计的基本概念、基本方法，又可训练自己的统计思维. 数理统计的核心内容是统计推断，而统计推断通常建立在抽样分布的基础上，因此了解和掌握常用概率分布的性质和关系是非常重要的.

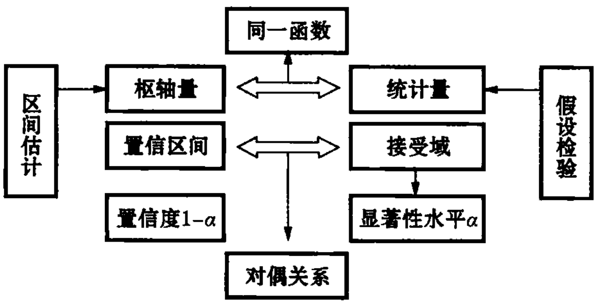
(4) 数理统计的方法是归纳式的，并不是传统意义上的归纳法.

数理统计的基本方法是：先收集相关资料，然后对收集到的资料进行“加工处理”，最后经过“归纳”作出相应结论；而不是从一些假设命题、公理和已知事实出发，按一定的逻辑推理得到的.

例如我们发现，吸烟者和不吸烟者的肺癌发病率有差异. 为证实这一想法，首先应收集相关资料，也就是取得数据，经过整理归纳，来证实这一想法是否正确，这就是归纳式的方法.

(5) 初学者往往抱怨数理统计中公式太多，尤其是参数的置信区间和假设检验的表格有好几页，背起来太费劲. 事实上，只要善于总结概括，要硬记的公式并不多.

比如参数的置信区间和假设检验恰好形成一种对偶关系：



记住了参数估计要用的枢轴量，相当于记住了假设检验要用的统计量；记住了参数的置信区间，相当于记住了假设检验的拒绝域（接受域的对立区域），这样需记的公式就减少二分之一，达到“事半功倍”的效果. 进一步，如果能够理解和掌握求置信区间的一般步骤和方法，那么所有的公式都可以推导出来而不需要死背.

第一部分　概率论

第一章　随机事件及其概率

一、基本概念和基本性质

基本事件——随机试验中的每一个结果，亦称样本点，用 ω 表示.

样本空间——随机试验中全部结果的集合，即样本点全体，用 Ω 表示.

随机事件——若干基本事件的组合或样本空间的子集，用 A,B,C 等表示.

随机事件运算顺序：逆、交、并、差，括号优先.

特殊运算公式：$A-B=A-AB=A\overline{B}$（差化积）.

反演律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

随机事件的概率采用概率的公理化定义，由此得概率的如下性质：

(1) 不可能事件概率为零　$P(\varnothing)=0$.

(2) 对立事件概率公式　$P(A)=1-P(\overline{A})$.

(3) 有条件减法公式　$P(B-A)=P(B)-P(A)$，其中 $A\subset B$.

(4) 有条件加法公式　$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$，其中

$$A_iA_j=\varnothing;i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n.$$

(5) 广义加法公式　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

推广　$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

以下为概率不等式：

(1) $\max\{P(A),P(B)\}\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

(2) $P(AB)\leqslant\min\{P(A),P(B)\}$.

(3) $P(A-B)\leqslant P(A)$.

事件独立

若对任意 $1\leqslant i_1<i_2\leqslant n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2})=P(A_{i_1})P(A_{i_2}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

若对任意 $k(1<k\leqslant n)$,任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 相互独立.

可见 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,必须有 2^n-n-1 个等式全成立.显然,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立$\Rightarrow A_1,A_2,\cdots A_n$ 两两独立,其逆不真.

古典概型(特点:有限、等概)

随机试验有 n 个等可能的结果,事件 A 恰包含其中 k 个结果,则事件 A 的概率称为古典概率,定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}.$$

几何概型(特点:无限、等概)

事件 A 为样本点落在有限区域Ω 内任何区域G 中,且事件 A 的概率与区域G 的测度成正比,则称此概率为几何概率,定义为

$$P(A)=\frac{G\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}.$$

若 Ω 分别为一维、二维和三维空间的区域,则相应的 Ω 的测度分别是长度、面积和体积.

伯努利(Bernoulli)概型

做 n 次随机试验,每次试验的结果为 A 或 $\overline{A}$ 且 $P(A)=p$,各次试验的结果相互独立,则称此概型为伯努利概型.伯努利概型中,n 次试验中事件 A 恰发生 k 次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

条件概率

在事件 B 已经发生的情况下,事件 A 的概率称为条件概率,记成 $P(A|B)$.

条件概率公式为 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$,其中 $P(B)>0$.

乘法公式为 $P(AB)=P(A)P(B|A)$,其中 $P(A)>0$.

推广 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots$