DAISHU

初级中学课本

代数

第三册

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

人民教育出版社

说　明

一、这套《初级中学课本代数》第一至四册，是在中小学通用教材数学编写组编的《全日制十年制学校初中课本(试用本)数学》第一至六册中的代数部分的基础上，吸收了几年来各地在试用中的一些意见编写而成的.

二、本册书内容包括：数的开方、二次根式、一元二次方程和指数，供初中二年级全学年使用，每周3课时.

三、本册书的习题共分三类：练习、习题、复习参考题.

1. 练习　供课内练习使用.

2. 习题　供课内课外作业选用.

3. 复习参考题　供每章复习选用.

四、本册书由人民教育出版社数学室编写. 参加编写工作的有袁明德、李琳、贾云山、蔡上鹤、陶振宗等. 全书由张孝达、吕学礼校订.

目　录

第九章　数的开方

9.1　平方根

如果已经知道一个正方形的边长，我们可以通过平方运算求出正方形的面积．反过来，如果已知正方形的面积，这个正方形的边长应该怎样计算？

例如，我们要做一个面积是 9 平方尺的方桌面，就要先求出这个方桌面的边长是多少尺，也就是要求出一个平方后等于 9 的数．因为 $3^2=9$，$(-3)^2=9$，而实际上桌面的边长不能是负数，所以，这个方桌面的边长是 3 尺．

一般地，如果一个数的平方等于 a，这个数就叫做 a 的**平方根**（也叫做**二次方根**）．换句话说，如果 $x^2=a$，那么，x 就叫做 a 的平方根．例如，因为 $3^2=9$，$(-3)^2=9$，所以 3 与 -3 都是 9 的平方根．又如，因为 $7^2=49$，$(-7)^2=49$，所以 7 与 -7 都是 49 的平方根．类似地，因为 $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$，$\left(-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$，所以 $\frac{2}{5}$ 与 $-\frac{2}{5}$ 都是 $\frac{4}{25}$ 的平方根．

根据平方运算可以知道，不为零的两个数互为相反数时，它们的平方是同一个正数．一般地，**一个正数**

有两个平方根，这两个平方根互为相反数.

因为 $0^2=0$，所以零的平方根是零.

任何正数、负数的平方都是正数，零的平方是零，也就是正数、负数和零的平方都不是负数，因此**负数没有平方根**. 例如，-4 没有平方根.

求一个数 a 的平方根的运算，叫做**开平方**.

开平方与平方互为逆运算，因此，我们可以运用平方运算求一个数的平方根，也可以用平方运算检验一个数是不是另一个数的平方根. 例如，

$\because\quad 3^2=9,\ (-3)^2=9,$

$\therefore\quad$ 9 的两个平方根是 3 和 -3.

一个正数 a 的正的平方根，用符号“$\sqrt[2]{a}$”表示；负的平方根，用符号“$-\sqrt[2]{a}$”表示. 这两个平方根合起来可以记做“$\pm\sqrt[2]{a}$”. 这里符号“$\sqrt[2]{\ }$”读作“二次根号”，a 叫做**被开方数**，2 叫做**根指数**. 根指数是 2 时，通常省略不写，如 $\pm\sqrt[2]{a}$ 写做 $\pm\sqrt{a}$，读作“正、负根号 a”. $\pm\sqrt{0}$ 就是 0.

注意 因为负数没有平方根，所以 $\sqrt{a}$ 中的被开方数要大于或等于零，即 $a\geqslant 0$.

例 1 求下列各数的平方根：

$$(1)\ 36;\quad (2)\ \frac{16}{25};\quad (3)\ 2\frac{1}{4};\quad (4)\ 0.49.$$

解： (1) $\because\quad (\pm 6)^2=36,$

$\therefore$ 36的平方根是± 6，即

$$\pm\sqrt{36}=\pm 6;$$

(2) $\because$ $\left(\pm\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$,

$\therefore$ $\frac{16}{25}$的平方根是$\pm\frac{4}{5}$，即

$$\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5};$$

(3) $\because$ $2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$, $\left(\pm\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$,

$\therefore$ $2\frac{1}{4}$的平方根是$\pm\frac{3}{2}$，即

$$\pm\sqrt{2\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2};$$

(4) $\because$ $(\pm 0.7)^2=0.49$,

$\therefore$ 0.49的平方根是± 0.7，即

$$\pm\sqrt{0.49}=\pm 0.7.$$

例2 判断下列各数有没有平方根：

(1) 64; (2) -64; (3) 0; (4) $(-4)^2$.

解： (1) 因为$64>0$，所以64有平方根；

(2) 因为$-64<0$，所以-64没有平方根；

(3) 0有平方根；

(4) 因为$(-4)^2=16>0$，所以$(-4)^2$有平方根.

练　习

1. (口答)

(1) 什么数的平方等于81?

(2) 什么数的平方等于$\frac{4}{9}$?

(3) 什么数的平方等于0.25?

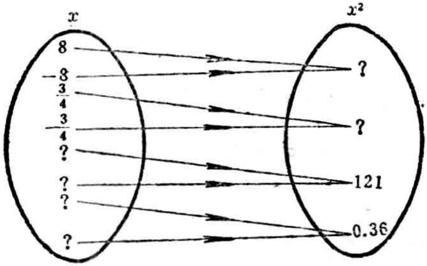
2. 求下列各数的平方根:

$$1,\ 64,\ 1600,\ 0,\ 0.0081,\ \frac{49}{100},\ 2.25,\ \frac{25}{144}.$$

3. 求下列各数的平方根:

$$729,\ 324,\ 0.81,\ 0.0225,\ \frac{16}{49},\ \frac{25}{64}.$$

4. 如图,求左圈和右圈中的"?":



(第4题)

9.2 算术平方根

我们已经知道,一个正数有两个平方根,其中一个是正数,一个是负数,并且这两个平方根互为相反数.因此,求一个正数的平方根,只要求出它的正的平方

根，就可以知道它的负的平方根。

正数 a 的正的平方根，也叫做 a 的**算术平方根**，记作 $\sqrt{a}$，读作"根号 a"。例如 9 的算术平方根是 3，可以写成 $\sqrt{9}=3$。又如 $\sqrt{16}=4$，$\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$ 等。

零的平方根也叫做零的算术平方根，**因此零的算术平方根仍旧是零**，即 $\sqrt{0}=0$。

例 1 求下列各数的算术平方根：

(1) 100； (2) $\frac{49}{64}$； (3) 0.81。

解：(1) $\because \quad 10^2=100$，

$\therefore \quad$ 100 的算术平方根是 10，即

$$\sqrt{100}=10;$$

(2) $\because \quad \left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$，

$\therefore \quad \frac{49}{64}$的算术平方根是$\frac{7}{8}$，即

$$\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8};$$

(3) $\because \quad 0.9^2=0.81$，

$\therefore \quad$ 0.81 的算术平方根是 0.9，即

$$\sqrt{0.81}=0.9.$$

例 2 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{10000}$； (2) $-\sqrt{144}$；

(3) $\sqrt{\frac{25}{121}}$;　　(4) $-\sqrt{0.0001}$;

(5) $\pm\sqrt{625}$;　　(6) $\pm\sqrt{\frac{49}{81}}$.

解：(1) $\because\ 100^2=10000$,

$\therefore\ \sqrt{10000}=100$;

(2) $\because\ 12^2=144$,

$\therefore\ -\sqrt{144}=-12$;

(3) $\because\ \left(\frac{5}{11}\right)^2=\frac{25}{121}$,

$\therefore\ \sqrt{\frac{25}{121}}=\frac{5}{11}$;

(4) $\because\ (0.01)^2=0.0001$,

$\therefore\ -\sqrt{0.0001}=-0.01$;

(5) $\because\ 25^2=625$,

$\therefore\ \pm\sqrt{625}=\pm 25$;

(6) $\because\ \left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$,

$\therefore\ \pm\sqrt{\frac{49}{81}}=\pm\frac{7}{9}$.

练　习

1. 判断下列各语句对不对：

(1) 5是25的算术平方根；

(2) -6是36的算术平方根；

(3) 6 是$(-6)^2$的算术平方根；

(4) 0.4 是 0.16 的算术平方根。

2. 求下列各数的算术平方根：

$121,\ 0.25,\ 400,\ 0.01,\ \frac{1}{256},\ \frac{144}{169},\ 0.$

3. (1) 在公式 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 中，已知 $a=6, b=8$，求c；

(2) 在公式 $a=\sqrt{c^2-b^2}$ 中，已知 $c=41, b=40$，求 a。

4. 求下列各式的值：

$\sqrt{1},\ -\sqrt{\frac{4}{9}},\ \sqrt{1.21},\ -\sqrt{0.0196},$

$\pm\sqrt{\frac{9}{25}},\ \pm\sqrt{\frac{36}{169}}.$

9.3 平方根表

前面我们根据平方运算观察出了一些特殊的整数、小数和分数的平方根. 但是，对于一般的数，如1840，$\frac{7}{11}$, 0.529 等就不容易观察出它们的平方根. 下面，我们介绍用查平方根表来求一个正数的平方根的方法.

《中学数学用表》中的表三就是平方根表.

利用平方根表，我们可以直接查出 1.00 到 99.9 之间各个只具有三个数位的数的算术平方根，查得的结果一般是近似值.

表 9-1，表 9-2 分别给出了平方根表的一部分.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068	1.072	1.077	1.082	1.086	1.091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114	1.118	1.122	1.127	1.131	1.136	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158	1.162	1.166	1.170	1.175	1.179	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221	0	1	1	2	2	2	3	3	4

表 9-1

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.	3.162	3.178	3.194	3.209	3.225	3.240	3.256	3.271	3.286	3.302	1	3	5	6	8	9	11	12	14
11.	3.317	3.332	3.347	3.362	3.376	3.391	3.406	3.421	3.435	3.450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12.	3.464	3.479	3.493	3.507	3.521	3.536	3.550	3.564	3.578	3.592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13.	3.606	3.619	3.633	3.647	3.661	3.674	3.638	3.701	3.715	3.728	1	3	4	5	7	8	10	11	12
14.	3.742	3.755	3.768	3.782	3.795	3.808	3.821	3.834	3.847	3.860	1	3	4	5	7	8	9	11	12

表 9-2

表中字母"N"所在的直列中的数是被开方数的前两位数，"N"所在的横行中的数是被开方数的第三位数，表中间的四位数是所求的算术平方根，它的第四位数一般是四舍五入得到的．表右边的部分是修正值．

例 1　查表求$\sqrt{1.35}$．

从表 9-1 字母"N"所在的一直列中，先找出被开方数的前两位数 1.3，然后从"N"所在的横行里找到被开方数的第三位数 5，行与列交叉处的数 1.162，就是 1.35 的算术平方根．

解： $\sqrt{1.35}=1.162$．

注　表中查得的结果，虽然大都是近似值，一般仍用等号．

例2 查表求$\sqrt{13.5}$.

从表9-2字母"N"所在的这一直列中，先找出被开方数的前两位数13，然后从"N"所在的横行里找到被开方数的第三位数5，行与列交叉处的数3.674，就是13.5的算术平方根.

解: $\sqrt{13.5}=3.674$.

注意 查平方根表时，必须注意被开方数的小数点的位置，例如1.35与13.5两个数的小数点的位置不同，应该在表中的不同位置查$\sqrt{1.35}$与$\sqrt{13.5}$的值.

练 习

1. 查表求下列各数的算术平方根:

(1) 9.73; (2) 97.3; (3) 38.5; (4) 3.85;
(5) 6.8; (6) 68; (7) 5; (8) 4.04.

2. 查表求下列各式的值:

(1) $\sqrt{2}$; (2) $\sqrt{60}$; (3) $\sqrt{95}$;
(4) $-\sqrt{9.5}$; (5) $\sqrt{1.48}$; (6) $\sqrt{70.4}$;
(7) $-\sqrt{47.3}$; (8) $-\sqrt{8.47}$.

3. 查表求下列各数的平方根:

(1) 3; (2) 7; (3) 38.1; (4) 1.44;
(5) 42.5; (6) 53.8; (7) 6.18; (8) 83.8.

如果被开方数是1.000到99.99之间的有四个数位的数，应该先查出前三位数的平方根，再加上根据第四位数查得的修正值.

例3 查表求$\sqrt{1.354}$.

被开方数1.354是1.000到99.99之间的四位数，求$\sqrt{1.354}$时，应该先查得$\sqrt{1.35}=1.162$，然后再查4的修正值是2（见表9-1），这里的2，表示0.002，就是说应在1.162的最后一位上加上2，所以$\sqrt{1.354}=1.162+0.002=1.164$.

解：$\sqrt{1.354}=1.162+0.002=1.164$.

如果被开方数是1到100之间的多于四个数位的数，可以先把这个数四舍五入成四个数位的数，再查表.

例4 查表求下列各式的值：

(1) $\sqrt{14.02}$；　(2) $\sqrt{71.236}$；

(3) $\sqrt{2.3142}$；　(4) $\sqrt{41\frac{1}{4}}$.

解：(1) $\sqrt{14.02}=3.742+0.003=3.745$；

(2) $\sqrt{71.236}\approx\sqrt{71.24}=8.438+0.002=8.440$；

(3) $\sqrt{2.3142}\approx\sqrt{2.314}=1.520+0.001=1.521$；

(4) $\sqrt{41\frac{1}{4}}=\sqrt{41.25}=6.419+0.004$

$=6.423.$

练　习

1. 查表求下列各式的值:

(1) $\sqrt{4.357}$；　(2) $\sqrt{95.42}$；(3) $\sqrt{5.174}$；

(4) $\sqrt{51.74}$；　(5) $\sqrt{28\frac{3}{50}}$.

2. 查表求下列各式的值:

(1) $\sqrt{22.469}$；(2) $\sqrt{96.131}$；(3) $\sqrt{53.706}$；

(4) $\sqrt{5.0302}$；(5) $\sqrt{16\frac{1}{40}}$.

利用平方根表还可以查小于 1 或者大于 100 的数的算术平方根．我们先来看下表:

n	0.04	4	400	40000
$\sqrt{n}$	0.2	2	20	200

可以看出，n 扩大到原来的 100 倍，它的算术平方根就扩大到原来的 10 倍；反过来，n 缩小到原来的$\frac{1}{100}$，它的算术平方根就缩小到原来的$\frac{1}{10}$．也就是说，**已知正数的小数点向右或者向左移动 2 位，它的算术平方根**

的小数点相应地向右或者向左移动1位. 根据这个法则，我们就可以查小于1或者大于100的数的平方根. 在查这些数的平方根时，小数点的位置一定要两位两位地移动，移到使被查的数成为有一位或者两位整数的数. 被开方数的小数点每移动两位，查得的平方根的小数点应该向相反的方向移动一位.

例5 查表求下列各式的值:

(1) $\sqrt{0.236}$;　　(2) $\sqrt{23600}$.

解: (1)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\sqrt{0.236}} \arrow[d, "\substack{\text{小数点向右}\\ \text{移动两位}}"] & = & \boxed{0.4858} \\ \boxed{\sqrt{23.6}} & \overset{\text{查表}}{=\!=} & \boxed{4.858} \arrow[u, "\substack{\text{小数点向左}\\ \text{移动一位}}"'] \end{tikzcd}$$

$\therefore\ \sqrt{0.236}=0.4858$;

(2)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\sqrt{23600}} \arrow[d, "\substack{\text{小数点向左}\\ \text{移动四位}}"] & = & \boxed{153.6} \\ \boxed{\sqrt{2.3600}} & \overset{\text{查表}}{=\!=} & \boxed{1.536} \arrow[u, "\substack{\text{小数点向右}\\ \text{移动两位}}"'] \end{tikzcd}$$

$\therefore\ \sqrt{23600}=153.6$.

练　习

1. 查表求下列各式的值:

(1) $\sqrt{0.0415}$; (2) $-\sqrt{0.001289}$; (3) $\sqrt{0.38087}$;

(4) $\sqrt{64090}$; (5) $-\sqrt{725}$; (6) $\sqrt{5710052}$;

(7) $\sqrt{\frac{8}{25}}$; (8) $\sqrt{170\frac{3}{4}}$.

2. 求下列各式中的 x:

(1) $x^2=169$; (2) $x^2-2.56=0$;

(3) $9x^2-64=0$; (4) $3x^2=5$(精确到 0.01).

习 题 一

1. 下面的语句对不对?为什么?

(1) -5 的平方是 25; (2) 25 的平方根是 -5;

(3) 49 的平方根是 ±7; (4) -49 的平方根是 -7.

2. (1) 填表:

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n^2									

(2) 根据上表,写出下列各数的平方根:

361, 289, 196, 256.

3. 求下列各数的平方根和算术平方根:

3600, $\frac{1}{64}$, 10000, 7.29, 0.04, $\frac{121}{289}$, $1\frac{11}{25}$.

4. 求下列各式的值:

$\sqrt{0}$, $-\sqrt{81}$, $\sqrt{0.09}$, $\sqrt{(-25)^2}$, $\pm\sqrt{\frac{25}{36}}$.

5. 求下列各式中的 x:

(1) $x^2=25$;　　　(2) $x^2-81=0$;

(3) $4x^2=49$;　　　(4) $25x^2-36=0$.

6. 查表求下列各数的算术平方根:

(1) 10;　(2) 13;　(3) 97.8;　(4) 1.23;

(5) 1.491;　(6) 14.91;　(7) 5.869;　(8) 58.69;

(9) 867;　(10) 7590;　(11) 0.0759;　(12) 0.003094;

(13) 87420;　(14) 0.46254;　(15) 0.00035783.

7. 查表求下列各式的值:

(1) $\sqrt{3.63}$;　(2) $\sqrt{17.6}$;　(3) $-\sqrt{2.248}$;

(4) $\pm\sqrt{48.55}$;　(5) $\sqrt{0.2157}$;　(6) $-\sqrt{0.09286}$;

(7) $\sqrt{278\frac{3}{4}}$;　(8) $\pm\sqrt{6665.72}$.

9.4 立方根

我们来看下面的问题:

要做一只正方体的木箱,使它的容积是125 分米^3,这个木箱的棱长应当是多少分米?

因为正方体的容积等于棱长的立方，如果设棱长为 x 分米,根据题意,得

$$x^3=125.$$

这就是要求出一个数,使它的立方等于 125.

因为 $5^3=125$,所以，这个正方体木箱的棱长是 5 分米.