21世纪高职高专数学系列教材

线性代数

李学银 柳翠华 马晓明 主编

XIAN XING DAI SHU

华中科技大学出版社

21 世纪高职高专数学系列教材

线性代数

主编　李学银　柳翠华　马晓明
主审　安志鹏　朱永银

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李学银　柳翠华　马晓明　主编
武汉:华中科技大学出版社，　2002 年 9 月
ISBN 7-5609-2783-1

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①李…　②柳…　③马
Ⅲ. 线性代数-高等学校:技术学校-教材
Ⅳ. 0151.2

21 世纪高职高专数学系列教材
线性代数　　李学银　柳翠华　马晓明　主编

策划编辑:徐正达　　封面设计:刘　卉
责任编辑:万亚军
责任校对:刘　飞　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　　排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印　　刷:荆州今印印务有限责任公司

开本:850×1168　1/32　印张: 4.75　字数:107 000
版次:2002 年 9 月第 1 版　印次:2002 年 9 月第 1 次印刷　印数:1—5 000
ISBN 7-5609-2783-1/O·265　定价:6.80 元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是“21 世纪高职高专数学系列教材”之一，共有五章，内容包括行列式、矩阵及其运算、向量组、线性方程组、相似矩阵与二次型．每章后附有习题，书末附有答案．

本书可供高职高专各专业(包括理工类、文科类、经济类各专业)使用，也可供高等师范专科学校非数学专业使用．

21 世纪高职高专数学系列教材
编审委员会

序

在“21 世纪高职高专数学系列教材”即将出版之际，我谈几点意见，作为这套系列教材的序.

高等职业教育的出现是我国高等教育改革发展中的大事. 高职应该办好，办出特色，真正培养出高素质的综合型、应用型人才. 近来报纸上有很多讨论有关问题的文章，其中提到在发达国家高级技工的比例占到 40%，而我国只有百分之几. 这一现象已经严重地影响了国民经济的发展. 高职院校虽然不是培养高级技工的场所，但它培养的各类技术人才，将会弥补这个不足，使“高学历”人才与“应用型”人才的比例趋向合理. 目前有一种追求“高学历”教育的倾向，用一句话来概括，就是中国的高等教育重心偏高. 有一种流传很广的成见，认为“高学历等于高质量”，实践证明这是不对的. 过分强调高学历，反而会造成有限教育资源的极大浪费.

近年来，人们又开始讨论所谓高等教育大众化的问题. 高等教育由以前的“精英教育”向“大众化教育”转变，这是高等教育发展的必然结果. 这样一来，不免使人怀疑，便有了这是不是以数量换质量的说法. 由于进入高等学校的学生越来越多，录取分数线一定会下降，这也会引起人们的疑惑：入学分数较低的学生的质量是不是一定就差？这种误解与“高学历等于高质量”的性质是相同的. 教育的功能在于，能用有限的资源把更多的学生提高到

更高的水平.因此,我提出这样一个问题:怎样根据高职教育的性质与实际可能将高等职业教育搞得更好、更有特色?怎样利用我们的有限的资源,培养出更多的合格人才?做到了这一点就是高质量的教育.正是从这点出发,我在多种场合中提到了“必需、够用”和“易教易学”两个标准.对于这一点,如果说在微积分基础方面比较容易做到的话,那么要在以后较高层次的专业数学方面做到就难多了.如果前面基础课的内容讲得很少,似乎皆大欢喜,但到后来学习专业数学,知识就不够用了.反之,对前面的基础课程提出了不合理的过高的要求,学生们接受不了,也就谈不上再学习后续内容了.所以,还是重申那两句话:“必需、够用”与“易教易学”.我知道,这是很不容易达到的标准.如果说我这些年来从事教学工作还有一些体会的话,那就是办教育不能说空话.许多事,说起来容易,但做起来就难了,只有经过多年的实践才知道其艰辛.正因如此,我愿对这套系列教材的作者们孜孜不倦的努力,对他们编出“精品”教材、为培养 21 世纪的高素质人才做贡献的精神,表示我的敬意.也希望他们继续努力,做得更好.

齐民友

2002 年 5 月 5 日

于武汉大学

前　言

数学是研究数量关系与空间形式的科学，是科学技术人才科技素质的重要组成部分．随着计算机技术等高科技的普及和发展，数学的重要性日益显现．为了提高学生的科技素质，结合高职高专学生的特点，针对高职高专教育的目标——培养高层次、复合型、实用型人才，湖北省高职高专数学研究会与华中科技大学出版社联合组织出版了这套“21世纪高职高专数学系列教材”，第一批推出的有《高等数学(第一册)》、《高等数学(第二册)》、《线性代数》、《积分变换》、《高等数学学习指导(第一册)》、《高等数学学习指导(第二册)》等六本．本系列教材保持传统体系，简略理论推导，强调实际应用，渗透建模思想，突出思路分析，强化综合训练；在叙述中注重文字简练，概念准确，由浅入深，引人入胜；力求使学生掌握所学知识，提高应用数学知识的能力，为将来的激烈竞争插上“坚强的翅膀”．

本书包括行列式、矩阵及其运算、向量组、线性方程组、相似矩阵与二次型等内容，每章后附有习题，书后附有答案．

本书由李学银、柳翠华、马晓明担任主编，安志鹏、朱永银担任主审，李乐成、刘古胜、邓光明任副主编，参加编写的还有熊桂芳、谢涛、罗银舫、宋礼民、石德贤、熊帮禄、吴劲松、徐卫卫、罗炜、贾贞．全书由李学银、朱永银统稿．

武汉大学前校长、全国著名数学家齐民友教授欣然作序，为本系列教材增色不少；武汉大学费浦生教授审阅了本系列教材的部分内容，提出了许多宝贵意见. 本系列教材还参考吸收了有关教材及著作的成果，在此一并致谢.

荆门职业技术学院、武汉职业技术学院、三峡大学职业技术学院(葛洲坝)、长江职工大学、长江职业学院、武汉电力职业技术学院、湖北经济管理干部学院、沙洋师范高等专科学校、湖北商业高等专科学校、汉口职业技术学院、三峡大学职业技术学院(宜昌)、武汉警官职业技术学院、武汉工交职业技术学院、湖北函授大学为本系列教材的出版发行给予了积极的支持，在此表示由衷的感谢.

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者提出批评建议，以便再版时修订，使本书日臻完善.

编　者

2002 年 5 月

目　录

第一章 行 列 式

初等数学中讨论过二阶、三阶行列式，并且利用它们来解过二元、三元线性方程组. 为了研究 n 元线性方程组，需要把行列式推广到 n 阶，即讨论 n 阶行列式的问题. 为此，本章先介绍一些预备知识，然后引出 n 阶行列式的定义并讨论它的性质.

第一节 全排列及其逆序数

一、全排列

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为这 n 个数的一个**全排列**（也称为 **n 级排列**）.

例如，132 是一个 3 级排列，2431 是一个 4 级排列，54321 是一个 5 级排列.

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个. 例如，3 级排列有 $3!=6$ 个，它们是 123，132，213，231，312，321.

二、逆序数

值得注意的是，在上面的 6 个 3 级排列中，除了 123 中的数码是按由小到大的自然顺序排列以外，在其余的排列中，都有较大的数码排在较小的数码前面. 例如，在排列 213 中，2 比 1 大，但 2 排在了 1 的前面，这时就说 2 和 1 构成了一个逆序.

一般地，有如下定义：

定义 2 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**.

例如在 2431 中,21,43,41,31 是逆序,2431 的逆序数就是 4,而 45321 的逆序数是 9.

排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

定义 3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**,逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如,2431 是偶排列;45321 是奇排列;$12\cdots n$ 的逆序数是零,因此是偶排列.

下面讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性,不妨设排列元素为自然数 1 至 n,并规定由小到大为标准次序.设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i.全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

即是这个排列的逆序数.

例 1 求排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中,

3 排在首位,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有一个(3),故逆序数为 1;

5 是最大数,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有三个(3、2、5),故逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有一个(5),故逆序数为 1;

于是排列的逆序数为

$$t=0+1+0+3+1=5.$$

第二节 n 阶行列式的定义

一、二阶与三阶行列式

行列式起源于解线性方程组.首先看二元线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.
\end{cases} \tag{1}
$$

用消元法解此方程组.首先用 a_{22} 乘方程组(1)中的第一式,得

$$a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22},$$

再用 a_{12} 乘方程组(1)中的第二式,得

$$a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12},$$

然后将所得的前式减去后式,消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

同理,也可以消去 x_1,得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

因此,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,若方程组(1)有解,其解可写成

$$
\begin{cases}
x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\[2ex]
x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.
\end{cases} \tag{2}
$$

经具体验算,式(2)中的 x_1,x_2 满足方程组(1),确实是它的解,因此,式(2)提供了方程组(1)的解的一般公式.但它难于记忆,应用时也不方便,因而有必要引进一个新的符号来表示它.这样就产生了行列式.

在解的表达式(2)中,分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,并且只含有未知量的系数,把未知量的系数按照它们在方程组中原来的位置排列成正方形,即

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{matrix}
$$

可以看出 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是这样两项的和:一项是正方形中实线表示的对角线(叫做行列式的**主对角线**)上两元素的积,再添上正号;另一项是虚线表示的对角线(叫做行列式的**副对角线**)上两元素的积,再添上负号.在这四个数的两旁各加一条竖线,引进符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

并且规定它就表示

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{4}$$

式(3)叫做**二阶行列式**,式(4)叫做**二阶行列式的展开式**,a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}叫做行列式(3)的**元素**. 这四个元素排成两行两列(横排叫行,竖排叫列). 例如,a_{21}是位于第 2 行第 1 列上的元素. 利用对角线把二阶行列式(3)展开成式(4),这种方法叫做二阶行列式展开的**对角线法则**.

解的表达式(2)中的两个分子也可分别写成二阶行列式 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,这样当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,线性方程组(1)的解可以写成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases} \tag{5}$$

为简便起见,通常用 D,D_1,D_2 分别表示式(5)中作为分母和分子的行列式,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

行列式 D 是由方程组(1)中未知量 x_1,x_2 的系数组成的,叫做这个方程组的**系数行列式**. D 中第 1 列的元素 a_{11},a_{21}(即 x_1 的系数)分别换成方程组(1)的常数项 b_1,b_2,就得到行列式 D_1;D 中第 2 列的元素 a_{12},a_{22}(即 x_2 的系数)分别换成常数项 b_1,b_2,就得到行列式 D_2.

综上所述，利用行列式这一工具可以得到以下结论：

当线性方程组(1)的系数行列式 D 不等于零时，它的惟一解的公式是

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \end{cases}$$

其中 D_1,D_2 是把系数行列式中第 1，第 2 列分别换成方程组(1)的常数项列而得出的两个二阶行列式.

再看三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{6}$$

为了解此方程组，可依照前面的方法，先从方程组(6)中的第一、第二两式消去 x_3，第二、第三两式消去 x_3，再从所得的两个方程消去 x_2，就得到

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1 \\ =b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.\end{aligned} \tag{7}$$

注意式(7)中 x_1 的系数，这是一个代数和，它是由方程组(6)的未知量系数按这样的规律构成的：

把未知量的系数按照它们在方程组中原来的位置排列成三行三列的正方形，即

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

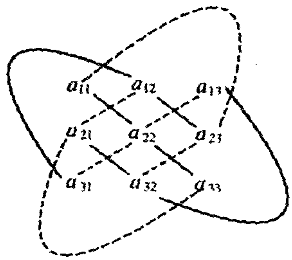

图 1-1