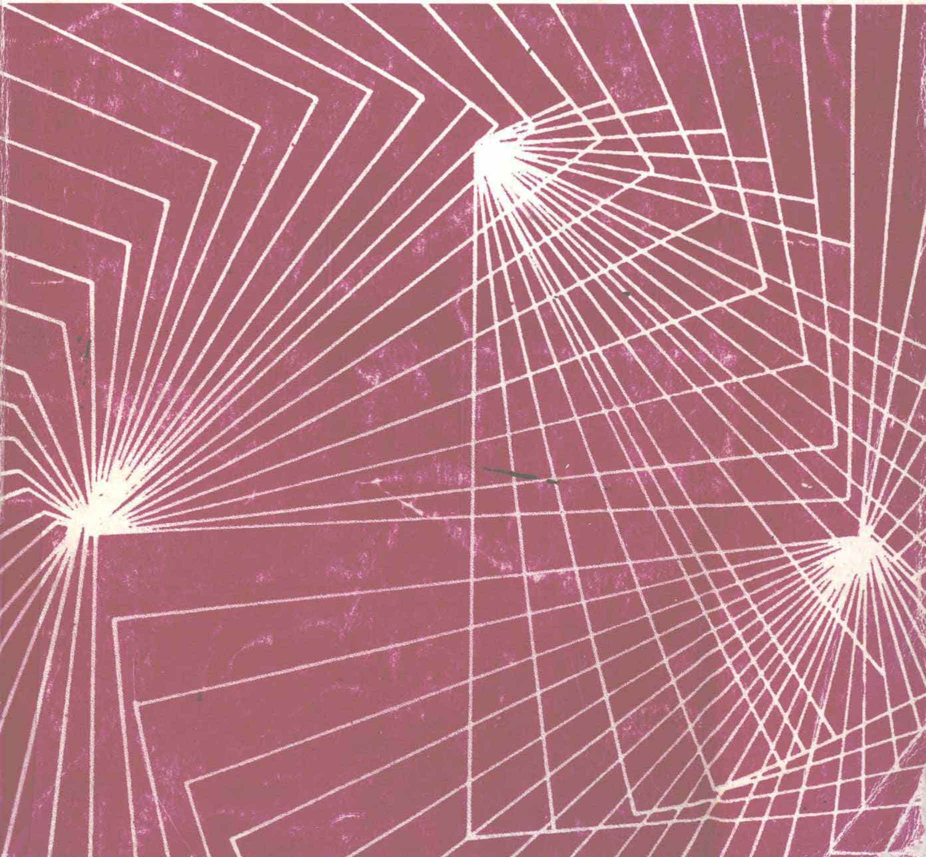
成人高等教育教材

线性代数与概率论

谢满耀　温向阳　吴　满　编

（第二版）

华南理工大学出版社



成人高等教育教材

线性代数与概率论

第 二 版

谢满耀 温向阳 吴 满 编

华南理工大学出版社
·广州·

内容提要

本书是根据全国普通高等理工院校成人教育数学研究组制定的普通高等理工院校成人教育线性代数与概率论专科教学基本要求，并参考广东省自学考试委员会制定的线性代数与概率论(专科)考试大纲编写而成的。

本书分为线性代数与概率论两部分。第一部分为线性代数，主要内容有矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型；第二部分为概率论，主要内容有随机事件的概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征。各章后都列有习题，书末还附有习题答案和详细的习题解答。

本书深入浅出，叙述详细，清楚易懂，便于自学，适合作各类成人高等教育的教材，亦适合于社会青年和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率论／谢满耀等编．—2版．—广州：华南理工大学出版社，2000.3

ISBN 7-5623-0425-4

Ⅰ.线…　Ⅱ.谢…　Ⅲ.线性代数-概率论　Ⅳ.O151

华南理工大学出版社出版发行

（广州五山　邮编 510640）

责任编辑　潘宜玲

各地新华书店经销

广州市新明光印刷有限公司印装

*

2000年3月第2版第7次印刷

开本：787×1092　1/32　印张：11.125　字数：264千

印数：32 001—37 000册

定价：18.00元

编者的话

本书原计划是已出版的《高等教学》的第三册，现以《线性代数与概率论》书名独立出版。

本书由“华南理工大学成人教育学院成人高等教育教材编辑委员会”统一领导编写。全书由谢满耀主笔，温向阳协助编写，最后由吴满统编定稿并担任主审。洪潮兴老师极为关心本书的编写，对本书提供了不少的修改意见，在此表示真诚的感谢。

由于编者学识有限，书中不妥之处难免，恳请广大读者批评指正，谨致谢意。

编　者

目　录

第一部分　线性代数

第二部分 概 率 论

第一部分　线性代数

第一章　n 阶行列式

一、n 阶行列式的定义

设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，若将其排列如下：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中记号 Δ 具有 n 个横排 n 个纵排，则 Δ 叫做 n 阶行列式，它表示一个数. a_{ij} 叫做行列式的元素. 行列式的横排叫做行，纵排叫做列. 例如，a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的元素. 要注意的是元素的双下标中的第一个数表示元素所在的行数，第二个数表示元素的双下标列数. 从 a_{11} 到 a_{nn} 的斜线叫做行列式的主对角线，a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn} 称为主对角线元素.

在行列中划去第 i 行、第 j 列后的（$n-1)^2$ 个元素，按原有次序排成一个新的（$n-1$）阶行列式，叫做元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 用（$-1)^{i+j}$ 乘以 M_{ij} 所得到的式子叫做 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}. 可见 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

下面我们来说明行列式的意义：

当 $n=1$ 时，规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，等号左端不是绝对值记号，而是行列式记号.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}|a_{22}|+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}|a_{11}|$$
$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

其中 A_{11}，A_{12}分别为 Δ 中元素a_{11}，a_{12}的代数余子式.

当 $n=3$ 时，三阶行列式定义为

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+$$
$$a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

其中 A_{11}，A_{12}，A_{13}分别为 Δ 中元素a_{11}，a_{12}，a_{13}的代数余子式.

在此基础上可以定义四阶行列式.

当 $n=4$ 时，四阶行列式定义为

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=\sum_{j=1}^{4}a_{ij}A_{ij}$$

其中 A_{ij} 是 Δ 中元素 a_{ij}（$j=1$，2，3，4）的代数余子式，可见 A_{ij} 是三阶行列式．有了四阶行列式就可以定义五阶行列式，有了五阶行列式就可以定义六阶行列式等等．依次类推，假定已有了（$n-1$）阶行列式的定义，我们就可以定义 n 阶行列式．

设 n 阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n=1$ 时，Δ 就是 a_{11}；当 $n\geqslant 2$ 时，其定义为

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中 A_{1j}（$j=1$，2，…，n）为 Δ 中元素 a_{1j} 的代数余子式，它们都是（$n-1$）阶行列式，假定已有定义．

以上定义可概括为一句话：n 阶行列式的值等于第一行所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

例 1 证明

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}$$

证 按定义

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

用数学归纳法可证得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理还可证得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

以上两个行列式分别称为下三角行列式与上三角行列式，由此即可得到对角行列式（其中未写出的元素都是0）.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例 2 计算行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

解 按定义有

$$\Delta=(-1)^{1+1}3\begin{vmatrix}2&1&3\\2&-3&4\\0&-2&3\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}3\begin{vmatrix}-4&2&1\\1&2&-3\\2&0&-2\end{vmatrix}$$

其中有两个三阶行列式要乘以 0，故不出现．再按定义计算上式右端的两个三阶行列式，则可得 $\Delta=-48$.

二、n 阶行列式的性质

定理 n 阶行列式等于任意一行（或一列）所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和．就是说，设

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\\&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(\text{按第 } i \text{ 行展开的展开式}, i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta&=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\\&=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(\text{按第 } j \text{ 列展开的展开式}, j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

以此定理为基础,可以顺利地推出行列式的一系列性质.

把行列式的行转为相应的列而不改变元素的先后次序所得的行列式叫做原行列式的转置行列式．常用 Δ^{T} 表示行列式 Δ 的转置行列式，即若

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

则

$$\Delta^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 任一行列式与其转置行列式相等.

这个性质表明，一个行列式对于行有什么性质，对于列也有同样性质，反之也对.

性质 2 对调行列式两行（或两列）所得的行列式等于原行列式乘以（-1）.

例如下面的行列式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

对调其第一行、第三行得

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -\Delta$$

性质 3 如果行列式有两行（或两列）对应元素相同，则行列式为 0.

例如：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}=0$$

性质 4 如果行列式中有一行（或列）元素全为 0，则行列式为 0.

例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

性质 5 以常数 k 乘以行列式的某一行（或列）的所有元素所得新的行列式等于用 k 乘以原行列式. 例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & ka_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

由此性质可知，如果行列式中某行（或列）所有元素有公因子，就可把这公因子提到行列式外面来；如果两行（或两列）对应元素成比例，则这个行列式为 0.

性质 6 如果行列式的某一行（列）的所有元素都是两项之和，则行列式可以表示为两个行列式之和. 例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}
$$

性质 7 用一个任意常数 k 乘以某一行（或列）的各个元素，然后再加到另一行（列）对应的元素上去，所得新行列式等于原行列式.

例如：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+ka_{21} & a_{n2}+ka_{22} & \cdots & a_{nn}+ka_{2n} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

约定记号：用 r_i 表示第 i 行，c_i 表示第 i 列. $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示互换第 i 行与第 j 行，kr_i 表示用数 k 乘以第 i 行，用 $r_i \pm kr_j$ 表示第 i 行加（减）k 与第 j 行之积. 同样地可得到关于行列式列的记号，如 $c_i \leftrightarrow c_j$，kc_i，$c_i \pm kc_j$.

性质 8 行列式某一行（或列）各元素与另一行（或列）对应元素的代数余子式乘积之和为 0，即

$$
a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0
$$

$$
(i \neq j;\ i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)
$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0$$
$$(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

行列式的性质在研究行列式的一般理论以及简化行列式计算方面都起着重要作用.

例 1 计算行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}30 & 11 & 20 & 38\\ 6 & 3 & 0 & 9\\ 11 & -2 & 36 & 3\\ 19 & 6 & 17 & 22\end{vmatrix}$$

解 第二行的元素除一个是 0 外，其余都是 3 的倍数. 因此，保持第二列不动，依次用 -2，-3 乘以第二列，然后分别加到第一列和第四列上去，可得

$$\Delta=\begin{vmatrix}8 & 11 & 20 & 5\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 15 & -2 & 36 & 9\\ 7 & 6 & 17 & 4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}8 & 20 & 5\\ 15 & 36 & 9\\ 7 & 17 & 4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}8 & 20 & 5\\ 8 & 19 & 5\\ 7 & 17 & 4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 8 & 19 & 5\\ 7 & 17 & 4\end{vmatrix}$$

$$=(-3)\begin{vmatrix}8 & 5\\ 7 & 4\end{vmatrix}=(-3)(32-35)=9$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

解 将行列式的第二列到第 n 列各乘以 1 逐次加到第一列中得

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

例 3 证明当 $a \neq -1$ 时行列式

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a \\ a+2 & a & a+1 \end{vmatrix}$$

能被 $a+1$ 整除.

证

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a \\ a+2 & a & a+1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 3a+3 & a+1 & a+2 \\ 3a+3 & a+2 & a \\ 3a+3 & a & a+1 \end{vmatrix}$$