

 新青年教师文库

顾问 张景中 张奠宙

数学习题教学研究

(修订版)

SHUXUE XITI
JIAOXUE YANJIU

陈永明名师工作室 著

上海教育出版社

 新青年教师文库

顾问 张景中 张奠宙

数学习题教学研究

(修订版)

陈永明名师工作室 著

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学习题教学研究 / 陈永明名师工作室著. —修订本. —上海:

上海教育出版社, 2014.10

ISBN 978-7-5444-5426-1

I. ①数… II. ①陈… III. ①中学数学课—教学研究
IV. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第231094号

责任编辑 张莹莹 刘祖希

封面设计 一步设计

数学习题教学研究(修订版)

陈永明名师工作室 著

出 版	上海世纪出版股份有限公司 上 海 教 育 出 版 社 易文网 www.ewen.co
地 址	上海市永福路 123 号
邮 编	200031
发 行	上海世纪出版股份有限公司发行中心
印 刷	昆山市亭林印刷有限责任公司
开 本	700×1000 1/16 印张 13 插页 1
版 次	2014 年 10 月第 1 版
印 次	2014 年 10 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5444-5426-1/G·4370
定 价	28.00 元

(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

前言^①

先摘录一段文字：

“一个老师在教公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 时，因学生用错公式而怒发冲冠，他让做错作业的学生抄公式，错一次抄100遍。于是，为了完成任务，有的学生练出一手握四支笔的绝技，如此教学，与地狱何异？”^②

当前，教育的状况真叫人看不懂。一方面在推行课改，另一方面学生的负担这么重，厌学的情绪这么厉害；一方面在大力宣传素质教育，另一方面还是智育第一，升学率挂帅比任何时候都厉害。为此，在第一线勤勤恳恳地教书育人的老师，也常常感到身心疲惫，同时又感到困惑，感到无奈。

现在，全国全党都在学习实践科学发展观，我们真心感到，教育要用科学发展观指导，数学教学也要用科学发展观指导。脱离现实的空谈是没有价值的，我们关心的是：怎么在现行体制下，总结出，或者寻找到符合国情的、兼顾基础和发展的、提高教学效益的、减轻学生负担的有效经验和方法，这也是家长、学生、教师、校长的共同心愿。

在数学教学领域里，可以讨论的问题不少，但对减负增效最直接的，恐怕是例题、习题的选择、安排、讲解……总之是有关例题习题的教学问题。本书想对此作些讨论，这是很实在的事情，至少在我国，在当前。

坊间研究数学习题的书籍已经很多，自从波利亚的著作被翻译出版之后，我国的学者和优秀教师单墀、罗增儒、戴再平、周春荔、孙维刚、任勇等写出了有中国特色的关于数学习题的专著，这些书都很有见地，极大地提升了我国数学解题教学研究的水平。有这么多闪闪发光的专著，笔者实在不敢“弄斧”。本书的重点不是“怎样解题”，而是“怎样教解题”。因此，本书取名为《数学习题教学研究》。在本书里，所指的习题，大多广义地指例题、练习题（课内练习和课外作业）、测试题这样的“三题”，而且主要是指“常规”的习题。笔者赞同在中学里引进开放题和课题研究这样的“研究性”的习题，由于我们的水平有限，本书未能涉及。

在怎样教解题这个问题上，我们主张科学训练。作为科学训练的方法之一，我们提出：要把隐性的解题经验显性化，算法化。

① 原2010年版的前言。

② 徐标.让学生感受数学的严谨与快乐[J].时代数学学习(教研版),2006(1-2).

为此,我们推荐两个重要的优良的数学认知结构:解题模块和命题联想系统,都是解题经验的显性反映(或许是张莫宙教授提出的“双基模块”的两种具体形式),有可操作的特征,因此具有算法化的特点。

这个观点可能会引起不同的看法,可能会被指责为死读书,扼制了学生的创造性等等。

但是,我们认为,这个观点在实践中是有效的,很多优秀教师就是这么教的。我们这本书主要是写给广大的普通中学的数学教师看的,我们不敢说,这本书对天才学生有多少帮助,但对大多数学生来说,应该是有益的。

现在正被大力宣传的教育理论,主要是从西方引进的。历史上我们曾经因为盲目排外,吃过很多亏,同样的也曾经因为盲目崇洋,吃过很多亏。而对我国本土的经验、思想,向来缺少研究,而且认为这不是理论。算法化,就是我国本土的数学思想,也是我国本土的数学教育思想。

吴文俊院士研究了我国古代数学之后指出,我国古代数学建立了以构造性和机械化为其特色的算法体系。并且认为,由于计算机的出现,已越来越为数学家所认识与重视,势必将重新登上历史舞台。张莫宙教授认为,“这是一个前所未有的创新的论断,具有鲜明的中国特色,又体现了时代精神,它打开了我们数学教育的视野,开始认识到算法在数学课程中的重要地位。”^①

张莫宙教授从“航天员不断翻阅指令手册”这一细节发表感想,他在一篇短文中说,“数学中有大量的约定性知识……数学教学要求学生按照规定操作,一步步地解题,好像遵循一些指令,是一种基本能力。现在,强调数学教学不能死记硬背,需要知道一些数学知识的发生发展过程是必要的,但不能过头……事实上,学会遵守约定是人生的大部分。创新精神人人都要,但是创新只能是个个人生涯中的小部分。”^②

具体到解题这个层面,项武义教授主张通性通法,主张教学生“大巧”,少讲只适用于一题或几个题的“小法”。张景中院士说:“练武功的上乘境界是‘无招胜有招’。但武功仍要从一招一式入门。解题也是如此。”他又说:“这种‘无招胜有招’的境界,就是‘大巧’吧!但是小巧固然不足取,大巧也确实太难,对于大多数学子,还要重视有章可循的招式……大巧法无定法,小巧一题一法。中巧呢,则希望用一个方法解出一类题目。也就是说,把数学问题分门别类,一类一类地寻求可以机械执行的方法,即算法。”并说,这是我国古代数学的特点和优秀传统。^③笔者把这一观点称之为“中巧说”。

① 张莫宙,方均斌.研究吴文俊先生的数学教育思想[J].数学教育学报,2009(4).

② 张莫宙,赵小平.遵守约定和自主创新[J].数学教学,2009(3).

③ 张景中.几何新方法和新体系[M].北京:科学出版社,2009.

“中巧”和“大巧”是不矛盾的,至少可以说:如果处理得好,“中巧”和“大巧”是不矛盾的.首先,基础打得牢,对日后的创造是有益的.其次,我们提出解题经验显性化、算法化,也不排斥别的数学教学方法,不排斥外国的重视发现、创造的做法,不排斥开放题、课题学习,也不排斥数学优秀生范围内的数学竞赛等等.如果正确理解并运用“中巧说”,利用算法,又能够突破框框,就不会阻碍“大巧”的发展.我们的想法是:扬弃小巧,落实中巧,追求大巧.不过笔者在想,可能不是每个人都能够掌握“大巧”的.因此,“中巧说”具有重要的教育价值.

我们学习了张景中院士的上述论述,特别在他的“中巧说”的影响下,我们提出了“把隐性的解题经验显性化,算法化”的观点,并具体推荐两个重要的优良的数学认知结构:解题模块和命题联想系统.

顾冷沅教授说,要“寻找中间地带”.我们应该在引进吸收国外的教育思想的同时,认真研究我国本土的理论.或许,本书带有一点中国特色.

我们的“把隐性的解题经验显性化,算法化”的观点和两个具体的数学认知结构,能不能站得住脚?在这里我们抛砖引玉,希望得到专家学者和广大教师的指教.

本书分为四章.

第一章实际上是绪论.我们认为题海战术的原因是多方面的,但我们教师不是完全无能为力的,还是可以有所作为的.我们的观点是“有作为论”.要改变题海战术,就应该科学地进行解题训练,作为科学训练的方法之一,提出“要把隐性的解题经验显性化,算法化”.并且,我们具体推荐两个重要的优良的数学认知结构:解题模块和命题联想系统.

第二章是在“中观”层面上讨论的.在这部分里讨论怎样上和数学习题相关的课,如新授课里的例题、习题教学,习题课的教学,复习课里的例题、习题教学,作业,测验,试卷讲评等.我们重点总结了优秀数学教师的几条关于数学习题教学的重要经验,把它归结为典型原则,层次原则,“归一”原则,“有序分析”原则(第三章中提及).我们不认为这四个原则是完备的,但是有针对性的,对当前数学习题教学应该是有指导意义的.

新授课、习题课、复习课等这些“课型”,只是大致的划分,并没有绝对的标准.因此,在本书里,在习题课里的相关章节里论述的原则和方法,如选择例题的典型性,安排习题的层次性,在其他课型,如复习课里也适用;在复习课有关章节里讨论的,同样在其他课型里也适用.

第三章是在微观层面上讨论的,即具体给学生讲解数学题时,该怎么教.例如,怎样教审题,怎样教思路分析,怎样教书写,怎样教检验,怎样教回顾总结等.这里难免会涉及“怎样解题”,但是重点还是在“怎样教解题”.这几个环节中,思路分析无疑是最重要

的,我们提出了几点看法(包括了“有序分析”原则:6个步骤和策略);我们也突出了反思这个步骤,这是很多师生不怎么重视的,也不怎么擅长的;同时,对令人头痛的“会而不对,对而不全”问题,也给予一定的关注。

第四章是在较宏观层面上讨论的,讨论在习题教学中,学校教研组应该起什么作用。因为教育是个系统工程,光是某几位教师善于教学,是没有用的。所以,第四章是讨论学校教研组怎么统筹全校的习题,测验,特别在当前青年教师已经成为主力的情况下,可能更有其现实意义。

本书是合作的产物,由陈永明(上海市徐汇区教师进修学院)策划和统稿,一批优秀的中青年教师分头执笔完成。执笔情况如下:

前言和第一章,陈永明;第二章第一节,张珺(上海市南洋模范中学);第二章第二节,李瑾(上海市南洋中学)和徐卫文(上海市第四中学);第二章第三节,陈永明;第二章第四、五节,陶焯昕(上海市位育中学);第二章第六节,阮夏丽(上海市西南位育中学);第三章第一节,傅琳(上海市梅园中学);第三章第二节,陈飞(上海市西南模范中学);第三章第三节,张荣(上海市中国中学);第三章第四节,陶焯昕;第四章,李瑾。

笔者不认为,我们提出的观点和方法是唯一正确的观点和方法,是最正确的观点和最好的方法,我们仅仅是从某一个角度思考数学习题教学,而且我们认为,由于我们才疏学浅,本书定有不少疏漏和错误,敬请专家学者和广大教师指正。

陈永明名师工作室

2010年1月

序

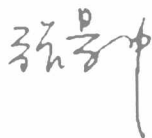
上海教育出版社成立五十多年以来,出版了多套有较大影响的数学丛书,对数学的推广普及发挥了很大的作用.我印象较深并参与撰稿的,有“初等数学论丛”和“中学生文库”.这些书的作者中,有数学家,也有大学和中学的数学教师;其读者群也很广泛,既有中学生和大学生,也有青年教师和从事其他工作的数学爱好者.

现在,上海教育出版社推出“新青年教师文库”,这是一件大好事.

对于很多青年教师而言,发表文章不易,出版专著更难.这不仅与青年教师们本身的学术水平有关,也受出版社在经济效益方面的压力的影响.近些年,由于各种原因,数学教育和数学科普书籍的销量不见起色,许多出版社不得不慎重考虑此类图书的出版.在这种形势下毅然决定出版“新青年教师文库”,从侧面体现了上海教育出版社继承了一贯的传统,对教育事业有着强烈的责任感和使命感.

解题是学习数学的重要组成部分.武学中有一种境界,叫作“无招胜有招”,领悟之后,就能以不变应万变.学习解题能否做到如此呢?恐怕这种“大巧”还是要靠个人领悟,难以言传;但如果不讲方法,搞题海战术,一题一法,这种“小巧”也不可取.对于数学教学而言,还是要讲求循序渐进,学习有章可循的解题通法.

“新青年教师文库”的新成员《数学习题教学研究》,是上海的陈永明教授与一批青年教师共同完成的.该书立足“习题教学”视角,重在谈教师如何教解题,而非单纯地罗列题目和解答.书中提出了一些观点,譬如“要把隐性的解题经验显性化、算法化”,“算法化的两个重要途径:解题模块和命题联想系统”,“习题教学的四个原则:典型原则、层次原则、有序分析原则和归一原则”等,都是作者们的研究心得,有一定的参考价值.至于是否普遍适用,还需进一步实践检验.



2010年4月

Contents | 目 录

前言	/ I
第一章 数学习题教学的现状和思考	001
第一节 中国特色的数学习题教学的五个流派	/ 002
第二节 改变题海战术——当前数学习题教学的严峻课题	/ 010
第三节 科学进行解题基本训练的两点看法	/ 015
第二章 解题经验的显性化、算法化	023
第一节 解题模块	/ 024
第二节 命题联想系统	/ 030
第三章 各教学环节中的习题教学研究	043
第一节 数学新授课环节	/ 044
第二节 数学习题课环节	/ 052
第三节 数学复习课环节	/ 068
第四节 数学作业环节	/ 088
第五节 数学测验(考试)环节	/ 100
第六节 数学试卷讲评课环节	/ 114

第四章 数学解题教学研究	125
第一节 审题的教学研究	/ 126
第二节 寻找解题思路的教学研究	/ 135
第三节 书写解答过程的教学研究	/ 153
第四节 开放题教学研究	/ 163
第五节 解题反思的教学研究	/ 177
第五章 习题的校本整合	187
第一节 习题校本整合的提出	/ 188
第二节 习题校本整合的内容	/ 188
参考文献	/ 198
再版后记	/ 199

第一章

数学习题教学 的现状和思考

第一节 中国特色的数学习题教学的五个流派

第二节 改变题海战术——当前数学习题教
学的严峻课题

第三节 科学进行解题基本训练的两点看法

我国是习题王国,在国际奥林匹克数学竞赛一直名列前茅,在大型国际测试中数学成绩遥遥领先,这是巨大的成绩.取得这样的成绩,首先是优秀的数学教师队伍的支撑,根据马立平博士的研究,我国数学教师的水平远高于美国;其次是我国的优秀传统,如熟能生巧的理念,双基的实施等等.本章先介绍数学习题教学的五个流派,这集中反映了我国数学习题教学中优秀的传统、理念和做法.当然,数学习题教学也存在着严重的问题,那就是题海战术盛行,本章对此也进行了评说.

第一节 中国特色的数学习题教学的五个流派

波利亚的著作,尤其是《怎样解题》,对我国的数学教学触动很大,激起了我国学者和教师深入地研究数学教学,特别是数学解题教学.但是,对于他的著作,国内似乎也不是满堂掌声的.

张莫宙教授说:波利亚是著名数学家,他在合情推理方面的论述似乎更受人注意.国外有报道说,学生无法根据这张解题表去解决问题,国内似乎也没有人声称按这张表解题.^①

单墀教授认为波利亚的解题表“并没有什么出奇的地方,解题时,自觉不自觉地大多有这样四个步骤.”“这张表并不是一把万能的钥匙,更不是解题的纲领,它只是一串提示,也许会给解题者一点启发,但问题的解决还必须依靠解题者自己的努力.”“没有必要去背这张表,可以根据实际情况问自己几个为什么,或给别人一些提示.”^②

王梓坤院士评价了波利亚的著作之后,更对我国的教师和学者提出了要求:“他(波利亚)熟悉的是西方的教育,对中国的教育,中国人的思维的特点并不大了解,因此,我们更需要切合我国实际的相应著作.”^③

“20世纪90年代开始,华人的数学学习引起了世人的关注.国际数学测试一再证明华人地区学生的数学成绩十分优秀,但是另一方面,华人的数学学习给人的印象是,停留在记忆、模仿、练习、考试等等缺乏主动性的学习层面.”^④这就是所谓的“中国学习者悖论”.为了回答这个“悖论”,中国学者深入进行了研究,最终写成了《华人如何学习数学》一书.我们中国的数学学习有自己的特点,首先是注重学习效率;同时还重视双基:华人学生有良好的记忆(九九表,公式法则的背诵),熟练的运算速度,逻辑的严谨表达以及“变式”的重复练习.这是符合“熟能生巧”的古训的,由此形成了中国数学教学的特

① 张莫宙.关于数学问题解决的谈话[J].数学教学,2008(3).

② 单墀.解题研究[M].南京:南京师范大学出版社,2002.

③ 转引自罗增儒,数学的领域[M].郑州:河南科技出版社,2009.

④ 范良火等,华人如何学习数学[M].南京:江苏教育出版社,2005.

色.这些,是值得我们自豪的.

解题教学是数学教学中的一个重要组成部分,在中国数学习题教学必然打上以上的烙印.

我国的数学教师是富有创造力的群体,在具体地落实双基时,积累了解题教学的许多经验,在学习消化波利亚的著作之后,形成丰富多彩的若干流派.笔者认为,有以下五个主要流派.

一、中巧说

张景中院士说:“练武功的上乘境界是‘无招胜有招’.但武功仍要从一招一式入门.解题也是如此.”“这种‘无招胜有招’的境界,就是‘大巧’吧!但是小巧果然不足取,大巧也确实太难,对于大多数学子,还要重视有章可循的招式……”“大巧法无定法,小巧一题一法.中巧呢,则希望用一个方法解出一类题目.也就是说,把数学问题分门别类,一类一类地寻求可以机械执行的方法,即算法.”“这是我国古代数学的特点,和优秀传统.”^①

张院士在本书的序中提到:“恐怕这种‘大巧’还是要靠个人领悟,难以言传;但如果不讲方法,搞题海战术,一题一法,这种‘小巧’也不可取,对于数学教学而言,还是要讲求循序渐进,学习有章可循的解题通法.”

我们把张院士的这个观点称之为“中巧说”.这是张院士提出的教育数学思想的一个组成部分,有着重要的理论意义和实用价值.

我们体会,中巧说的核心是有章可循,关键是反思、总结、提炼.在中学数学里,大概应该体现在两个方面,一是有固定程式的题,如解一元一次方程;二是没有固定程式的,如几何证明题.对于前者,应该提炼出有效的算法,一步一步按部就班即可;对于后者,我们也应该总结出一些规律,若干个方法,指出先思考什么,再用哪种方法,使之有方向可探,让解题经验显性化.

张院士当过初中数学教师,他的这些话,既体现了科学家的智慧,也凝聚了数学教师的经验.张院士研究方向主要是几何的计算机证明,他创造了“张法”,使任何几何题都可以用计算机加以证明,而且这个证明过程是可读的.应该说,张院士就是运用了我国数学研究的传统——算法思想,把人们通常认为千变万化的,无法程序化的,必须绞尽脑汁才能证出来的几何题,归纳为一套按部就班的可操作的方法,成为算法的一个典范.

中巧说实际上也是许多优秀教师教学经验的结晶,他们都反对题海战术,主张总结规律,用规律来指导学生解题.

上海老一辈的数学教育家赵宪初说:“先要举三反一,才能举一反三.”赵老说的

^① 张景中.几何新方法和新体系[M].北京:科学出版社,2009.

“一”，应该就是指规律。要知道，赵老执教的是上海的名校——南洋模范中学，这个学校的毕业生中有 30 多名院士，著名的计算机专家王选院士和数学家张恭庆院士就是其中的两位。这个学校的学生水平都是了不得的，对这样的学生，教师尚且要先“举一反三”，帮助他们总结出规律来，然后才能“举一反三”，更何况一般的学校呢？所以总结规律是很重要的。

北京的名师孙维刚提出：“一题多解，多解归一，多题归一”，也有总结的意思在其中。

福建的名师任勇更是直接，他认为：“概括各类问题的解法是一种重要的数学记忆模式。”^①

中巧说对于数学习题教学来说，是有效的。

1. 中巧说体现了数学模式观和算法思想

现在，一般认为，数学是研究模式和秩序的科学。我国学者徐利治和郑毓信提出“数学即是模式的建构和研究”，并撰写了《数学模式论》（广西教育出版社，1993 年）。整个数学的历史就是提出问题、形成模式、研究模式、应用模式，最后突破模式，并创造新模式的历史。

欧几里得把几何归结为一个公理化的体系，笛卡儿从代数化的角度突破了这个模式，形成了解析几何新体系，罗巴切夫斯基从公理的角度，突破了欧几里得几何，创立了非欧几何的体系。

数学家如此地重视模式，以至到 20 世纪中叶，法国有一批数学家，用布尔巴基的名字出版了一系列的著作，取名为《数学原本》，企图找到整个数学究竟是什么样的结构、体系和模式。尽管他们的期望最终没有达到，但他们的成果对认识数学是十分有益的。

另外，吴文俊院士认为，世界数学发展的源流有两个，一个是西方的公理化；另一个是东方的算法。而中巧说就是对某个类型的题的解法总结成算法，并形成模式，因此是符合学习、研究数学的规律的。

2. 中巧说符合认识规律

心理学家对迁移有多种观点，有一种观点叫“相同要素论”，即新问题与原有知识之间有“相同要素”，可以迁移；还有一种是美国心理学家贾德的概括化理论：概括出一般原理容易迁移。这两种理论都有道理。

数学是理性的科学。对数学，概括化理论可能更有效，更值得推荐，特别是在当前。我们要从杂乱无章的习题中，概括出一般原理来，对克服题海战术肯定是有有效的。

3. 中巧说符合基础教育的目标

我国已经普及九年义务教育，在发达的地区，基本上普及了高中教育。对大多数的学校来说，主要是培养有文化的普通劳动者。

^① 任勇. 数学学习指导与教学艺术[M]. 北京: 人民教育出版社, 2004.

人的智力分布呈正态分布,即聪明的和愚笨的占少数,中间状态的占绝大多数,不能期望人人都掌握大巧,正如张院士说的那样:“大巧”还是要靠个人领悟,难以言传。

张景中院士在论述中巧说时,很谨慎地用了“对大多数学子”这一词语:“对大多数学子来说,还要重视有章可循的招式。”这正体现了基础教育数学教学的目标。

4. 中巧说是克服题海战术的良药

不可否认的,现在中学界,大多数学校奉行的仍是题海战术。题海战术就是企图让学生做遍所有的题目来应付考试,其产生的负面影响可想而知。而如果采用中巧,把数学问题分门别类,一类一类地寻求可以机械执行的方法,并把这种方法教给学生,效果肯定是好的。戴再平教授认为:模式识别是解数学题时广泛采用的策略。^①不少学者还认为是首选。

二、反应块思想

华南师范大学傅学顺教授提出的一系列观点中,“反应块思想”很有特色。

1962年,傅学顺毕业于北京师范大学。恰逢波利亚的著作传到中国,并引起了华罗庚等学者的重视,学者们觉得要跟踪波利亚,要像波利亚一样研究数学学习的规律和解题的方法。于是,由中科院数学研究所副所长,学部委员(也就是后来称的院士)关肇直出面招收一名数学教育方向的研究生,这名研究生就是傅学顺。傅学顺既受到华罗庚、关肇直等学者的培养,也得到钱学森的指点;既研究波利亚这样的国外学说,也研究总结像我国的原北师大副校长傅种孙先生这样的前辈数学教育家的经验,因此他提出的观点可能和部分一流学者的学习经验有关。

傅学顺认为:“优秀生脑海里不仅储存有定理及其证明,而且储存有另外的许多基本问题及其解法。一拿到数学问题,通过联想(或其他思维方法诱发),可以迅速认出问题中包含的一个个基本问题(称为反应块),从而把难题分解,迅速降低难度。”^②

反应块思想实际上也是许多优秀教师经验的总结。20世纪八九十年代,上海的徐方瞿老师提出了“基本图形分析法”;上海南洋模范中学的江志英老师在教平面几何时,十分重视从已知条件里能够伸展出什么结论来;还有许多教师,强调学生要记住 11^2 , 12^2 , 13^2 , ..., 19^2 的值,等等,应该说都是强调积累,记住定理公式的一些推论,记住基本图形的性质,记住一些典型例题,记住一些数据,便于在解题时迅速调用。

由于脑子里有不少反应块,学生在调用时,会产生“一看到……就想到……”的反应。傅先生说:脑子里的反应块多了,反应就“快”了。

反应块思想对于数学解题是有效的。

1. 反应块思想符合认知规律

反应块思想符合心理学原理中的“相同要素论”理论。

① 戴再平.数学习题理论[M].上海:上海教育出版社,1997.

② 傅学顺,王屏山.数学思维方法[M].广州:广东高教出版社,1995.

对于语文,一般是通过学习一篇篇的范文,从中体会写作的道理,从而学习写作,这大概就是“相同要素论”在起作用。

“相同要素论”,不但有助于语文学习,而且在数学学习中,也有一定的作用。我们常常在解题时遇到这样的情况:这道题和以前做过的某道题有类似的地方,这就是在寻找“相同要素”,于是就把解原来那道题的方法、经验迁移过来。“相同要素论”是从具体到具体的迁移。著名数学家陈省身说过:“一个好的数学家与一个蹩脚的数学家差别在于前者有很多具体的例子,后者只有抽象的理论。”“例子”可以使概念法则具体化,也可以促进迁移。

但是这些例子应该是范例,少而精,才能记得住,才容易迁移。可惜,现在不少数学教师是布置大量的练习,并对学生说“我都给你们做过了,再考不出,不是我的事情了”,这种做法是把“相同要素论”异化了。试想,头脑里充满了杂乱无章的例子,你叫他怎么搜索到所需要的例子?搜索不到所需要的例子,怎么迁移?

2. 反应块思想强调积累

反应块思想强调要把公式的一些推论、典型例题、基本图形性质记在脑子里,有用的东西积累多了,遇到新问题,就可以进行联想,这样就有利于解题。这些公式的一些推论、典型例题、基本图形性质,从心理学上说,是一种“图式”,专家和新手的差别之一,就是头脑里储存的图式的多寡和质量。据说国际象棋冠军头脑里储存了几万个棋局,所以他能够面对复杂局面迅速作出反应。

学数学要不要记忆?历来有不同的看法。

华罗庚的学习经验是:聪明在于勤奋,天才在于积累。张奠宙教授在《中国数学双基教学》一书中提出中国数学双基四大特征:记忆通向理解形成直觉,运算速度保证高效思维,演绎推理坚持逻辑精确,依靠变式提升演练水准,明确指出记忆在数学学习中的重要性。

西方强调整理解,甚至认为不理解的记忆,3个月一定忘记。而我国古代传统认为记忆和理解相辅相成的。在理解基础上记忆,效果的确好。然而,对于一时不怎么理解,可以先记住了,并在运用中慢慢加深理解,也是一种有效的学习方法。人生识字糊涂始,就是这个意思。如,九九表,有多少孩子能够理解它的意思?先记住了再说,以后慢慢地理解它。当然,在中学阶段,主要是理解基础上的记忆。反应块思想认为,不但要记住一些公式,还要记住它的一些推论,需要记住基本图形的性质,需要记住典型例题,记住小经验,以便在需要时可以迅速调用,这对解题肯定是有益的,并且使用的过程又可以加深对公式、推论的理解。当然,学数学不能光靠记忆。据说有个有关爱因斯坦的故事:有人问爱因斯坦一个数据,他回答说,“我不知道,可以查手册。”他的头脑里只记有用的东西,能够让计算机做的,能够在手册上查到的,就没有必要记住。但是我们认为这个故事,与反应块思想的积累并不矛盾。

3. 反应块思想反映优秀生思维的一个侧面

数学优秀生的思维有好多特征,联想能力强是其中的一个重要特征。而联想是要有

基础的.傅学顺教授说:“优秀生从不就事论事,决不放过解题过程中的任何‘副产品’:或把这题升华为定理形式……或寻找顺便解决了的命题、公式和数据;或寻找尔后有用的思维方法;或‘减弱’假设,或‘加强’结论,看能否得到更‘精’的命题;或探讨逆命题的真假……优秀生解一道题往往可以引出几道新题,解决了就一并存入脑海,使知识体系不断膨胀,使思路向各方延伸,使自己善于识别改头换面的问题.”^①就是说,优秀生的起点高,联想时思路宽.与之相对的是,“后进生往往是‘从0开始’”.

三、变式训练

顾泠沅主持的青浦实验,最早提出了数学变式教学的概念.变式教学,就是变更概念中的非本质属性:变换条件和结论,转换问题的形式或内容,配置实际应用的环境或使问题背景复杂化,而概念或问题的本质不变.在数学习题教学中,又常常称为变式练习.

张奠宙教授说,变式练习是中国数学教育的一个创造.通过变式练习,教师为学生的思维发展提供了一个个阶梯,重复但不呆板.有利于学生构建完整、合理的新知识.每一个变式,具有创新的意味,但是又能夯实基础,实现“在坚实的基础上有所发展”的教学理念.

1. 变式训练符合心理学原理

我们主张科学训练,那种过度的反复操作使人厌烦.张奠宙教授说,依靠变式可以提升演练水准,原因之一是因为变化的东西能让人有新鲜感,这是符合心理学原理的.

人们对数学问题的认识是一个由浅入深、由易到难的循序渐进的过程,习题的变式一般以阶梯型呈现,即习题的设计由浅入深、由易到难、由简到繁、由模仿到开放,层层推进,逐步展开.变式训练的这种循序渐进的做法,当然也是符合认知规律的.

2. 变式训练有利于形成优良的认知结构

因为变式是保留问题的本质部分,变化非本质部分,更改问题的情境或改变思维的角度,让学生可以体会到,不管怎样变化,原来万变不离其宗.所以变式训练有利于对问题本质的理解.

通过变式可以生成一组题,实现有机串联,既能覆盖某个知识技能的诸多方面,又有助于理解本质和关键.解决了这样一组题,学生往往会有感而发,“这类问题我都不怕了”,从而形成优良认知结构,如解题模块、命题联想系统等.

3. 变式训练可以提高课堂教学的效率

为了提高课堂的容量以及效率,我们可以编制一两道习题,通过对习题的变式,或加一条线,或改变一个数据,深层次挖掘,由“一题多变”,达到“一题多用”的效果.由于题目形式上变动不大,抄题画图的时候就可以省下来了,学生顺次思考,马上可以读懂

^① 傅学顺,王屏山.数学思维方法[M].广州:广东高等教育出版社,1995.