



普通高等教育精品教材

CFD 基础及应用

主 编 / 刘 方 翁庙成 龙天渝
主 审 / 何 川



重庆大学出版社
<http://www.cqup.com.cn>



普通高等教育精品教材

035
116

CFD 基础及应用

主 编 / 刘 方 翁庙成 龙天渝
主 审 / 何 川



重庆大学出版社

内容提要

本书以矢量场论和二阶张量为基础知识,系统介绍了流体力学的基本原理、控制方程、湍流数学模型以及计算流体动力学(CFD)基础理论等内容,并结合 FLUENT 软件介绍了 CFD 的应用。全书共分为 7 章,第 1 章介绍矢量场论的基本理论概念及二阶张量;第 2 章介绍流体基本方程以及典型的数学解;第 3 章介绍湍流及其数学模型;第 4~6 章介绍 CFD 的基础理论;第 7 章结合 ICEM 与 FLUENT 软件介绍 CFD 的应用和实例。

本书适合计算流体力学的初学者,可作为供热供燃气通风及空调工程、市政工程、环境科学与工程、土木工程、热能动力工程、流体工程专业领域研究生和高年级本科生教材,也可供相关领域科研、工程技术人员与从事 CFD 应用的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

CFD 基础及应用/刘方,翁庙成,龙天渝主编. —
重庆:重庆大学出版社, 2015. 11
普通高等教育精品教材
ISBN 978-7-5624-9495-9

I. ①C… II. ①刘…②翁…③龙… III. ①计算流
体力学—高等学校—教材 IV. ①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 240170 号

CFD 基础及应用

主 编 刘 方 翁庙成 龙天渝

策划编辑:张 婷

责任编辑:陈 力 版式设计:张 婷

责任校对:谢 芳 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:易树平

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆学林建达印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:12.5 字数:304 千

2015 年 11 月第 1 版 2015 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5624-9495-9 定价:35.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究

前言

自流体力学成为独立学科以来,经过近三个世纪的发展与充实,已形成了较为完整的理论体系,包括实验流体力学、理论流体力学与计算流体力学。计算流体力学(Computational Fluid Dynamics,简称CFD)是建立在经典流体力学与数值计算基础上的一门边缘科学,CFD软件已成为解决各种流体流动与传热问题的强有力工具,且成功应用于建筑相关领域。然而,CFD学习依赖于流体流动基础知识与较强的数理基础,对初学者有一定的难度。本书力求用通俗的语言解释CFD理论与应用中基础、本质的内容。采用直角坐标参考系,以矢量场论和二阶张量为基础知识,系统介绍了流体力学的基本原理、控制方程、湍流数学模型以及CFD涉及的数值分析基础理论等内容,并结合建模软件ICEM与计算软件FLUENT介绍了CFD的应用。

编者在近几年为研究生讲授“高等流体力学”课程的基础上,精心收集和整理、筛选了CFD的核心内容以及CFD软件的基本用法,经过补充提炼而完成了本书。全书力求体现实用性,内容组织循序渐进、语言表达通俗易懂,可指导初学者掌握流体力学数值计算的基础理论,正确理解和应用CFD软件中的数值计算方法,借助CFD软件解决相关专业领域流体的流动与传热问题。本书保留了重庆大学研究生课程“高等流体力学”的基础理论部分。

全书共分7章。第1章张量,介绍矢量场论和二阶张量的基础知识;第2章流体流动的基本概念与基本方程,从物理学定律导出流体流动与传热的基本方程,简要介绍采用直接积分方法的层流流动解析解;第3章湍流及其数学模型,介绍了湍流的特征及常用的湍流模型,引入了大涡模拟的亚格子尺度模型;第4章导热问题的数值解,着重介绍了基于有限容积法的偏微分方程的离散及求解;第5章对流-扩散方程的离散,介绍常用的对流项的离散格式;第6章流场的计算,介绍流场的SIMPLE算法;第7章CFD应用分析,介绍ICEM和FLUENT软件及其应用实例。

第1、2章由重庆大学龙天渝、何川编写,第4~6章由重庆大学刘方编写,第3~7章由重庆大学翁庙成编写。全书由刘方统稿,何川主审。

在本书的撰写过程中,得到了重庆大学城市建设与环境工程学院供热、供燃气、通风及空调工程专业研究生赵胜中、卢欣玲、黄仁武、杜城显、林昊宇、龚达、王萌、刘腾飞、刘永强、闫晓俊、余龙星、文灵红等的帮助,在此向他们表示感谢。

本书的出版得益于重庆大学研究生重点课程“高等流体力学”(2010年)和重庆市研究生优质课程“高等流体力学”(2011年)。本书在出版过程中得到了重庆大学出版社的支持和帮助。

参考文献只列出主要参考书目,尚有一些未能一一列出,在此一并致谢。

书中存在的疏漏与不当之处,敬请广大读者批评指正。

编者

2015年7月

目 录

1 张量	1
1.1 矢量场论的若干概念	1
1.1.1 标量	1
1.1.2 矢量	1
1.1.3 矢量的投影与分量	2
1.2 矢量的加法	2
1.2.1 矢量加法的平行四边形法则	2
1.2.2 单位矢量	3
1.2.3 矢量沿直角坐标轴的分量	3
1.3 矢量的标量积	3
1.4 矢量的矢量积	4
1.5 场论	5
1.5.1 标量场的梯度	6
1.5.2 矢量场的散度	6
1.5.3 矢量场的旋度	6
1.6 矢量场论的若干基本计算	7
1.6.1 哈密尔顿算子	7
1.6.2 矢量场论的基本运算公式	8
1.7 张量的概念	9
1.7.1 引言	9
1.7.2 N 维空间与坐标变换	9

1.8 指标与排列符号	10
1.8.1 下标与求和约定	10
1.8.2 二阶单位张量	12
1.8.3 三阶符号张量	12
1.9 二阶张量的若干知识	13
1.9.1 二阶张量的表达	13
1.9.2 二阶张量的主值、主轴、不变量	13
1.9.3 二阶张量的对称性与反对称性	14
1.9.4 关于二阶张量的几个命题	14
2 流体流动的基本概念与基本方程	17
2.1 流体的定义与特征	17
2.2 描述流体运动的方法	18
2.2.1 拉格朗日法	18
2.2.2 欧拉法	19
2.3 质点导数与系统导数	19
2.3.1 质点导数	19
2.3.2 系统导数	21
2.4 流体的变形与速度分解定理及作用在流体上的力	23
2.4.1 流体的变形与速度分解定理	23
2.4.2 作用在流体上的力	24
2.5 牛顿流体的本构关系	24
2.6 质量守恒定律与连续性方程	25
2.7 动量守恒定律与动量方程	27
2.8 能量守恒定律与能量方程	29
2.9 组分质量守恒方程	32
2.10 基本方程的通用形式	32
2.10.1 基本方程	32
2.10.2 基本方程的定解条件	33
2.11 均质不可压缩黏性流体层流运动的解析解	34
2.11.1 平行平板间的二维恒定层流运动	35
2.11.2 斜面上具有等深自由面的二维恒定层流运动	36
3 湍流及其数学模型	40
3.1 湍流模型的概述	40
3.1.1 湍流的特点	40

3.1.2	湍流数值模拟方法	40
3.2	湍流黏性系数法	41
3.2.1	湍流物理量的时均值	41
3.2.2	湍流控制方程	41
3.2.3	涡黏模型	43
3.3	零方程模型与一方程模型	44
3.3.1	零方程模型	44
3.3.2	一方程模型	44
3.4	$k-\varepsilon$ 两方程模型	45
3.4.1	标准 $k-\varepsilon$ 两方程模型的定义	45
3.4.2	标准 $k-\varepsilon$ 两方程模型的有关计算公式	46
3.4.3	标准 $k-\varepsilon$ 模型的控制方程组	47
3.4.4	标准 $k-\varepsilon$ 模型的解法及适用性	48
3.5	壁面函数法	49
3.5.1	壁面函数法的基本思想	49
3.5.2	高 Re 数的 $k-\varepsilon$ 模型/壁面函数法边界条件的处理	51
3.5.3	高 Re 数的 $k-\varepsilon$ 模型/壁面函数法数值计算中的注意事项	52
3.6	低 Re 数的模型	53
3.7	Reynolds 应力方程模型(RSM)	55
3.7.1	Reynolds 应力输运方程	55
3.7.2	RSM 的控制方程组及其解法	58
3.7.3	对 RSM 适用性的讨论	59
3.8	大涡模拟(LES)	60
3.8.1	大涡模拟的基本思想	60
3.8.2	大涡的运动方程	60
3.8.3	亚格子尺度模型	61
3.8.4	LES 控制方程的求解	62
4	导热问题的数值解	64
4.1	数值方法的本质及常用的离散化方法	64
4.1.1	数值方法的本质	64
4.1.2	常用的离散化方法	65
4.2	空间区域的离散化	66
4.2.1	空间区域离散的实质	66
4.2.2	两类设置节点的方法	66

4.2.3 网格几何要素的标记	66
4.3 一维导热问题的有限容积法	67
4.3.1 一维稳态热传导问题及其离散方程	68
4.3.2 界面上当量导热系数的确定方法	69
4.3.3 非稳态一维热传导	71
4.4 多维非稳态导热方程的全隐格式	72
4.4.1 二维非稳态导热方程的离散化方程	72
4.4.2 三维问题的离散化方程	73
4.5 源项及边界条件的处理	74
4.5.1 源项的线性化	74
4.5.2 边界条件	76
4.6 有限容积法的四项基本法则	77
4.7 线性代数方程的解	79
4.7.1 三对角矩阵算法	79
4.7.2 代数方程的迭代法	80
4.7.3 超松弛和欠松弛	84
5 对流-扩散方程的离散	88
5.1 一维稳态对流与扩散问题的精确解	88
5.2 对流项的中心差分格式	89
5.2.1 定义及系数构成	89
5.2.2 特性分析	91
5.3 对流项的迎风格式	92
5.3.1 定义	92
5.3.2 采用迎风格式的离散形式	93
5.3.3 关于中心差分及一阶迎风格式的讨论	93
5.4 对流-扩散方程的混合格式及乘方格式	93
5.4.1 离散方程中系数 a_E 与 a_W 之间的内在联系	94
5.4.2 混合格式	94
5.4.3 指数格式	95
5.4.4 乘方格式	96
5.4.5 5 种 3 点格式系数计算式的汇总	97
5.5 对流-扩散方程 5 种 3 点格式系数特性的分析	97
5.5.1 通量密度 J^* 及其离散表达式	97
5.5.2 通量密度中系数 A/B 间关系的分析	98

5.5.3	系数特性的重要推论	99
5.5.4	离散方程中 a_E, a_W 的通用表达式	99
5.5.5	关于格式定义与系数特性的进一步说明	100
5.6	高阶离散格式	101
5.6.1	对流项离散格式假扩散特性	101
5.6.2	二阶迎风格式	102
5.6.3	QUICK 格式	103
5.6.4	采用高阶格式时近边界点的处理	106
5.6.5	高阶格式所形成的离散方程的求解方法	106
5.7	对流-扩散方程离散形式的稳定性分析	107
5.7.1	常见的不稳定性问题	107
5.7.2	对流项离散格式的稳定性	107
5.8	多维对流-扩散方程的离散及边界条件的处理	108
5.8.1	二维对流-扩散方程的离散	108
5.8.2	三维对流-扩散方程的离散形式	112
5.8.3	边界条件的处理	112
6	流场的计算	115
6.1	流场数值解法概述	115
6.1.1	常规解法存在的主要问题	115
6.1.2	流量数值计算的主要方法	116
6.2	压力梯度项的离散	118
6.3	交叉网格及动量方程的离散	120
6.3.1	交叉网格上速度分量位置的安排	120
6.3.2	交叉网格上动量方程的离散	121
6.3.3	交叉网格上的插值	121
6.3.4	采用交叉网格时的注意事项	122
6.4	求解 Navier-Stokes 方程的压力修正方法	124
6.4.1	压力修正方法的基本思想	124
6.4.2	速度修正值的计算公式	124
6.4.3	求解压力修正值的代数方程	125
6.4.4	压力修正值方程的边界条件	126
6.5	SIMPLE 算法的计算步骤及算例	127
6.5.1	SIMPLE 算法的计算步骤	127
6.5.2	SIMPLE 算法的应用举例	127

6.6	SIMPLE 算法的讨论及流场迭代求解收敛·····	130
6.6.1	SIMPLE 算法的讨论·····	130
6.6.2	流场迭代求解收敛的判据 ·····	133
7	CFD 应用分析 ·····	137
7.1	常用的计算流体动力学(CFD)商用软件 ·····	137
7.1.1	PHOENICS ·····	137
7.1.2	CFX ·····	138
7.1.3	STAR-CD ·····	139
7.1.4	FIDAP ·····	140
7.1.5	FLUENT ·····	140
7.2	CFD 的求解过程 ·····	141
7.2.1	总体计算流程 ·····	142
7.2.2	建立控制方程 ·····	142
7.2.3	确定初始条件与边界条件 ·····	143
7.2.4	划分计算网格 ·····	143
7.2.5	建立离散方程 ·····	143
7.2.6	离散初始条件和边界条件 ·····	144
7.2.7	给定求解控制参数 ·····	144
7.2.8	求解离散方程 ·····	144
7.2.9	判断解的收敛性 ·····	144
7.2.10	显示和输出计算结果·····	144
7.3	CFD 软件结构 ·····	145
7.3.1	前处理器 ·····	145
7.3.2	求解器 ·····	146
7.3.3	后处理器 ·····	146
7.4	FLUENT 入门 ·····	146
7.4.1	FLUENT 使用对象 ·····	146
7.4.2	FLUENT 使用的单位制 ·····	147
7.4.3	FLUENT 使用的文件类型 ·····	147
7.4.4	FLUENT 的求解步骤 ·····	148
7.5	ICEM 入门·····	149
7.5.1	ICEM 的特点·····	149
7.5.2	ICEM 的基本用法·····	150
7.5.3	ICEM 的文件类型·····	152

7.5.4 ICEM 网格生成的基本流程.....	152
7.6 实例分析	152
7.6.1 问题描述	152
7.6.2 创建几何模型	153
7.6.3 网格生成	165
7.6.4 FLUENT 计算	171
7.6.5 结果分析	184
参考文献.....	186

1

张 量

1.1 矢量场论的若干概念

物理及力学中需要用到许多物理量,这些量依照其不同的性质可以分为标量、矢量和张量。

1.1.1 标量

具有大小而没有方向、只用一个分量就能完整表述且与坐标选取无关的物理量,称为标量。如流体的温度、密度等属于标量。

假若标量与坐标系的选择无关,则称为绝对标量或不变量。例如,任何实数、质量、密度、长度、时间、温度和力做的功、能量等。

在以后的学习中,涉及诸如张量一类的标量,都指绝对标量。在研究张量的解析性质时,还将遇到与坐标系选择有关的标量。

1.1.2 矢量

既有大小又有确定的方向,在任意选取的正交坐标系中最多需要用3个分量才能完整表述的物理量,称为矢量。矢量用黑体小写英文字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$ 表示。作图时用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示,如图 1.1 所示。有向线段的长度表示矢量大小或模。矢量的大小(模)记为:

$$|\mathbf{a}| = a \quad (1.1)$$

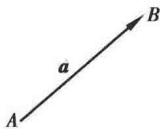


图 1.1

固结于空间某一点(作用点)的矢量称为固定矢量;沿着某一直线但没有一定作用点的矢量称为滑动矢量;既无一定作用线又无一定作用点的矢量称为自由矢量。

应当指出的是,不是具有数值与方向的物理量都能作为矢量,矢量还应具有由矢量代数运算规则(见 1.2 节)所确定的特性。

当代表两矢量的线段是平行的,则称两矢量为平行矢量或共线矢量。当两矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 具有相等的模,共线且同向时,则称两矢量相等,如图 1.2 所示,记为:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (1.2)$$

当两矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 模相等,共线、方向相反时,如图 1.3 所示,记为:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{b} \quad (1.3)$$

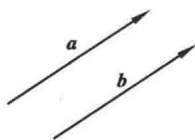


图 1.2

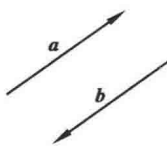


图 1.3

1.1.3 矢量的投影与分量

矢量 $\boldsymbol{v}$ 用有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 表示,如图 1.4 所示,过矢量始端 O 建立坐标系 $O\eta\zeta$ 。过矢量末端 P 分别向坐标轴作垂线,得矢量 $\boldsymbol{v}$ 在两坐标轴 $O\eta, O\zeta$ 上的投影 OM, ON , 分别记为 v_1, v_2 。过点 P 分别作两坐标轴的平行线,得矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿两坐标轴 $O\eta, O\zeta$ 的分量 $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$, 记为 $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2$ 。由图 1.5 可知 $OQ = RP, OR = QP$ 。若两坐标轴之间的夹角为 θ , 则:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v^1 + v^2 \cos \theta \\ v_2 &= v^1 \cos \theta + v^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

和

$$\left. \begin{aligned} v^1 &= v_1 \csc^2 \theta - v_2 \csc \theta \cot \theta \\ v^2 &= -v_1 \csc \theta \cot \theta + v_2 \csc^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

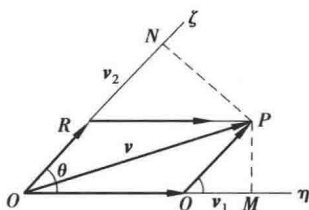


图 1.4

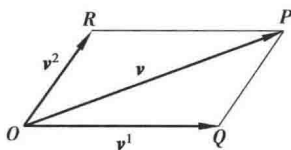


图 1.5

1.2 矢量的加法

1.2.1 矢量加法的平行四边形法则

用有向线段 $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ 分别表示矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 以 $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ 为邻边所构成的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{OP}$, 即为矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的合矢量 $\boldsymbol{v}$, 记为:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad (1.6)$$

这就是矢量加法的平行四边形法则。一切矢量应该遵守矢量加法法则。矢量加法法则确定了矢量的第三个必要性。因此,能用直线表示的,且遵守平行四边形加法运算法则的物理量或几何量称为矢量。

矢量减法是矢量加法的逆运算。式(1.6)可改写成:

$$\mathbf{a} = \mathbf{v} - \mathbf{b} \quad (1.7)$$

$$\text{或} \quad \mathbf{a} = \mathbf{v} + (-\mathbf{b}) \quad (1.8)$$

容易证明矢量加法满足交换律和结合律,即:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \quad (1.10)$$

1.2.2 单位矢量

模为 1 的矢量称为单位矢量。模 $a \neq 0$ 的矢量 $\mathbf{a}$, 沿 $\mathbf{a}$ 方向的单位矢量记为:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{a} \quad (1.11)$$

任一矢量 $\mathbf{a}$ 可表示为与 $\mathbf{a}$ 同方向的单位矢量 $\hat{\mathbf{a}}$ 和 $\mathbf{a}$ 的模 a 的乘积, 即:

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{a}} \quad (1.12)$$

在三维欧几里得空间里, 沿直角坐标轴 x, y, z 的单位矢量用 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 或 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 表示。

1.2.3 矢量沿直角坐标轴的分量

在三维欧几里得空间里, 任一矢量 $\mathbf{a}$ 可表示为沿正交的三个坐标轴 x, y, z 的分矢量 $a_1\mathbf{i}, a_2\mathbf{j}, a_3\mathbf{k}$ 的矢量和, 如图 1.6 所示, 即,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad (1.13)$$

$\mathbf{a}$ 的模是:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

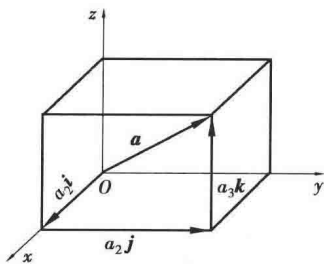


图 1.6

1.3 矢量的标量积

1) 矢量与标量的乘积

矢量 $\mathbf{a}$ 与标量 m 的乘积是矢量 $m\mathbf{a}$, 这个矢量的模是矢量 $\mathbf{a}$ 的模的 m 倍, 方位与 $\mathbf{a}$ 相同; 指向由 m 的正、负号确定, 为正时, $m\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 指向相同, 否则相反。若 $m=0$, 则 $m\mathbf{a}$ 为零矢量。

若 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是矢量, m 和 n 是标量, 则:

$$\left. \begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{a}m \\ m(n\mathbf{a}) &= (mn)\mathbf{a} \\ (m+n)\mathbf{a} &= m\mathbf{a} + n\mathbf{a} \\ m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= m\mathbf{a} + m\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

2) 矢量与矢量的标量积

空间某一轴的方向由该轴的单位矢量确定。以 $\mathbf{e}$ 表示 x 轴的单位矢量, 以 a_x 表示矢量 $\mathbf{a}$

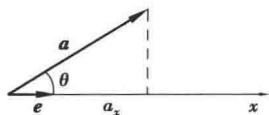


图 1.7

在 x 轴方向的投影,并称为矢量 a 与单位矢量 e 的标量积(又称点积),如图 1.7 所示。其表达式为:

$$a_x = a \cdot e = |a| \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi \quad (1.15)$$

式中 $\cos \theta$ ——矢量 a 和 e 的正方向夹角的余弦。

同样可确定矢量 a 与矢量 b 的标量积。考虑矢量 a 在矢量 b 方向的投影 a_b ,可得:

$$a_b = a \cdot \hat{b} = a \cdot \frac{b}{|b|} = a \cos(a, b)$$

由此得到:

$$a \cdot b = ab \cos(a, b) = a_b b = b_a a \quad (1.16)$$

在三维空间里,正交坐标轴单位矢量 i, j, k 的标量积为:

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \quad (1.17)$$

$$j \cdot k = k \cdot j = k \cdot i = i \cdot k = i \cdot j = j \cdot i = 0 \quad (1.18)$$

将矢量表示为沿坐标轴的分矢量的矢量和,即 $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k, b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$,则有:

$$a \cdot b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.19)$$

还有:

$$a \cdot a = (a)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \quad (1.20)$$

若 $a \cdot b = 0$,且 a, b 都不是零矢量,则 a, b 互相垂直。

容易证明,标量积满足交换律和分配率,即:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (1.21)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (1.22)$$

还有:

$$m \cdot (a \cdot b) = (ma) \cdot b = a \cdot (mb) = (a \cdot b)m \quad (1.23)$$

1.4 矢量的矢量积

两矢量 a 和 b 的矢量积(简称矢积,又称叉积)是一矢量 c 。 c 的模是 a, b 的模与两矢量夹角正弦 $\sin \theta$ 的乘积, c 垂直于 a, b 平面,且 a, b 和 c 构成右手系(图 1.8)表示为:

$$c = a \times b \quad (1.24)$$

$$|c| = ab \sin \theta \quad (1.25)$$

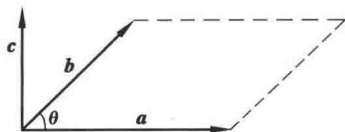


图 1.8

由图 1.9 很容易看出,交换律对矢量的矢量积是不成立的,且:

$$a \times b = -b \times a \quad (1.26)$$

若 $a \parallel b$,或 $a = b$,因为 $\sin \theta = 0$,所以 $a \times b = 0$ 。

由定义容易证明,笛卡尔直角坐标系单位矢量的矢积有如下关系:

$$i \times i = 0, j \times j = 0, k \times k = 0 \quad (1.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

利用这些关系,可以求得:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k} \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1.29)$$

可以证明,分配律对矢量的矢积是成立的,即:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (1.30)$$

设 m 是标量,有:

$$m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})m \quad (1.31)$$

1.5 场 论

若在空间某区域 D 上定义了一个连续函数,则称该函数在 D 上形成了一个场。如果该函数是描述空间的几何位置,就称该函数定义了一个几何场;如流体占据着某个空间流道,就称该流道为流场。如果该函数是在 D 上连续分布的某物理量,就称该函数定义了一个物理场。如流体的温度形成温度场,压力形成压力场,速度形成速度场,应力形成应力场。

如果定义的场函数不随时间 t 变化,则称该场为恒定场,否则,为非恒定场。在给定时刻研究非恒定场的性能时,一般应将时间作为参量对待。

若在空间区域 D 上定义的是标量函数 $\phi(t, x, y, z)$, 则称函数 ϕ 在 D 上形成了一个标量场,如前面提到的温度场和压力场;若在空间区域 D 上定义的是矢量函数 $\mathbf{A}(t, x, y, z) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$, 则称函数 $\mathbf{a}$ 在 D 上构成了一个矢量场,如速度场;同样,定义场的为某张量函数,则形成对应的张量场,如应力场。

为集中讨论场的一些重要性质,在本章中,约定在某确定的时刻来分析场,将恒定场作为讨论对象。

为了能比较直观地展示场的特点,采用下面的方法对场进行几何描述。

对于标量场 ϕ , 一般用等位面(线)或等值面(线)对场进行几何描述。所谓等值面,即满足 $\phi = c$ 的点的集合。其中, c 表示常数。如果满足该条件的集合是面,就形成等值面;如果满足该条件的点的集合是线,就形成等值线。

对于矢量场 $\mathbf{A}$, 一般用矢量线对场作几何描述。所谓矢量线,是指该线上任一点的切线方向都与该点的矢量方向相同。即在线上任意点上微小线段 $d\mathbf{l}$ 都与该点处的矢量 $\mathbf{a}$ 平行。用数学方程可表示为 $d\mathbf{l} \times \mathbf{A} = 0$, 在直角坐标系内可表示为:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

1.5.1 标量场的梯度

标量场中各点都具有定义函数 ϕ 所规定的函数值。在场中某一点, 希望可以分析知道附近各点的函数值是如何变化的? 哪一个方向上变化最大? 其变化值是多少? 在标量场中, 表示某点附近函数值变化率最大方向的物理量称为标量场的梯度, 记号为 $\text{grad } \phi$ 。标量场 ϕ 的梯度是一个矢量, 是标量场不均匀性的基本度量, 它的方向是 ϕ 变化率最大的方向, 且总是指向 ϕ 值增大的方向, 其大小则是该最大变化率的数值。

在直角坐标系中, 其定义式为:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.32)$$

例 1.1 对于标量场 $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy$, 求 $\phi(x, y, z)$ 在点 $P(1, 2, 1)$ 的梯度。

$$\begin{aligned} \text{解 } \text{grad } \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= (2x + 2y) \mathbf{i} + (2y + 2x) \mathbf{j} + 4z \mathbf{k} \end{aligned}$$

在点 $P(1, 2, 1)$ 处, 有:

$$\text{grad } \phi = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

1.5.2 矢量场的散度

在矢量场中, 各点的函数都既有大小, 又有方向, 整个场中遍布着矢量线。在矢量场中任取一个微小区域作为控制体, 记其体积为 ΔV , 表面为 S , $\mathbf{n}$ 为 S 面上法线方向的单位向量, 对于矢

量 $\mathbf{A}$, 其单位体积矢通量的极限 $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V}$, 称为矢量场 $\mathbf{A}$ 的散度, 记为 $\text{div } \mathbf{A}$ 。

矢量场的散度是一个标量, 是矢量场中各点单位体积矢通量的度量。

在直角坐标系中, 若 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$, 则其散度的计算式为:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.33)$$

例 1.2 对于矢量场 $\mathbf{A} = x^2 z \mathbf{i} - 2y^3 z^2 \mathbf{j} + xy^2 z \mathbf{k}$, 求 $\mathbf{A}$ 在点 $P(1, -1, 1)$ 处的散度。

$$\begin{aligned} \text{解 } \text{div } \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= 2xz - 6y^2 z^2 + xy^2 \end{aligned}$$

在点 $P(1, -1, 1)$ 处, 有:

$$\text{div } \mathbf{A} = -3$$

1.5.3 矢量场的旋度

过矢量场 $\mathbf{A}$ 中的 M 点, 可以有无数的方向, 若以每一个方向为法向在 M 点的领域里取微