数学解题

靠数学思想给力

（中）

王连笑 著

书山题海——跋涉艰难

名师大家——仙人指路

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

靠数学思想给力

（中）

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本套书是关于数学解题与数学思想的书.本书共有三章,第三章分类与整合思想,第四章数与形结合的思想,第五章划归与转化的思想.

本书适合高中师生和数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数学解题:靠数学思想给力.中/王连笑著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.6

ISBN 978-7-5603-3339-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①王… Ⅲ.①数学-解法 Ⅳ.①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 121496 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 22.5 字数 404 千字
版　　次 2011 年 7 月第 1 版 2011 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3339-7
定　　价 48.00 元

目录

第三章

分类与整合的思想

数学的目标是思考那些能够严格思考的问题.

——E·卡斯内尔

“分类”来源于生活，存在于生活，分类思想是自然科学乃至社会科学中的基本逻辑方法，也是研究数学问题的重要思想方法，它始终贯穿于整个数学解题中. 从整体布局上看，中学数学分代数、几何两大类，采用不同方法进行研究，就是分类思想的体现；从具体内容上看，中学数学中实数的分类、式的分类、三角形的分类、方程的分类、函数的分类等，也是分类思想的具体体现. 对学习内容进行分类，降低了学习难度，增强了学习的针对性，按不同的情况去对同一对象进行分类，掌握好分类的方法和原则，形成分类的思想，这是数学解题离不开的一个内容.

在解题时，我们常常遇到这样一种情况 —— 解到某一步之后，不能再以统一的方法、统一的式子继续进行了，因为这时被研究的问题包含了多种情况，这就必须在条件所给出的总区域内，正确划分成若干个子区域，然后分别在各个子区域内进行解题. 当分类讨论，解决完每一个局部问题之后，还必须对各种情形的讨论整合在一起，因为我们研究的毕竟是这个问题的全体，整合之后才能完成整个题目的解决. 这种解题思想和解题方法就是分类讨论与整合的思想方法. 在解题中，遇到一个问题在比较多的情形中出现时，如果不用分类与整合的思想方法，不注意分类，不会分类或分类不够准确，往往就会给解题造成困难或错误.

分类思想是以概念的划分，集合的分类为基础的解题思想，这里集中体现的是由大化小，由整体化为部分，由一般化为特殊的解决问题的方法. 其研究方向基本是“分”，但分类解决问题之后，还必须把它们整合在一起，这种“合 — 分 — 合”的解决问题的过程，就是分类与整合的思想方法解题的过程.

分类讨论与整合是一种逻辑方法，是一种重要的数学思想，同时也是一种重要的解题策略，它体现了化整为零、积零为整的思想与归类整理的方法. 有关分类讨论与整合思想的数学问题具有明显的逻辑性、综合性、探索性，能训练人的思维条理性和概括性，因此也是各类考试或竞赛命题经常关注的一个内容.

第一节　分类讨论的原因和原则

分类讨论思想的核心是有没有分类的意识，遇到应该分类的情况，是否想到要分类. 因此应该研究分类讨论的原因.

分类方法又是根据所研究的对象的相同点和差异点进行区分的一种逻辑方法，因此在解题中还必须注意分类应遵循的原则.

(一) 分类讨论的原因

当一个问题因为某种量的情况不同而有可能引起问题的结果不同时，需要对这个量的各种情况进行分类讨论.

有哪些情况需要分类呢?

第一，由数学概念引起的分类.

有些数学概念本身就是分类定义的. 例如，绝对值的概念，对 $|x|$ 要分为 $x>0$，$x=0$ 和 $x<0$ 三类

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

这样，解与绝对值有关的题目时，就要分为 $x>0$，$x=0$ 和 $x<0$ 三类讨论.

又如，三角形可按角分类，分为锐角三角形、直角三角形、钝角三角形三类；也可按边分类，分为等腰三角形和非等腰三角形两类，而等腰三角形又可再分为等边三角形和等腰非等边三角形两类：

$$\underset{\text{(按角分类)}}{\text{三角形}}\begin{cases}\text{锐角三角形}\\ \text{直角三角形}\\ \text{钝角三角形}\end{cases} \qquad \underset{\text{(按边分类)}}{\text{三角形}}\begin{cases}\text{非等腰三角形}\\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{等边三角形}\\ \text{等腰非等边三角形}\end{cases}\end{cases}$$

再如，分段函数也是分段定义的，例如

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-1, & x\leqslant 1 \\ -2x+4, & x>1 \end{cases}$$

这个函数在 $x\leqslant 1$ 和 $x>1$ 这两段的函数解析式不相同，因此也要分为两种情形讨论.

对于函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，要分为：当 $a=0$ 时是一次函数，当 $a\neq 0$ 时是二次函数等.

概念的分类是揭示概念的外延的逻辑方法，我们对于数学概念的量的分析就要根据概念本身造成的分类进行研究.

第二，由运算法则、定理、公式引起的分类.

在数学解题中，常常需要进行各种运算，需要运用定理和公式进行变形，证明或求值，而有的运算法则和定理，公式是分类给出的.

有些运算法则本身就必然引起分类.

例如，零不能作除数就是一个重要的运算法则. 例如，解方程 $ax+b=0$，这个方程看起来很简单，但是求解时，就要考虑三种情况：

第一种情况：$a \neq 0$，此时方程有唯一解 $x = -\frac{b}{a}$；

第二种情况：$a = 0, b \neq 0$，此时方程无解；

第三种情况：$a = 0, b = 0$，此时任何实数 x 都是方程的解.

这个分类就涉及零不能作除数这一运算法则.

再如，求函数 $y = \frac{3x+1}{x-5}$ 的反函数. 变形为

$$(y-3)x = 1+5y$$

这时需要求 x 的表达式，就要在等式的两边同时除以 $y-3$，这就要考虑到零不能作除数这一运算法则，因此需要分 $y-3$ 等于零和不等于零两类讨论：

当 $y-3=0$，即 $y=3$ 时，函数化为 $3 = \frac{3x+1}{x-5}$，即 $-15=1$，这是不可能的；

当 $y-3 \neq 0$，即 $y \neq 3$ 时，有 $x = \frac{1+5y}{y-3}$；所以，函数 $y = \frac{3x+1}{x-5}$ 的反函数为 $y = \frac{1+5x}{x-3}(x \neq 3)$.

又如不等式的运算，在不等式的两边同时乘以或除以一个大于零的代数式，不等号的方向不变，而同时乘以或除以一个小于零的代数式，不等号的方向改变. 这一法则，就提醒我们在遇到不等式问题时，要注意这个分类.

如解不等式 $ax+b>0$，就要分为：①$a=0, b>0$，②$a=0, b \leqslant 0$，③$a>0$，④$a<0$ 四种情况讨论.

许多定理、公式就是分类给出的. 例如，等比数列的求和公式就分为 $q=1$ 和 $q \neq 1$ 两种情况，所以前 n 项和的公式就应该为

$$S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & \text{当 } q \neq 1 \text{ 时} \\ na_1, & \text{当 } q = 1 \text{ 时} \end{cases}$$

因此遇到公比 q 是一个参数时，求 S_n 就要分为 $q=1$ 和 $q \neq 1$ 两类讨论.

再如，在数列 $\{a_n\}$ 中，由于 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$，则在已知 S_n 的表达式求 a_n 的表达式时，也要分为 $n=1$ 和 $n \geqslant 2$ 两类

$$a_n = \begin{cases} S_1, & \text{当 } n = 1 \text{ 时} \\ S_n - S_{n-1}, & \text{当 } n \geqslant 2 \text{ 时} \end{cases}$$

讨论指数函数 $y=a^x(a>0, a \neq 1)$ 和对数函数 $y=\log_a x(a>0, a \neq 1)$ 的单调性就分为 $a>1, 0<a<1$ 两种情况.

不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解又分为 $a=0, a>0$ 和 $a<0$. 当 $a>0$ 时又分为 $\Delta>0, \Delta=0, \Delta<0$ 及当 $a<0$ 时，分为 $\Delta>0, \Delta=0, \Delta<0$ 共 7 种情

况，即解不等式 $ax^2+bx+c>0$，要分为

$$\begin{cases} a>0\begin{cases}\Delta>0\\ \Delta=0\\ \Delta<0\end{cases} \\ a=0 \\ a<0\begin{cases}\Delta>0\\ \Delta=0\\ \Delta<0\end{cases}\end{cases}$$

直线的斜率分为存在与不存在两种情况等.

这些都是由运算法则、定理、公式引起的分类.

第三，解含有参数的题目时，必须根据参数的不同取值范围进行讨论.

在前面讲过的求含有参数的函数和方程的问题，几乎每一个题目都要进行分类讨论，这里就不再赘述了.

第四，图形位置的相对变化引起的分类.

函数图象、几何图形相对位置的相对变化也是引起分类的一个重要原因.

例如，在几何图形中，两直线的相互位置关系(平行直线，相交直线和异面直线). 点相对于平面的不同位置，如求两点的距离，就有两点在同一平面的同侧和异侧两种情形. 研究区间 $[m,n]$ 上的二次函数问题时，二次函数的图象的对称轴相对于定义域 $[m,n]$ 的不同位置：就分为对称轴在区间 $[m,n]$ 的左边，在区间 $[m,n]$ 的内部，在区间 $[m,n]$ 的右边三种情形. 求不等式 $(x-1)(x-a)<0$ 时，在数轴上，要区别 a 在 1 的左侧，重合与右侧三种情况等.

第五，由整数的同余类引起的分类.

一个整数 a 除以非零整数 b 所得的余数为 r，$a=bq+r$，由于 $r=0,1,2,\cdots,|b|-1$ 共有 $|b|$ 种可能，就要以 $|b|$ 为模，分为 $|b|$ 种情况讨论：

最简单的例子就是以 2 为模，把整数分为奇数和偶数讨论，例如

$$(-1)^n=\begin{cases}-1, & 当 n 为奇数时\\ 1, & 当 n 为偶数时\end{cases}$$

涉及整数或自然数的问题，或 $(-1)^n$ 时，可对整数分为奇数和偶数两类，或者把整数按以 3 或以 4，以 5 等为模的同余类分类.

第六，题目的特殊要求引起的分类.

对于一些题目，如排列组合的计数问题，概率问题等，题目有一些特殊的要求，这时就要分成若干情况分别研究.

所以，考查分类讨论思想的第一个内容就是思考有没有引起分类的原因，从而想到要不要分类.

（二）分类讨论的原则

要正确地对事物进行分类，通常应从所研究的具体问题出发，选取恰当的分类标准，然后根据对象的属性，把它们不重不漏划分为若干类别．因此科学的分类是用分类与整合思想解题的前提．

第一个原则：分类时要注意全集的确定性．

在分类讨论前，必须首先明确全域的范围，即解题是在什么范围内进行的，这个问题不明确，往往就会以部分子集代替全集或者在全集之外进行讨论．

例如，在讨论函数 $y=\arccos(-x^2+x-1)$ 的单调性时，有人在解题时考虑到，由于 $y=\arccos x$ 是减函数，所以把着眼点放在对 $u=-x^2+x-1$ 的单调性上，由于函数 $u=-x^2+x-1$ 图象的对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，所以就把讨论的区域放在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 和 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上，这等于讨论的是全集 $(-\infty,+\infty)$，而把范围扩大了．事实上，我们讨论的全集是由函数 $u=-x^2+x-1$ 的值域所确定的 x 的范围，即函数 $y=\arccos(-x^2+x-1)$ 的定义域．

解 $-1\leqslant -x^2+x-1\leqslant 1$ 得 $0\leqslant x\leqslant 1$，因此应在 $[0,1]$ 这个全集上讨论单调性，即分为 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 两个区间讨论．

第二个原则：分类时要注意完备性．

分类讨论时，要注意划分的各个子集，它们的并集应该是讨论的全集．例如，上面提到的讨论函数 $y=\arccos(-x^2+x-1)$ 的单调性，如果讨论时仅分为 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 两个区间就漏掉了对 $x=\frac{1}{2}$ 的讨论．

又如已知双曲线 $2x^2-y^2=2$ 与点 $P(1,2)$，求过点 $P(1,2)$ 的直线 l（直线 l 不与 x 轴垂直）的斜率的取值范围，使 l 与双曲线分别有一个交点，两个交点和没有交点，并判断此时直线与双曲线的位置关系．

有人在解题时，是这样做的：

由于直线 l 不与 x 轴垂直，则直线 l 的斜率存在．

设直线 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$，代入 $2x^2-y^2=2$ 得

$$(2-k^2)x^2+2(k^2-2k)x-k^2+4k-6=0 \qquad ①$$

$$\Delta=[2(k^2-2k)]^2-4(2-k^2)(-k^2+4k-6)=16(3-2k)$$

(1) 当 $\Delta=0$，即 $k=\frac{3}{2}$ 时，方程 ① 有一个实根，故 l 与双曲线有一个交点；

(2) 当 $\Delta > 0$，即 $k < \frac{3}{2}$ 时，方程 ① 有两个不等实根，故 l 与双曲线有两个交点；

(3) 当 $\Delta < 0$，即 $k > \frac{3}{2}$ 时，方程 ① 没有实根，故 l 与双曲线没有交点.

综上所述，当 $k = \frac{3}{2}$ 时，直线与双曲线相切，且有一个交点；当 $k < \frac{3}{2}$ 时，此时直线与双曲线相交，且有两个交点；当 $k > \frac{3}{2}$ 时，直线与双曲线相离，没有交点.

这个解法中，为了确定交点的个数，对方程的根的判别式进行分类讨论，基本是正确的，但是不完备，因为方程 ① 不一定是二次方程. 所以正确的解法是：

设直线 l 的方程为 $y - 2 = k(x - 1)$，代入 $2x^2 - y^2 = 2$ 得

$$(2 - k^2)x^2 + 2(k^2 - 2k)x - k^2 + 4k - 6 = 0 \qquad ①$$

(1) 当 $2 - k^2 = 0$，即 $k = \pm\sqrt{2}$ 时，直线 l 与双曲线的渐近线平行，l 与双曲线只有一个交点；

(2) 当 $2 - k^2 \neq 0$，即 $k \neq \pm\sqrt{2}$ 时

$$\Delta = [2(k^2 - 2k)]^2 - 4(2 - k^2)(-k^2 + 4k - 6) = 16(3 - 2k)$$

① 当 $\Delta = 0$，即 $k = \frac{3}{2}$ 时，方程 ① 有一个实根，故 l 与双曲线只有一个交点；

② 当 $\Delta > 0$，即 $k < \frac{3}{2}$，且 $k \neq \pm\sqrt{2}$ 时，方程 ① 有两个不等实根，故 l 与双曲线有两个交点；

③ 当 $\Delta < 0$，即 $k > \frac{3}{2}$ 时，方程 ① 没有实根，故 l 与双曲线没有交点.

综上所述可知：

当 $k = \pm\sqrt{2}$ 时，直线 l 与双曲线的渐近线平行，l 与双曲线相交且只有一个交点；

当 $k = \frac{3}{2}$ 时，l 与双曲线只有一个交点，此时直线与双曲线相切且只有一个交点；

当 $k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ 时，直线与双曲线相交且有两个交点；

当 $k\in(\frac{3}{2},+\infty)$ 时,直线与双曲线相离,没有交点.

再如,在讨论正整数问题时,如果把正整数分为质数与合数两类讨论也是不完备的,因为1既不是质数,也不是合数.

第三个原则:分类时要注意纯粹性.

分类讨论时,还要注意不能重复讨论,也不能交叉分类,即所讨论的所有子集的交集必须是空集.

例如,在$[0,1]$这个全集上讨论单调性,若分为$\left[0,\frac{1}{2}\right]$和$\left[\frac{1}{2},1\right]$两个区间讨论.就重复了对 $x=\frac{1}{2}$ 的讨论.

又如,有人在讨论三角形问题时,把三角形分为不等边三角形,等腰三角形和等边三角形三类.这也是不纯粹的,因为等边三角形也是等腰三角形.

第四个原则:分类时要注意分类标准的统一性.

在进行分类时,标准要统一.在同一次讨论时,标准应该是同一个,仍以讨论函数 $y=\arccos(-x^2+x-1)$ 的单调性为例.

把讨论的区域分为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$和$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$是不对的,但是也有人由 $u=-x^2+x-1$ 的值域为$[-1,1]$,把讨论区域分为$\left[-1,\frac{1}{2}\right)$和$\left[\frac{1}{2},1\right]$两个区间讨论,也是不对的.这是因为 $x=\frac{1}{2}$ 是对 $u=-x^2+x-1$ 的单调性的分类标准,这需要对 x 分类.$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时,u 是减函数;$-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,u 是增函数.这个区间是混乱的,因为$[-1,1]$是针对 $u=-x^2+x-1$ 的值域,所以区间$\left[-1,\frac{1}{2}\right)$的左端点$-1$是对$u$的,而右端点$\frac{1}{2}$是对$x$的.同样$\left[\frac{1}{2},1\right]$的右端点1是对 u 的,而左端点$\frac{1}{2}$是对 x 的.讨论的区域是同时针对两个变量的.

第五个原则:分类时要注意层次性.

在用分类讨论与整合思想解题时,有时,一次分类不能解决问题,而需要第二次、第三次等多次分类.

如解不等式 $ax^2+bx+c>0$ 时,第一次分类是把 a 分为 $a=0$,$a>0$ 和 $a<0$ 三类,是对 a 分类;第二次,则在 $a>0$ 和 $a<0$ 时,要对判别式分类,分为 $\Delta>0$,$\Delta=0$,$\Delta<0$ 三类,是对 Δ 分类.

下面再举一个对参数进行三次分类的例子.

在实数范围内解方程

$$\sqrt{x^2-m}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

首先将原方程变形为

$$4x^2-4=x^2-2x\sqrt{x^2-m}+x^2-m$$

$$2x^2-(4-m)=-2x\sqrt{x^2-m}$$

$$4x^4+(4-m)^2-4x^2(4-m)=4x^4-4x^2m$$

$$8(2-m)x^2=(4-m)^2 \qquad ②$$

为求 x,需要对式 ② 的两边同时除以 $2-m$,这要解决零不能作除数这一运算法则问题,引起对 m 的第一次分类. 即 $2-m=0$ 或 $2-m\neq 0$ 两类讨论.

当 $m=2$ 时,方程 ② 化为 $0x^2=4$,无解.

当 $m\neq 2$ 时,方程 ② 化为

$$x^2=\frac{(4-m)^2}{8(2-m)} \qquad ③$$

因为 $x^2\geqslant 0$,所以解 $x^2=\dfrac{(4-m)^2}{8(2-m)}\geqslant 0$ 得 $m=4$ 或 $m<2$.

于是要对 m 分为 $m=4$ 或 $m<2$ 两种情况讨论. 从而引起对 m 的第二次分类.

当 $m=4$ 时,由方程 ③,$x=0$;

当 $m<2$ 时,由方程 ③

$$x=\pm\sqrt{\frac{(4-m)^2}{8(2-m)}}=\pm\frac{4-m}{2\sqrt{4-2m}}$$

再由已知方程知 $x\geqslant 0$,于是 $x=\dfrac{4-m}{2\sqrt{4-2m}}$.

把 $x=\dfrac{4-m}{2\sqrt{4-2m}}$ 代入已知方程并整理得

$$|3m-4|+2|m|=4-m \qquad ④$$

这是一个含绝对值符号的关于 m 的方程,为了去掉绝对值符号,又要对小于 2 的 m 进行第三次分类.

当 $m\leqslant 0$ 时,方程 ④ 化为

$$-(3m-4)-2m=4-m$$

解得 $m=0$.

当 $0<m\leqslant\dfrac{4}{3}$ 时,方程 ④ 化为

$$-(3m-4)+2m=4-m$$

这是一个恒等式.

当$\frac{4}{3}<m<2$时，方程④化为

$$(3m-4)+2m=4-m$$

解得$m=\frac{4}{3}\notin\left(\frac{4}{3},2\right)$，此时无解.

由以上的讨论，当$0\leqslant m\leqslant\frac{4}{3}$时，方程④成立，因而原方程有解为

$$x=\frac{4-m}{2\sqrt{4-2m}}$$

这个方程是经过三级分类才逐步解决的.

总之，分类讨论与整合的思想是一个重要的数学思想，在解题时，遇到多种情况时，要有分类的意识，要想到分类，还要注意科学地按分类的原则进行分类，才能准确地完整地解决问题.

第二节　用分类与整合的思想解题举例

我们以引起分类的各种原因为线索，通过例题介绍在解题时，有没有分类意识，遇到应该分类的情况，是否想到要分类，什么样的问题需要分类？如何分类？如何做到科学地分类，使分类的标准统一，不重不漏？分类之后如何研究？如何整合？这是一系列用分类与整合的思想指导解题的思路和步骤.

（一）由概念的分类定义引起的分类

【例 1】 (2006 辽宁卷理 11) 已知函数$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}|\sin x-\cos x|$，则$f(x)$的值域是(　　).

A. $[-1,1]$　B. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$　C. $\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　D. $\left[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【分析及解】 本题给出的函数是一个含有绝对值符号的函数，就要针对$\sin x-\cos x$的正负进行分类，写成分段函数

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}|\sin x-\cos x|=$$

$$\begin{cases}\cos x & (\sin x\geqslant\cos x)\\ \sin x & (\sin x<\cos x)\end{cases}$$

当 $\sin x \geqslant \cos x$，即 $2k\pi+\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k \in \mathbf{Z})$ 时

$$f(x)=\cos x, f(x) \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

当 $\sin x < \cos x$，即 $2k\pi-\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{4}(k \in \mathbf{Z})$ 时

$$f(x)=\sin x, f(x) \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

故选 C.

【例 2】（2008 广东卷理 14）已知 $a \in \mathbf{R}$，若关于 x 的方程 $x^2+x+\left|a-\frac{1}{4}\right|+|a|=0$ 有实根，则 a 的取值范围是________.

【分析及解】 本题有两个绝对值符号 $\left|a-\frac{1}{4}\right|$ 和 $|a|$，为去掉绝对值符号，就要把全体实数分为 3 种情形讨论.

(1) 当 $a<0$ 时，方程为 $x^2+x+\frac{1}{4}-2a=0$，此时 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=2a<0$，方程无解；

(2) 当 $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$ 时，方程为 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$，有实根 $x=-\frac{1}{2}$；

(3) 当 $a>\frac{1}{4}$ 时，方程为 $x^2+x-\frac{1}{4}+2a=0$，此时 $\Delta=1-4\left(-\frac{1}{4}+2a\right)=2-8a<0$，方程无解.

综上所述，a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

【例 3】 已知 a 为实数，对于 x 的一切实数值，二次函数

$$y=x^2-4ax+2a+30$$

的值为非负数. 求方程

$$\frac{x}{a+3}=|a-1|+1$$

的根的范围.

【分析及解】 显然，为了求 $x=(a+3)(|a-1|+1)$ 的范围，需要求出参数 a 的范围.

由于对于 x 的一切实数值

$$y=x^2-4ax+2a+30 \geqslant 0$$

则

$$\Delta=(-4a)^2-4(2a+30) \leqslant 0$$

解得

$$-\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant 3$$

把 $x=(a+3)(|a-1|+1)$ 看做 a 的函数，设

$$g(a)=(a+3)(|a-1|+1)\quad\left(-\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant 3\right)$$

首先要去掉绝对值符号，就要以 $a<1$ 或 $a\geqslant 1$ 并结合 $-\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant 3$ 为标准进行分类：

(1) 当 $-\frac{5}{2}\leqslant a<1$ 时

$$|a-1|=1-a$$
$$g(a)=(a+3)(2-a)=-a^2-a+6$$

其对称轴为 $a=-\frac{1}{2}$，于是有

$$g\left(-\frac{5}{2}\right)\leqslant g(a)\leqslant g\left(-\frac{1}{2}\right)$$

于是
$$\frac{9}{4}\leqslant x\leqslant\frac{25}{4}$$

(2) 当 $1\leqslant a\leqslant 3$ 时

$$|a-1|=a-1$$
$$g(a)=a(a+3)=a^2+3a$$

其对称轴为 $a=-\frac{3}{2}$，此时 $g(a)$ 在 $1\leqslant a\leqslant 3$ 时是增函数，于是有

$$g(1)\leqslant g(a)\leqslant g(3)$$

于是
$$4\leqslant x\leqslant 18$$

综合(1)，(2) 得方程 $\frac{x}{a+3}=|a-1|+1$ 的根的范围是 $\frac{9}{4}\leqslant x\leqslant 18$.

【例 4】 (2005 浙江卷理 16) 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称，且 $f(x)=x^2+2x$.

(Ⅰ) 求函数 $g(x)$ 的解析式；

(Ⅱ) 解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$；

(Ⅲ) 若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，求实数 λ 的取值范围.

【分析及解】 (Ⅰ) 设函数 $y=f(x)$ 的图象上任一点 $Q(x_q,y_q)$ 关于原点的对称点为 (x,y)，则

$$\begin{cases}\dfrac{x_q+x}{2}=0\\ \dfrac{y_q+y}{2}=0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_q=-x\\ y_q=-y\end{cases}$$

因为点 $Q(x_q,y_q)$ 在函数 $y=f(x)$ 的图象上，所以 $-y=x^2-2x$，故 $g(x)=-x^2+2x$.

(Ⅱ) 由 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$ 可得 $2x^2-|x-1|\leqslant 0$，需对 $x\geqslant 1$ 和 $x<1$ 分类.

当 $x\geqslant 1$ 时，$2x^2-x+1\leqslant 0$，此时不等式无解；

当 $x<1$ 时，$2x^2+x-1\leqslant 0$，解为 $-1\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$，因此，原不等式的解集为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

(Ⅲ) $h(x)=-(1+\lambda)x^2+2(1-\lambda)x+1$.

首先，要针对 $h(x)$ 是一次函数还是二次函数进行分类. 对于二次函数，又要对 $h(x)$ 图象的开口方向的不同进行分类.

(1) 当 $\lambda=-1$ 时，$h(x)$ 是一次函数，$h(x)=4x+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，所以 $\lambda=-1$；

(2) 当 $\lambda\neq -1$ 时，对称轴的方程为 $x=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

① 当 $\lambda<-1$ 时，二次函数 $h(x)$ 的图象开口向上，若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，应满足 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\leqslant -1$，解得 $\lambda<-1$；

② 当 $\lambda>-1$ 时，二次函数 $h(x)$ 的图象开口向上，若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，应满足 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\geqslant 1$，解得 $-1<\lambda\leqslant 0$.

综上所述，$\lambda\leqslant 0$.

【例 5】 (2004 北京卷理 19 文 19) 某段城铁线路上依次有 A，B，C 三站，$AB=5$ km，$BC=3$ km，在列车运行时刻表上，规定列车 8 时整从 A 站发车，8 时 7 分到达 B 站并停车 1 min，8 时 12 分到达 C 站. 在实际运行中，假设列车从 A 站正点发车，在 B 站停留 1 min，并在行驶时以同一速度 v km/h 匀速行驶，列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

(Ⅰ) 分别写出列车在 B，C 两站的运行误差；