大学高等数学类规划教材配套用书

概率论与数理统计学习指导与习题解答

齐淑华 丁淑妍 编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

…规划教材配套用书

概率论与数理统计学习指导与习题解答

齐淑华　丁淑妍　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导与习题解答 / 齐淑华，丁淑妍编著. — 大连：大连理工大学出版社，2011.4

ISBN 978-7-5611-6151-7

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①齐… ②丁… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 060168 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023

发行：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466

E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn

大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：140mm×203mm　印张：9　字数：320 千字

2011 年 4 月第 1 版　2011 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑：王　伟　责任校对：李　慧　任俊杰

封面设计：季　强

ISBN 978-7-5611-6151-7　定　价：24.00 元

前　言

概率论与数理统计是高等院校的重要基础课之一，它不仅是后续课程学习及各个学科领域中进行研究和工程实践的必要基础，而且对学生综合能力的培养起着重要的作用，同时更是考研数学试题的重要组成部分．更好地指导学生学好这门课程，加深对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决实际问题的能力是我们编写这本书的目的．《概率论与数理统计学习指导与习题解答》是大学高等数学类规划教材《概率论与数理统计》配套用书．本书按教材章节顺序编排，共八章，每章分为 6 个板块，内容概要；重点内容；题型归纳与例题精解；测试题；测试题答案；习题解答．书后有两个附录：近五年历届考研真题及解答；概率模型应用举例．各板块具有以下特点：

(1)内容概要指出本章的重点，用以帮助读者理解和记忆书中的主要概念、结论和方法，对本章有一个全局性的认识和把握．

(2)题型归纳与例题精解主要以题型的形式选取了典型例题，并进行了详细的解答．每种题型的解法都具有代表性．通过典型例题读者既可以对这部分知识消化理解，掌握常见的解题方法与技巧，又扩

充知识面，同时也做到举一反三，触类旁通.

(3)测试题紧紧围绕大纲，重点尤为突出. 本部分有利于学生学完本章后，通过自测的方式，检验自己的学习情况，同时巩固掌握的基本概念和理论，提高解题能力.

(4)习题解答是对《概率论与数理统计》一书课后习题的详细解答. 对于课后习题，希望读者在学习过程中，先独立思考，自己动手解题，然后再对照检查，不要依赖于解答.

(5)附录. 附录 1 为近五年历届考研真题，通过真题，可使读者深入地了解考研的要求，开阔视野. 附录 2 为概率模型应用举例，可使读者了解概率论在实际问题中的应用，学会如何利用所学知识解决实际问题.

本书既是大学本科学生学习概率论与数理统计有益的参考用书，又是有志考研同学的良师益友.

本书由大连民族学院理学院大学高等数学类规划教材丛书主编王立冬教授组织编写，由齐淑华、丁淑妍编著. 参加编写的还有张友、梁学忠、葛仁东、王金芝、刘红梅、周庆健、楚振艳、王铁英、刘强、谢丛波、刘力军、刘恒、董莹、丛树强等.

由于作者水平有限，难免有疏漏、不足或错误之处，敬请同行和广大读者指正.

编著者

2011.4

目 录

第 1 章 随机事件及其概率 /1

内容概要 /1 重点内容 /2 题型归纳与例题精解 /2

测试题 /12 测试题答案 /14 习题解答 /16

第 2 章 随机变量及其分布 /33

内容概要 /33 重点内容 /36 题型归纳与例题精解 /36

测试题 /46 测试题答案 /48 习题解答 /51

第 3 章 多维随机变量及其分布 /75

内容概要 /75 重点内容 /79 题型归纳与例题精解 /79

测试题 /87 测试题答案 /90 习题解答 /94

第 4 章 随机变量的数字特征 /113

内容概要 /113 重点内容 /116 题型归纳与例题精解 /116

测试题 /129 测试题答案 /130 习题解答 /133

第 5 章 大数定律与中心极限定理 /157

内容概要 /157 重点内容 /159 题型归纳与例题精解 /159

测试题 /161 测试题答案 /162 习题解答 /163

第 6 章 数理统计的基础知识 /175

内容概要 /175　重点内容 /178　题型归纳与例题精解 /178
测试题 /183　测试题答案 /185　习题解答 /187

第7章　参数估计 /202
内容概要 /202　重点内容 /205　题型归纳与例题精解 /205
测试题 /210　测试题答案 /212　习题解答 /214

第8章　假设检验 /231
内容概要 /231　重点内容 /233　题型归纳与例题精解 /233
测试题 /235　测试题答案 /236　习题解答 /238

附　录 /251
附录1　2007～2011年全国硕士研究生入学考试概率论与数理统计试题及解答 /251
附录2　概率模型应用举例 /273

第 1 章　随机事件及其概率

内容概要

一、随机事件之间的关系与运算

1. 随机事件的相关概念

(1)随机试验:概率论中的随机试验满足三个条件:

①可在相同条件下重复进行;②每次试验的结果不止一个;

③试验前不能确定哪一个结果会出现.

(2)样本空间:随机试验的所有可能结果所组成的集合.集合中的每一个元素称为样本点.

(3)随机事件:样本空间的子集.

(4)基本事件:一个样本点组成的单点集称为基本事件.

(5)必然事件 Ω:每一次试验中一定发生的事件.

(6)不可能事件 $\varnothing$:每一次试验中一定不发生的事件.

2. 事件的关系及运算

(1)包含关系:$A\subset B$ 表示 A 发生,则 B 必发生.

(2)和事件 $A+B$ 或 $A\cup B$:表示 A,B 至少有一个发生.

(3)积事件 AB 或 $A\cap B$:表示 A,B 同时发生.

(4)差事件 $A-B$:表示 A 发生,且 B 不发生.

(5)A,B 为互斥(互不相容)事件:表示 A,B 不同时发生,即 $AB=\varnothing$.

(6)A 的对立事件:表示 A 不发生,记 $\overline{A}$.对立事件一定是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件.

(7)德·摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$,$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

3. 若 $P(AB)=P(A)P(B)$,则 A,B 相互独立.

注 (1)若 A,B 相互独立,则 $\overline{A}$ 与 B,A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

(2)若 $P(A)>0,P(B)>0$,则 A,B 相互独立 $\Rightarrow A,B$ 相容;A,B 不相容 $\Rightarrow A,B$ 不相互独立.

二、概率的性质

(1)$P(\overline{A})=1-P(A)$;　(2)$P(A-B)=P(A)-P(AB)$;

(3) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

三、古典概型

古典概率：设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，(1)若 n 为有限的正整数；(2)每个基本事件的发生是等可能的，则事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含基本事件的个数}}{\Omega\text{ 包含基本事件的个数}}$$

四、条件概率与全概率公式

1. 条件概率

设 A,B 是两个事件，$P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率.

2. 乘法公式

若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$；

若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$；

若 $P(A_1)>0,P(A_1A_2)>0,\cdots,P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

3. 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一完备事件组，即 $B_iB_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，$P(B_i)>0$，则对于任一事件 A，

$$\text{全概率公式}\quad P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$\text{贝叶斯公式}\quad P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

重点内容

1. 古典概型；2. 条件概率与事件的相互独立性；3. 全概率公式与贝叶斯公式.

题型归纳与例题精解

题型 1-1　关于事件的关系及运算

【例 1】 在电炉上安装 4 个温控器，各温控器显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 以 A 表示事件“电炉断电”，设 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的由低到高的温度值，则事件 A 等于(　　).

(A) $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$　(B) $\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$

(C) $\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$　(D) $\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$

解　选(C). 因为事件 A 是"电炉断电"，而电炉断电的条件是只要有两个温控器显示的温度不低于 t_0，即当 $T_{(3)} \geqslant t_0$ 时，必有 $t_0 \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$. 所以选(C).

【例 2】　对于任意两事件 A 与 B，与 $A \cup B = B$ 不等价的是(　　).

(A) $A \subset B$　(B) $\overline{B} \subset \overline{A}$　(C) $A\overline{B} = \varnothing$　(D) $\overline{A}B = \varnothing$

解　选(D). 因 $A \cup B = B$ 等价于 $A \subset B$，或 $\overline{B} \subset \overline{A}$，或 $A\overline{B} = \varnothing$，故不选(A)，(B)，(C)；取 $B = \Omega$，$A = \varnothing$，有 $A \cup B = B$，但 $\overline{A}B = \Omega$. 所以选(D).

【例 3】　指出下列命题中哪些成立，哪些不成立？

(1) $A \cup B = A\overline{B} \cup B$　(2) $\overline{A}B = A \cup B$

(3) $\overline{A \cup B}C = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$　(4) $(AB)\overline{(AB)} = \varnothing$

(5) 若 $A \subset B$，则 $A = AB$　(6) 若 $AB = \varnothing$ 且 $C \subset A$，则 $BC = \varnothing$

解　(1)成立；(2)不成立；(3)不成立；(4)成立；(5)成立；(6)成立.

题型 1-2　关于事件概率的性质

【例 4】　已知事件 A 及 B 的概率都是 $\frac{1}{2}$，则下列结论一定正确的是(　　).

(A) $P(A \cup B) = 1$　(B) $P(\overline{A}\,\overline{B}) = \frac{1}{4}$

(C) $P(AB) = \frac{1}{4}$　(D) $P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$

解　因为事件 A 及 B 不一定互不相容，即 $P(A \cup B)$ 并不一定等于 $P(A) + P(B) = 1$，所以(A)错；

因为事件 A 及 B 不一定相互独立，$P(AB)$ 并不一定等于 $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$，且 $P(\overline{A}\,\overline{B})$ 并不一定等于 $P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$，所以(B)，(C)错；

因为 $P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

而 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$，故有 $P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$，故选(D).

【例 5】　证明：若事件 A,B,C 同时发生必导致事件 D 发生，则

$$P(A) + P(B) + P(C) \leqslant 2 + P(D)$$

证法 1

由题设可知 $ABC \subset D$，得

$$P(ABC)\leqslant P(D)$$

而

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\leqslant 1 \quad (1)$$

$$P(AB\cup AC\cup BC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2P(ABC)\leqslant 1 \quad (2)$$

式(1)+式(2)得

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(ABC)\leqslant 2$$

从而有

$$P(A)+P(B)+P(C)\leqslant P(ABC)+2\leqslant 2+P(D)$$

证法 2 由 $P(A\cup B)\leqslant 1$ 可得

$$P(A)+P(B)\leqslant 1+P(AB) \quad (3)$$

式(3)两边加 $P(C)$ 得

$$\begin{aligned}P(A)+P(B)+P(C)&\leqslant 1+P(AB)+P(C)\\&=1+P(AB\cup C)+P(ABC)\\&\leqslant 2+P(ABC)\leqslant 2+P(D)\end{aligned}$$

题型 1-3 古典概率的计算

【例 6】 从 0,1,…,9 十个数字中每次任意读一个数字,先后读 7 次,假定各数字每次被读到的概率都是 1/10. 求下列事件的概率:

(1)读到的数字按先后次序组成一个指定的 7 位数;

(2)7 个数字全不相同;

(3)7 个数字中不含 9 和 1;

(4)数字 9 恰好出现两次.

解 将从 0,1,…,9 十个数字中先后读 7 个数字(可重复地读 7 个)看成一个试验,则试验的样本空间中基本事件总数为 10^7. 再记(1)～(4)的事件分别为 A_1,A_2,A_3,A_4,则

(1)A_1 是一个指定的 7 位数,只含一个基本事件,故 $P(A_1)=\frac{1}{10^7}=10^{-7}$.

(2)A_2 包含的基本事件数是 P_{10}^7,故 $P(A_2)=\frac{P_{10}^7}{10^7}$.

(3)这时只需在 0,2,3,4,5,6,7,8 这 8 个数字中每次任意读一个数字,先后读 7 次,故 A_3 包含 8^7 个基本事件,故 $P(A_3)=\frac{8^7}{10^7}=0.8^7$.

(4)9 可出现在 7 位数字的任意两位上,有 C_7^2 种选择方法,其余 5 位上可出现剩下的 9 个数字中的任意一个,有 9^5 种选择方法,所以 A_4 中含有 $C_7^2 9^5$ 个基本事件,故 $P(A_4)=C_7^2 9^5/10^7$.

【例 7】 50 只铆钉被随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱. 假设每个部件用 3 只铆钉，若将 3 只强度太弱的铆钉用在同一部件上，则该部件强度太弱. 求发生一个部件强度太弱的概率.

解 将部件从 1 到 10 编号，并以 A_i 表示事件"第 i 个部件强度太弱". 依题意，仅当 3 只强度太弱的铆钉装在 i 个部件上时，A_i 才会发生. 由于从 50 只铆钉中任取 3 只装在第 i 个部件上共有 C_{50}^3 种方法；强度太弱的铆钉仅有 3 只，都装在第 i 个部件上只有 1 种，所以

$$P(A_i)=\frac{1}{C_{50}^3}=\frac{1}{19\ 600}\quad (i=1,2,\cdots,10)$$

且知 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 两两互斥，因此，10 个部件中有一个强度太弱的概率为

$$p=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10})=\sum_{i=1}^{10}P(A_i)=\frac{10}{19\ 600}=\frac{1}{1\ 960}$$

【例 8】 从 5 双不同的鞋子中任意取 4 只，求 4 只鞋中至少有 2 只配成 1 双的概率.

解 设 $A=\{4$ 只鞋子中至少有两只配成 1 双$\}$，样本空间所含样本点个数为 C_{10}^4.

解法 1 对于事件 A，满足要求的有两类：第一类是 4 只中恰好有 2 只配对，其取法为 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$ 种(先从 5 双中任取 1 双，再从剩下的 4 双中任取两双，从这两双中各取 1 只)；第二类是 4 只中恰好配成两双，其取法为 C_5^2. 故

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解法 2 对第一类可先从 5 双中任意取 1 双，再从剩下的 8 只中任取 2 只，去掉可能成双的 4 种情况，其取法为 $C_5^1(C_8^2-C_4^1)$种. 第二类同上. 故

$$P(A)=\frac{C_5^1(C_8^2-C_4^1)+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解法 3 应用对立事件求事件 A 发生的概率，即$\overline{A}$为取出的 4 只鞋无一双配对.

对于事件$\overline{A}$，可以先从 5 双鞋中任取 4 双，再从每双中任取 1 只，其取法为 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$ 种. 故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解法 4 对于事件$\overline{A}$，可以先从 10 只鞋中任取 1 只，去掉与此只配对的另一只；再从剩下的 8 只中任取 1 只，去掉与此只配对的另一只. 再从剩下的 6 只中任取 1 只，去掉与此只配对的另一只；再从剩下的 4 只中任取 1 只，排除排列因素，其取法为$\frac{C_{10}^1C_8^1C_6^1C_4^1}{4!}$种. 故

$$P(A)=1-\frac{\frac{C_{10}^1C_8^1C_6^1C_4^1}{4!}}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

题型 1-4　乘法公式和条件概率的应用

【例 9】 小王忘记了朋友家电话号码的最后一位数,他只能随意拨最后一个号,共拨了三次.求第三次才拨通的概率.

解　设事件 $A_i=\{$第 i 次拨通$\}(i=1,2,3)$.

由乘法公式可得第三次才拨通的概率

$$\begin{aligned}P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)&=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\,|\,\overline{A}_1)P(A_3\,|\,\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

特别提示:“第三次才拨通”,意味着前两次没拨通的同时,而第三次拨通了;而不是已知前两次都未拨通的条件下,第三次拨通.

【例 10】 某冰箱厂甲、乙两条生产线分别生产了 520 台和 480 台冰箱,它们的次品率分别为 0.005 和 0.007.现从这 1 000 台冰箱中任抽一台,求抽到的冰箱是甲生产线生产的且为正品的概率.

解　设 $A=\{$甲生产线生产$\}$,$B=\{$正品$\}$,则由题意得

$$P(A)=520/1\,000=0.52,\quad P(B\,|\,A)=1-0.005=0.995$$

根据乘法公式有

$$P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=0.52\times0.995=0.517\,4$$

【例 11】 设 A,B 为随机事件,且 $0<P(A)<1,P(B)>0,P(B\,|\,A)=P(B\,|\,\overline{A})$,则下列结论一定成立的是(　　).

(A)$P(A\,|\,B)=P(\overline{A}\,|\,B)$　　(B)$P(A\,|\,B)\neq P(\overline{A}\,|\,B)$

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$　　(D)$P(AB)\neq P(A)P(B)$

解　选(C).据题设,有 $P(B\,|\,A)=P(B\,|\,\overline{A})$,即

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$$

从而

$$\begin{aligned}P(A)P(\overline{A}B)&=P(\overline{A})P(AB)=[1-P(A)]P(AB)\\&=P(AB)-P(A)P(AB)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)P(\overline{A}B)+P(A)P(AB)\\&=P(A)[P(\overline{A}B)+P(AB)]\\&=P(A)P(B)\end{aligned}$$

所以(C)成立,即 A 与 B 相互独立,(D)不成立.

进一步,由(C)成立,有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$$

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\overline{A})P(B)}{P(B)}=P(\overline{A})$$

如果 $P(A)=P(\overline{A})$,则(A)成立,否则(B)成立,故(A),(B)不一定成立.

故选(C).

题型 1-5　利用全概率公式与贝叶斯公式计算问题

【例 12】 某校射击队共有 20 名射手,其中一级射手 4 人,二级射手 8 人,三级射手 7 人,四级射手 1 人,一、二、三、四级射手能通过预选赛进入正式比赛的概率分别为 0.9,0.7,0.5,0.2,求任选一名射手能进入正式比赛的概率.

解 设 $A_k=\{$第 k 级选手被选中$\}(k=1,2,3,4)$,$B=\{$任选一名射手能通过预选赛进入正式比赛$\}$,则

$$P(A_1)=\frac{4}{20},\quad P(A_2)=\frac{8}{20},\quad P(A_3)=\frac{7}{20},\quad P(A_4)=\frac{1}{20}$$

$$P(B|A_1)=0.9,\quad P(B|A_2)=0.7,\quad P(B|A_3)=0.5,\quad P(B|A_4)=0.2$$

由全概率公式,有

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{k=1}^{4}P(A_k)(B|A_k)\\&=\frac{4}{20}\times 0.9+\frac{8}{20}\times 0.7+\frac{7}{20}\times 0.5+\frac{1}{20}\times 0.2=0.645\end{aligned}$$

【例 13】 设某地区成年居民中肥胖者占 10%,不胖不瘦者占 82%,瘦者占 8%.又知肥胖者患高血压病的概率为 20%,不胖不瘦者患高血压病的概率为 10%,瘦者患高血压病的概率为 5%.若在该地区任选一人,发现此人患高血压病,则他属于肥胖者的概率有多大?

解 设 $A_1=\{$居民为肥胖者$\}$,$A_2=\{$居民为不胖不瘦者$\}$,$A_3=\{$居民为瘦者$\}$,$B=\{$居民患高血压病$\}$,则

$$P(A_1)=0.1,\quad P(A_2)=0.82,\quad P(A_3)=0.08$$

$$P(B|A_1)=0.2,\quad P(B|A_2)=0.1,\quad P(B|A_3)=0.05$$

由全概率公式,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.106$$

由贝叶斯公式,有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.02}{0.106}\approx 0.189$$

【例 14】 设盒中有 9 个乒乓球,其中有 6 个新的,3 个旧的.第一次比赛时

任取两个，用完后放回盒中；第二次比赛时从中任取一个，用完后放回盒中. 求第二次取到的是新球的概率.

解 设事件 $A_i=\{$第一次取到的是 i 个新球$\}(i=0,1,2)$，$B=\{$第二次取到的是新球$\}$. 显然，A_0,A_1,A_2 为样本空间的一个划分，则

$$P(A_0)=\frac{C_3^2}{C_9^2},\quad P(A_1)=\frac{C_3^1C_6^1}{C_9^2},\quad P(A_2)=\frac{C_6^2}{C_9^2}$$

$$P(B|A_0)=\frac{C_6^1}{C_9^1},\quad P(B|A_1)=\frac{C_5^1}{C_9^1},\quad P(B|A_2)=\frac{C_4^1}{C_9^1}$$

故所求的概率为

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{C_3^2}{C_9^2}\cdot\frac{C_6^1}{C_9^1}+\frac{C_3^1C_6^1}{C_9^2}\cdot\frac{C_5^1}{C_9^1}+\frac{C_6^2}{C_9^2}\cdot\frac{C_4^1}{C_9^1}=\frac{14}{27}$$

【例 15】 多项选择题是各类考试中常采用的一种题型，它要求考生在列出的 4 个备选答案中至少选出 2 个作为答案. 考生只有全部选对才算对，错选、多选、漏选都算错. 设考生中确实理解题意而答对某多项选择题的比例为 30%，而其余的考生只能乱猜. 已知某考生该道多项选择题答对了，求他确实知道正确答案的概率.

解 设事件 $A=\{$答对该道题$\}$，$B=\{$确实理解题意而答对题$\}$，显然

$$P(A|B)=1,\quad P(A|\overline{B})=\frac{1}{C_4^2+C_4^3+C_4^4}=\frac{1}{11}$$

由全概率公式可得

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$
$$=\frac{3}{10}\times1+\frac{7}{10}\times\frac{1}{11}=\frac{40}{110}$$

由贝叶斯公式，即得所求概率

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{3}{10}\times\frac{110}{40}=\frac{33}{40}=0.825$$

【例 16】 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一地区的报名表，从中先后抽取两份.

(1)求先抽到的一份是女生表的概率 p；

(2)已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

解 设 $H_i=\{$报名表是第 i 个地区考生的$\}(i=1,2,3)$，$A_j=\{$第 j 次抽到的报名表是男生的$\}(j=1,2)$，则

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(A_1|H_1)=\frac{7}{10},\quad P(A_1|H_2)=\frac{8}{15},\quad P(A_1|H_3)=\frac{20}{25}$$

(1) $p=P(\overline{A}_1)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}_1\mid H_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$

(2)由 $P(A_1\mid H_1)=\frac{7}{10}$,得

$$P(A_2\mid H_1)=\frac{P(A_2H_1)}{P(H_1)}=\frac{P(A_1A_2H_1)+P(\overline{A}_1A_2H_1)}{P(H_1)}$$

$$=\frac{P(A_2\mid A_1H_1)P(A_1H_1)+P(A_2\mid\overline{A}_1H_1)P(\overline{A}_1H_1)}{P(H_1)}$$

$$=\frac{P(A_2\mid A_1H_1)P(A_1\mid H_1)P(H_1)+P(A_2\mid\overline{A}_1H_1)P(\overline{A}_1\mid H_1)P(H_1)}{P(H_1)}$$

$$=P(A_1\mid H_1)P(A_2\mid A_1H_1)+P(\overline{A}_1\mid H_1)P(A_2\mid\overline{A}_1H_1)$$

$$=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{10}$$

类似地有

$$P(A_2\mid H_2)=\frac{8}{15},\quad P(A_2\mid H_3)=\frac{20}{25}$$

$$P(\overline{A}_1A_2\mid H_1)=\frac{7}{30},\quad P(\overline{A}_1A_2\mid H_2)=\frac{8}{30},\quad P(\overline{A}_1A_2\mid H_3)=\frac{5}{30}$$

于是再由全概率公式有

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2\mid H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$$

$$P(\overline{A}_1A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}_1A_2\mid H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)=\frac{2}{9}$$

因此

$$q=P(\overline{A}_1\mid A_2)=\frac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{2}{9}\Big/\frac{61}{90}=\frac{20}{61}$$

【例 17】 袋中有 6 张相同的卡片,上面分别标有数 0,1,2,3,4,5. 先从袋中任意摸出两张卡片,已知其上数字之和大于 6,试判断先摸出的一张卡片上的数字最可能是几?

解　设事件 A={两张卡片上的数字之和大于 6},B_i={先摸出的卡片上的数字为 i}(i=0,1,2,3,4,5).

依题意可知

$$P(B_i)=\frac{1}{6}\quad(i=0,1,2,3,4,5)$$

$$P(A\mid B_0)=P(A\mid B_1)=0,\quad P(A\mid B_2)=\frac{1}{5}$$

$$P(A\mid B_3)=P(A\mid B_4)=\frac{2}{5},\quad P(A\mid B_5)=\frac{3}{5}$$

由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{5}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{6}\times\frac{1+2+2+3}{5}=\frac{4}{15}$$

又由贝叶斯公式，得

$$P(B_5|A)=\frac{P(B_5)P(A|B_5)}{P(A)}=\frac{3}{8}$$

$$P(B_4|A)=P(B_3|A)=\frac{2}{8}$$

$$P(B_2|A)=\frac{1}{8}$$

$$P(B_1|A)=P(B_0|A)=0$$

因为

$$P(B_5|A)>P(B_k|A)\quad(k=0,1,2,3,4)$$

所以先摸出的卡片上的数字最可能是 5.

【例 18】 (laplace 配对)n 位绅士每人抛出各自的帽子，欢呼一项胜利. 假设欢呼之后帽子充分混合，绅士们最后还是想要顶帽子，遂随机取一顶帽子戴在头上. 试求至少有一位取到自己帽子的概率 p_n. 又当 n 趋于无穷时，这个概率会趋于 0 吗?

解 令 A_i 表示“第 i 个人取到自己的帽子”($i=1,2,\cdots,n$).

利用加法公式

$$p_n=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=s_1-s_2+s_3+\cdots+(-1)^{n+1}s_n$$

其中

$$s_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\quad s_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$

$$s_3=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k),\cdots,s_n=P(A_1A_2\cdots A_n)$$

显然 $P(A_1)=1/n$. 由已知可得 $P(A_i)=1/n$. 故 $s_1=1$.

如果第 i 个人拿走自己的帽子，则第 $j(j\neq i)$个人在余下 $n-1$ 顶帽子中随机抽取，故条件概率

$$p(A_j|A_i)=\frac{1}{n-1},\quad P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j|A_i)=\frac{1}{n(n-1)}$$

从而

$$s_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)=\mathrm{C}_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2!}$$

类似地得到一般结果

$$s_k=\frac{1}{k!}$$