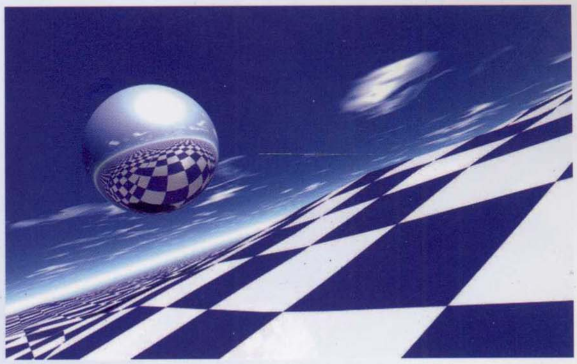
高等院校公修数学课辅导丛书



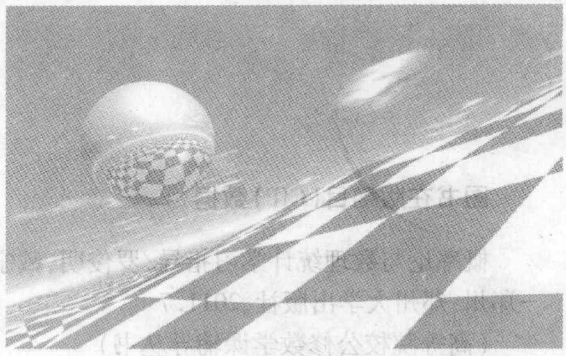
Gailülun
Yu Shuli Tongji Xuexi Zhidao

概率论与数理统计学习指导

罗俊明 戴宁 左静◎主编

郑州大学出版社

高等院校公修数学课辅导丛书



Gailülun Yu Shuli Tongji Xuexi Zhidao

概率论与数理统计学习指导

罗俊明 戴宁 左静◎主编

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/罗俊明,戴宁,左静主编.
—郑州:郑州大学出版社,2011.7
(高等院校公修数学课辅导丛书)
ISBN 978-7-5645-0486-1

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①罗…②戴…③左…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 112407 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:王　锋　　发行部电话:0371-66966070
全国新华书店经销
郑州文华印务有限公司印制
开本:710 mm×1 010 mm　1/16
印张:21.5
字数:411 千字
版次:2011 年 7 月第 1 版　　印次:2011 年 7 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-0486-1　　定价:27.00 元

内容提要

本书为概率论与数理统计学习用书，由“基本要求”、“内容概述”、“典型例题分析”、“习题选解与提示”和“综合练习题”五部分组成。“基本要求”与“内容概述”部分对每章的重点和难点以及基本概念作了详细解释。“典型例题分析”部分尽可能详尽地对这门课程所涉及的题型和解题的基本方法作了深入的分析与评注，可以帮助读者获得正确的解题途径和方法，并避免解题过程中容易出现的错误。“习题选解与提示部分”和“综合练习题”部分，分别编入了教材中几乎所有的重点习题和大量的有关基本概念和综合性的练习题，可以满足读者进一步提高这门课程习题解答的能力。

本书可作为理工科各专业本科生概率论与数理统计课程的辅助教材，也可作为准备报考硕士研究生的理、工、文等各科考生考前复习的参考书和强化训练的指导书。

序　言

1995年至2000年郑州大学数学系公修数学教学组承担了原国家教委面向21世纪教学改革立项项目“面向21世纪非数学类专业高等数学教学内容和课程体系的改革研究”子项目的研究工作。项目总负责人萧树铁先生曾向教育部提交了其研究成果报告——“高等数学教学改革研究报告”，该报告已由高等教育出版社于2000年出版。在此报告中对数学教育在大学教育中的重要作用，国内外数学教育改革情况，今后改革的原则，改革的方案等问题作了精辟的论述。同时公修数学教学组也特别关注由马知恩先生负责的原国家教委面向21世纪教学改革立项项目“面向21世纪工科高等数学教学内容和课程体系的改革研究”的研究成果，该成果的报告“工科数学系列课程教学改革研究报告”也已由高等教育出版社于2001年出版。公修数学教学组在学校、数学系领导的关怀和校内各院系支持下，由阎占立、王长群、罗俊明等人执笔分别写出了《微积分(上、下)》、《线性代数》、《概率论与数理统计》3本新教材。这些教材已在我校试用多年，现经全体授课教师的反复实践和讨论，已定稿出版。这3本教材完全符合上述两个教学改革项目研究成果的精神并具有自己的特色，这是我校公修数学课教学改革的一项代表性成果。

由于新教材贯彻了一些新想法，加强了理论性，有大量新的习题，给教与学都带来了新的问题。另外，硕士研究生入学考试要求高于教学要求，要想通过这一考试，必须在课堂教学的基础上拓宽知识面和进行强化训练。为了解决这两个问题，教学组又编写了与新教材配套的学习参考书。书

中对基础知识进行了串讲总结，通过精选的例题阐明了常见的解题方法和技巧，对课本习题中难度大的题目给出了详细解答。这些参考书对同学们学习数学课程以及应对研究生入学考试会有很好的作用。

李梦如

2003 年 8 月

前　言　PREFACE

概率论与数理统计是高等院校所设置的课程中唯一一门研究随机现象统计规律性的基础课，而且是理、工、医、商等许多学科研究生数学入学考试的一个重要组成部分。帮助学生全面系统地掌握和运用这门课程的基本理论和基本方法是一件十分有意义的工作。为此，我们根据教学大纲并参考研究生入学考试大纲的要求，编写了这本《概率论与数理统计学习指导》。

本书的编者都是在高校任教多年的教师和河南省优秀课程概率论与数理统计课题组的骨干成员，有着丰富的教学经验，本书的内容汇聚了作者多年的教学经验心得和体会。

为了帮助学生深入理解基本概念，本书每章都设有"基本要求"和"内容概述"，对重点和难点作了详细的解释。为了帮助学生进一步加深对基本概念的理解以及提高解答概率论与数理统计习题的能力，本书通过"典型例题分析"，总结归纳了各类问题的解题方法步骤，剖析了获得正确解题方法的思维过程，并指出了在解答各类问题中容易出现的错误。为了进一步巩固和提高学生解答概率论与数理统计习题的能力，本书每章都设有"习题选解与提示"，对教材中的练习题给出了解答或提示。读者在做练习题时一定要先动手做题，在独立思考完成有困难时再参阅解答或提示。为了便于学生复习和自测，本书最后还选编了大量有关基本概念和综合性的"综合练习题"并给出了答案或提示。

本书写作分工如下：每章的第一节基本要求、第二节内容概述以及最后的综合练习题由戴宁编写；每章的第三节典型例题分析由罗俊明编写；每章的第四节习题选解与提示由左静编写。

本书编写前期,张帷民教授、张先桂同志对典型例题的选编提出了许多宝贵意见;李梦如教授、罗来兴副教授对本书的编写给予了大力支持与帮助。此外,本书的出版也得到了郑州大学教务处、数学系有关领导的鼓励。编者对他们表示衷心的感谢。

书中不足之处,诚恳地希望读者批评指正。

编者

2004年元月

目 录 CONTENTS

第一章

随机事件与概率

第一节 基本要求

(1)了解随机现象的统计规律性,理解随机试验、随机事件和样本空间的概念,熟练掌握事件之间的关系与运算.了解事件域的概念.

(2)会计算古典概率、几何概率,了解概率的公理化定义,掌握概率的基本性质,并熟练应用这些性质进行概率计算.

(3)理解条件概率的概念,掌握乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.

(4)理解事件独立性的概念,会使用独立性进行概率计算.理解独立重复试验的概念,掌握贝努里概型的概率计算方法.

第二节 内容概述

一、随机试验与随机事件

1.随机现象和统计规律性

现实世界中的客观现象一般可分为确定性现象和随机现象.确定性现象是指在一定条件下必然出现的现象("多因一果"现象);而随机现象是指在一定的条件下,有多种可能结果出现,而且事先无法预知哪种果发生的现象("多因多果"现象).对随机现象进行大量的观察所呈现出的某种规律性,称

为随机现象的统计规律性. 概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的数学学科.

2. 随机试验

随机试验满足以下条件:

(1)试验可在相同的条件下重复进行.

(2)每次试验的所有结果是明确可知的,且不止一个.

(3)每次试验必导致一个结果,但试验之前不能确定哪一个结果出现.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的,并常简称随机试验为试验. 用 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示.

3. 样本空间、随机事件

样本空间 随机试验 E 的所有可能结果的全体组成的集合,称为 E 的样本空间,通常用 Ω 表示.

样本点 构成 Ω 的元素即 E 的每一个结果称为样本点,常用 ω 表示.

随机事件 在一次试验中可能出现,也可能不出现的结果称为随机事件,简称事件,用大写英文字母 A、B、C 等表示.

随机试验 E 中的一随机事件 A 是 Ω 的子集. 事件 A 出现或发生,当且仅当 A 所包含的样本点之一出现.

必然事件 每次试验必定发生的事件称为必然事件,用 Ω 表示.

不可能事件 每次试验肯定不发生的事件称为不可能事件,用 $\varnothing$ 表示.

4. 随机事件的关系与运算

由于随机事件是一个集合,因此事件间的关系与运算从形式上按照集合论中集合的关系与运算来处理,但是要注意其概率论的内涵.

(1)包含 $A \subset B$ 表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生,称事件 B 包含事件 A. 此时若 $\omega \in A$,必有 $\omega \in B$.

(2)相等 $A = B$ 表示事件 A, B 满足:$A \subset B$ 且 $B \subset A$,称事件 A 与 B 相等,此时 A 与 B 包含的样本点完全相同,即 $\omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B$.

(3)并(和) $A \cup B$ 表示事件"两事件 A, B 至少有一个发生",称之为 A 与 B 的并(和)事件. $A \cup B = \{\omega : \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$.

类似定义有限(可列)并事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ ($\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$).

(4)交(积) $A \cap B$ 表示事件"两事件 A, B 同时发生",称之为 A 与 B 的交(积)事件. $A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$,也记 $A \cap B = AB$.

类似定义有限(可列)交事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ ($\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$).

(5)差 $A - B$ 表示事件"事件 A 发生而 B 不发生",称之为 A 与 B 的差事

件. $A-B=\{\omega:\omega\in A,但\ \omega\bar{\in} B\}$.

(6)互不相容(互斥) 如果事件 A 与 B 不能同时发生,则称 A 与 B 互不相容,此时 $A\cap B=\varnothing$.

(7)对立(互逆) $\bar{A}=\Omega-A$ 表示事件"事件 A 不发生",称之为 A 的对立(逆)事件,此时 $A\cap\bar{A}=\varnothing$,$A\cup\bar{A}=\Omega$.

(8)划分(完备事件组) $\{A_i\}_{i=1}^n$ 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,且 $\bigcup\limits_{i=1}^n A_i=\Omega$,则称 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 是 Ω 的一个划分(完备事件组).

5. 事件的运算法则

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$.

(3)分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4)对偶律(德·摩根律):

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}\ .$$

6. 事件域

设 Ω 是一样本空间,$\mathscr{F}$是 Ω 的某些子集组成的集合. 如果满足以下条件:

(1)$\Omega\in\mathscr{F}$

(2)若 $A\in\mathscr{F}$,则$\bar{A}\in\mathscr{F}$,即 $\mathscr{F}$对取逆运算封闭.

(3)若 $A_k\in\mathscr{F}$,$k=1,2,\cdots$,则$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathscr{F}$,即 $\mathscr{F}$对可列并运算封闭.

则称 $\mathscr{F}$是 Ω 上的一个事件域或 σ-代数,这时称 $\mathscr{F}$中的元素是事件.

附注 (1)由事件域的定义及课本中 1.17 定理知:事件域 $\mathscr{F}$含有 Ω、$\varnothing$,并对事件的逆运算、有限(可列)并、有限(可列)交、差等运算都具有封闭性. 事件域 $\mathscr{F}$就是针对随机现象及相应的随机试验中,被人们所考虑的随机事件全体的一个数学模型,它完全地表征了全体随机事件的内在有机结构. 事实上,由此得到随机事件的数学定义,即事件域 $\mathscr{F}$中的元素才是事件.

(2)从实际的角度来看待事件域 $\mathscr{F}$,不妨认为根据随机试验的研究目的,将我们感兴趣的一些试验结果以及与这些结果相关联的结果(即通过事件的并、交差、逆运算产生的)合并在一起生成一个事件域 $\mathscr{F}$,这里将不必要求 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的全部子集形成的集合.

例如,E:检验某厂生产的大批量灯泡的"寿命",此时

$$\Omega=\{t:t\geqslant 0\},t\text{:被验灯泡的“寿命”为 }t\text{ 小时}$$

如果检验者的目的是要考察产品的次品率,因而只关注 $A=\{$灯泡为正品$\}=\{t:t\geqslant 500\}$,$\bar{A}=\{$灯泡为次品$\}=\{t:0\leqslant t<500\}$这两个结果,于是可取 $\mathscr{F}=\{\varnothing,A,\bar{A},\Omega\}$,它是 Ω 上的一个事件域. 显然 $\mathscr{F}$ 只是由 Ω 的部分子集所构成的,注意此时 Ω 的子集 $\{t:t=500\}$ 不是事件.

二、事件的概率及其性质

概率是事件在随机试验中出现的可能性大小的数值度量,它是事件的本质属性,是客观存在的,这与用长度度量线段,用面积度量平面区域等是类似的. 我们用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率.

1. 频率与概率的统计定义

对 E 中的事件 A,将 E 独立地重复进行 n 次,A 发生的次数为 n_A(频数),比值 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 称为 A 在 n 次试验中发生的频率. 当试验次数 n 增大时,频率 $f_n(A)$ 呈现出某种稳定性,即它在某一常数 p 附近波动;频率的稳定性,说明事件在试验中出现的可能性可以用数值的大小来度量,我们称这个客观存在的频率稳定值 p 为事件 A 的概率,即 $P(A)=p$.

附注 (1)在实际中往往无法精确地确定 p 值,于是通常使用频率 $f_n(A)$ 作为 p 的估计值.

(2)“频率稳定性”的确切含义,将由贝努里大数定理给出进一步的阐述.

2. 古典概率与概率的古典定义

如果随机试验 E 的样本空间 Ω 只含有有限个样本点,且每个样本点出现的可能性相同,则称 E 为古典概型.

如果 Ω 所含的样本点总数为 n,事件 A 包含的样本点个数为 m,则 A 发生的概率定义为:

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点总数}}=\frac{m}{n}$$

也称其为古典概率.

3. 几何概型与概率的几何定义

如果 Ω 是一个可度量的有界几何区域(这个区域可以是一维、二维、三维,甚至是 n 维的),随机试验 E 为向 Q 等可能地随机投掷质点 M,即质点落在 Ω 的任意可度量子区域 A 内的可能性大小只与 A 的测度成正比,而与 A 的形状和位置无关,则称 E 为几何概型.

记事件 $A=\{$质点 M 落入区域 $A\}$，则 A 发生的概率定义为：

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

上式计算的概率称为几何概率.

附注 (1)$L(\cdot)$表示区域的几何测度，如长度、面积、体积等.

(2)这里几何概型是指向某区域随机投点的随机试验，但实际中遇到的问题往往有各自的意义，比如会面问题、投针问题等，这时首先要将问题给出数学刻画，转化为随机投点的几何概型.

4. 概率的公理化定义

总结频率及古典概率、几何概率的共性，通过对概率本质的认识，得到概率应满足的基本条件，以公理形式提出下列概率的一般数学定义.

概率的公理化定义 设 $\mathscr{F}$ 是样本空间 Ω 上的一个事件域，$P(A)\,(A\in\mathscr{F})$ 是 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数，如果满足

(1)**非负性**：$P(A)>0,\ \forall A\in\mathscr{F}$.

(2)**规范性**：$P(\Omega)=1$.

(3)**可列可加性**：若 $A_k\in\mathscr{F}, k=1,2,\cdots$，两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$$

则称 $P(A)\,(A\in\mathscr{F})$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度，称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，称 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间.

附注 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 就是描述随机试验 E 以及相应随机现象的数学模型.

5. 概率的性质

概率的三条公理是由实践总结而无须逻辑证明的基本性质，由它们可以导出概率的其他性质.

(1)**对于不可能事件** $\varnothing$，$P(\varnothing)=0$.

(2)**有限可加性**：若 $A_1,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$.

(3)**求逆公式**：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4)**减法公式**：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$. 特别地，当 $A\subset B$ 时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(5)**单调性**：若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

(6)**加法公式**：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. 一般地，对于任意 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$，有