普通高等教育精品教材

CFD 基础及应用

主 编 /刘 方 翁庙成 龙天渝
主 审 /何 川

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

普通高等教育精品教材

CFD
基础及应用

主　编 /刘　方　翁庙成　龙天渝
主　审 /何　川

重庆大学出版社

内容提要

本书以矢量场论和二阶张量为基础知识，系统介绍了流体力学的基本原理、控制方程、湍流数学模型以及计算流体动力学(CFD)基础理论等内容，并结合 FLUENT 软件介绍了 CFD 的应用。全书共分为 7 章，第 1 章介绍矢量场论的基本理论概念及二阶张量；第 2 章介绍流体基本方程以及典型的数学解；第 3 章介绍湍流及其数学模型；第 4 ~6 章介绍 CFD 的基础理论；第 7 章结合 ICEM 与 FLUENT 软件介绍 CFD 的应用和实例。

本书适合计算流体力学的初学者，可作为供热供燃气通风及空调工程、市政工程、环境科学与工程、土木工程、热能动力工程、流体工程专业领域研究生和高年级本科生教材，也可供相关领域科研、工程技术人员与从事 CFD 应用的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

CFD 基础及应用/刘方，翁庙成，龙天渝主编. —重庆：重庆大学出版社，2015.11
普通高等教育精品教材
ISBN 978-7-5624-9495-9

Ⅰ.①C… Ⅱ.①刘…②翁…③龙… Ⅲ.①计算流体力学—高等学校—教材 Ⅳ.①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 240170 号

CFD 基础及应用

主　编　刘　方　翁庙成　龙天渝
策划编辑：张　婷
责任编辑：陈　力　　版式设计：张　婷
责任校对：谢　芳　　责任印制：赵　晟

*

重庆大学出版社出版发行
出版人：易树平
社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号
邮编：401331
电话：(023) 88617190　88617185(中小学)
传真：(023) 88617186　88617166
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)
全国新华书店经销
重庆学林建达印务有限公司印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：12.5　字数：304 千
2015 年 11 月第 1 版　2015 年 11 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5624-9495-9　定价：35.00 元

前 言

自流体力学成为独立学科以来，经过近三个世纪的发展与充实，已形成了较为完整的理论体系，包括实验流体力学、理论流体力学与计算流体动力学。计算流体动力学（Computational Fluid Dynamics，简称 CFD）是建立在经典流体动力学与数值计算基础上的一门边缘科学，CFD 软件已成为解决各种流体流动与传热问题的强有力工具，且成功应用于建筑相关领域。然而，CFD 学习依赖于流体流动基础知识与较强的数理基础，对初学者有一定的难度。本书力求用通俗的语言解释 CFD 理论与应用中基础、本质的内容。采用直角坐标参考系，以矢量场论和二阶张量为基础知识，系统介绍了流体力学的基本原理、控制方程、湍流数学模型以及 CFD 涉及的数值分析基础理论等内容，并结合建模软件 ICEM 与计算软件 FLUENT 介绍了 CFD 的应用。

编者在近几年为研究生讲授"高等流体力学"课程的基础上，精心收集和整理、筛选了 CFD 的核心内容以及 CFD 软件的基本用法，经过补充提炼而完成了本书。全书力求体现实用性，内容组织循序渐进、语言表达通俗易懂，可指导初学者掌握流体力学数值计算的基础理论，正确理解和应用 CFD 软件中的数值计算方法，借助 CFD 软件解决相关专业领域流体的流动与传热问题。本书保留了重庆大学研究生课程"高等流体力学"的基础理论部分。

全书共分 7 章。第 1 章张量，介绍矢量场论和二阶张量的基础知识；第 2 章流体流动的基本概念与基本方程，从物理学定律导出流体流动与传热的基本方程，简要介绍采用直接积分方法的层流流动解析解；第 3 章湍流及其数学模型，介绍了湍流的特征及常用的湍流模型，引入了大涡模拟的亚格子尺度模型；第 4 章导热问题的数值解，着重介绍了基于有限容积法的偏微分方程的离散及求解；第 5 章对流-扩散方程的离散，介绍常用的对流项的离散格式；第 6 章流场的计算，介绍流场的 SIMPLE 算法；第 7 章 CFD 应用分析，介绍 ICEM 和 FLUENT 软件及其应用实例。

第 1、2 章由重庆大学龙天渝、何川编写，第 4 ~ 6 章由重庆大学刘方编写，第 3 ~ 7 章由重庆大学翁庙成编写。全书由刘方统稿，何川主审。

在本书的撰写过程中，得到了重庆大学城市建设与环境工程学院供热、供燃气、通风及空调工程专业研究生赵胜中、卢欣玲、黄仁武、杜城显、林昊宇、龚达、王萌、刘腾飞、刘永强、闫晓俊、余龙星、文灵红等的帮助，在此向他们表示感谢。

本书的出版得益于重庆大学研究生重点课程"高等流体力学"（2010 年）和重庆市研究生优质课程"高等流体力学"（2011 年）。本书在出版过程中得到了重庆大学出版社的支持和帮助。

参考文献只列出主要参考书目，尚有一些未能一一列出，在此一并致谢。

书中存在的疏漏与不当之处，敬请广大读者批评指正。

编　者
2015 年 7 月

目 录

1 张　量

1.1　矢量场论的若干概念

物理及力学中需要用到许多物理量,这些量依照其不同的性质可以分为标量、矢量和张量。

1.1.1　标量

具有大小而没有方向、只用一个分量就能完整表述且与坐标选取无关的物理量,称为标量。如流体的温度、密度等属于标量。

假若标量与坐标系的选择无关,则称为绝对标量或不变量。例如,任何实数、质量、密度、长度、时间、温度和力做的功、能量等。

在以后的学习中,涉及诸如张量一类的标量,都指绝对标量。在研究张量的解析性质时,还将遇到与坐标系选择有关的标量。

1.1.2　矢量

既有大小又有确定的方向,在任意选取的正交坐标系中最多需要用 3 个分量才能完整表述的物理量,称为矢量。矢量用黑体小写英文字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,…,$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,…表示。作图时用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示,如图 1.1 所示。有向线段的长度表示矢量大小或模。矢量的大小(模)记为:

$$|\boldsymbol{a}| = a \tag{1.1}$$

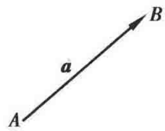

图 1.1

固结于空间某一点(作用点)的矢量称为固定矢量;沿着某一直线但没有一定作用点的矢量称为滑动矢量;既无一定作用线又无一定作用点的矢量称为自由矢量。

应当指出的是,不是具有数值与方向的物理量都能作为矢量,矢量还应具有由矢量代数运算规则(见 1.2 节)所确定的特性。

当代表两矢量的线段是平行的,则称两矢量为平行矢量或共线矢量。当两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 具有相等的模,共线且同向时,则称两矢量相等,如图 1.2 所示,记为:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{1.2}$$

当两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 模相等,共线、方向相反时,如图 1.3 所示,记为:

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} \tag{1.3}$$

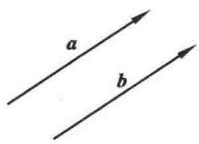

图 1.2

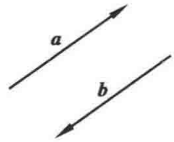

图 1.3

1.1.3 矢量的投影与分量

矢量 $\boldsymbol{v}$ 用有向线段$\overrightarrow{OP}$表示，如图 1.4 所示，过矢量始端 O 建立坐标系 $O\eta\zeta$。过矢量末端 P 分别向坐标轴作垂线，得矢量 $\boldsymbol{v}$ 在两坐标轴 $O\eta$，$O\zeta$ 上的投影 OM，ON，分别记为 v_1，v_2。过点 P 分别作两坐标轴的平行线，得矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿两坐标轴 $O\eta$，$O\zeta$ 的分量$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$，记为 $\boldsymbol{v}^1$，$\boldsymbol{v}^2$。由图 1.5 可知 $OQ = RP$，$OR = QP$。若两坐标轴之间的夹角为 θ，则：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2\cos\theta \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{v}^1\cos\theta + \boldsymbol{v}^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

和

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}^1 &= \boldsymbol{v}_1\csc^2\theta - \boldsymbol{v}_2\csc\theta\cot\theta \\ \boldsymbol{v}^2 &= -\boldsymbol{v}_1\csc\theta\cot\theta + \boldsymbol{v}_2\csc^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

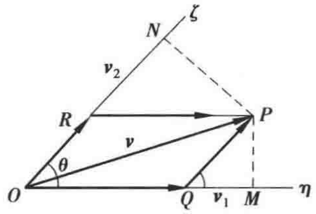

图 1.4

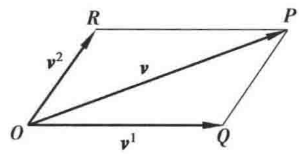

图 1.5

1.2 矢量的加法

1.2.1 矢量加法的平行四边形法则

用有向线段$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$分别表示矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，以$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$为邻边所构成的平行四边形的对角线$\overrightarrow{OP}$，即为矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的合矢量 $\boldsymbol{v}$，记为：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{1.6}$$

这就是矢量加法的平行四边形法则。一切矢量应该遵守矢量加法法则。矢量加法法则确定了矢量的第三个必要性。因此，能用直线表示的，且遵守平行四边形加法运算法则的物理量或几何量称为矢量。

矢量减法是矢量加法的逆运算。式(1.6)可改写成：

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{b} \tag{1.7}$$

或

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{b}) \tag{1.8}$$

容易证明矢量加法满足交换律和结合律,即:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \tag{1.10}$$

1.2.2 单位矢量

模为 1 的矢量称为单位矢量。模 $a \neq 0$ 的矢量 $\boldsymbol{a}$,沿 a 方向的单位矢量记为:

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} \tag{1.11}$$

任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为与 a 同方向的单位矢量$\hat{\boldsymbol{a}}$和 $\boldsymbol{a}$ 的模 a 的乘积,即:

$$\boldsymbol{a} = a\hat{\boldsymbol{a}} \tag{1.12}$$

在三维欧几里得空间里,沿直角坐标轴 x, y, z 的单位矢量用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 表示。

1.2.3 矢量沿直角坐标轴的分量

在三维欧几里得空间里,任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为沿正交的三个坐标轴 x, y, z 的分矢量 $a_1\boldsymbol{i}, a_2\boldsymbol{j}, a_3\boldsymbol{k}$ 的矢量和,如图 1.6 所示,即,

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \tag{1.13}$$

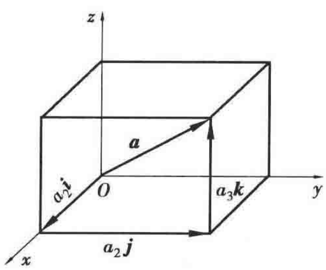

图 1.6

$\boldsymbol{a}$ 的模是:

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

1.3 矢量的标量积

1) 矢量与标量的乘积

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与标量 m 的乘积是矢量 $m\boldsymbol{a}$,这个矢量的模是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 m 倍,方位与 $\boldsymbol{a}$ 相同;指向由 m 的正、负号确定,为正时,$m\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 指向相同,否则相反。若 $m=0$,则 $m\boldsymbol{a}$ 为零矢量。

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是矢量,m 和 n 是标量,则:

$$\left.\begin{aligned} m\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}m \\ m(n\boldsymbol{a}) &= (mn)\boldsymbol{a} \\ (m+n)\boldsymbol{a} &= m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{a} \\ m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

2) 矢量与矢量的标量积

空间某一轴的方向由该轴的单位矢量确定。以 $\boldsymbol{e}$ 表示 x 轴的单位矢量,以 a_x 表示矢量 $\boldsymbol{a}$

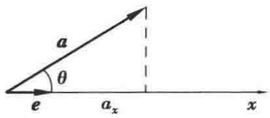

图 1.7

在 x 轴方向的投影,并称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 的标量积(又称点积),如图 1.7 所示。其表达式为:

$$a_x = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e} = |\boldsymbol{a}| \cos\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1.15}$$

式中　$\cos\theta$——矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 的正方向夹角的余弦。

同样可确定矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的标量积。考虑矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影 a_b,可得:

$$a_b = \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{b} = a \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

由此得到:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_b b = b_a a \tag{1.16}$$

在三维空间里,正交坐标轴单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的标量积为:

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \tag{1.18}$$

将矢量表示为沿坐标轴的分矢量的矢量和,即 $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$,则有:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{1.19}$$

还有:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = (a)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \tag{1.20}$$

若 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$,且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都不是零矢量,则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 互相垂直。

容易证明,标量积满足交换律和分配率,即:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \tag{1.22}$$

还有:

$$m \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (m\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})m \tag{1.23}$$

1.4 矢量的矢量积

两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积(简称矢积,又称叉积)是一矢量 $\boldsymbol{c}$。$\boldsymbol{c}$ 的模是 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的模与两矢量夹角正弦 $\sin\theta$ 的乘积,$\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平面,且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 构成右手系(图 1.8)表示为:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{1.24}$$

$$|\boldsymbol{c}| = ab \sin\theta \tag{1.25}$$

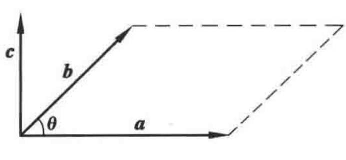

图 1.8

由图 1.9 很容易看出,交换律对矢量的矢量积是不成立的,且:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{1.26}$$

若 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$,或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$,因为 $\sin\theta = 0$,所以 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$。

由定义容易证明,笛卡尔直角坐标系单位矢量的矢积有如下关系:

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0 \tag{1.27}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} &= -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} &= -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} &= -\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

利用这些关系,可以求得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \times (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.29}$$

可以证明,分配律对矢量的矢积是成立的,即:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \tag{1.30}$$

设 m 是标量,有:

$$m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (m\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})m \tag{1.31}$$

1.5 场 论

若在空间某区域 D 上定义了一个连续函数,则称该函数在 D 上形成了一个场。如果该函数是描述空间的几何位置,就称该函数定义了一个几何场;如流体占据着某个空间流道,就称该流道为流场。如果该函数是在 D 上连续分布的某物理量,就称该函数定义了一个物理场。如流体的温度形成温度场,压力形成压力场,速度形成速度场,应力形成应力场。

如果定义的场函数不随时间 t 变化,则称该场为恒定场,否则,为非恒定场。在给定时刻研究非恒定场的性能时,一般应将时间作为参量对待。

若在空间区域 D 上定义的是标量函数 $\phi(t,x,y,z)$,则称函数 ϕ 在 D 上形成了一个标量场,如前面提到的温度场和压力场;若在空间区域 D 上定义的是矢量函数 $\boldsymbol{A}(t,x,y,z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$,则称函数 $\boldsymbol{a}$ 在 D 上构成了一个矢量场,如速度场;同样,定义场的为某张量函数,则形成对应的张量场,如应力场。

为集中讨论场的一些重要性质,在本章中,约定在某确定的时刻来分析场,将恒定场作为讨论对象。

为了能比较直观地展示场的特点,采用下面的方法对场进行几何描述。

对于标量场 ϕ,一般用等位面(线)或等值面(线)对场进行几何描述。所谓等值面,即满足 $\phi = c$ 的点的集合。其中,c 表示常数。如果满足该条件的集合是面,就形成等值面;如果满足该条件的点的集合是线,就形成等值线。

对于矢量场 $\boldsymbol{A}$,一般用矢量线对场作几何描述。所谓矢量线,是指该线上任一点的切线方向都与该点的矢量方向相同。即在线上任意点上微小线段 $\overrightarrow{\mathrm{dl}}$ 都与该点处的矢量 $\boldsymbol{a}$ 平行。用数学方程可表示为$\overrightarrow{\mathrm{dl}} \times \boldsymbol{A} = 0$,在直角坐标系内可表示为:

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x}=\frac{\mathrm{d}y}{A_y}=\frac{\mathrm{d}z}{A_z}$$

1.5.1 标量场的梯度

标量场中各点都具有定义函数 ϕ 所规定的函数值。在场中某一点,希望可以分析知道附近各点的函数值是如何变化的?哪一个方向上变化最大?其变化值是多少?在标量场中,表示某点附近函数值变化率最大方向的物理量称为标量场的梯度,记号为 grad ϕ。标量场 ϕ 的梯度是一个矢量,是标量场不均匀性的基本度量,它的方向是 ϕ 变化率最大的方向,且总是指向 ϕ 值增大的方向,其大小则是该最大变化率的数值。

在直角坐标系中,其定义式为:

$$\mathrm{grad}\ \phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1.32}$$

例 1.1 对于标量场 $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+2xy$,求 $\phi(x,y,z)$ 在点 $P(1,2,1)$ 的梯度。

解 $\mathrm{grad}\ \phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$=(2x+2y)\boldsymbol{i}+(2y+2x)\boldsymbol{j}+4z\boldsymbol{k}$

在点 $P(1,2,1)$ 处,有:

$$\mathrm{grad}\ \phi=6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

1.5.2 矢量场的散度

在矢量场中,各点的函数都既有大小,又有方向,整个场中遍布着矢量线。在矢量场中任取一个微小区域作为控制体,记其体积为 ΔV,表面为 S,$\boldsymbol{n}$ 为 S 面上法线方向的单位向量,对于矢量 $\boldsymbol{A}$,其单位体积矢通量的极限 $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S}{\Delta V}$,称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度,记为 div $\boldsymbol{A}$。

矢量场的散度是一个标量,是矢量场中各点单位体积矢通量的度量。

在直角坐标系中,若 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$,则其散度的计算式为:

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.33}$$

例 1.2 对于矢量场 $\boldsymbol{A}=x^2z\boldsymbol{i}-2y^3z^2\boldsymbol{j}+xy^2z\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{A}$ 在点 $P(1,-1,1)$ 处的散度。

解 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

$=2xz-6y^2z^2+xy^2$

在点 $P(1,-1,1)$ 处,有:

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}=-3$$

1.5.3 矢量场的旋度

过矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的 M 点,可以有无数的方向,若以每一个方向为法向在 M 点的领域里取微