# 高等代数

## 探究性课题精编

■ 主编 邱 森 朱林生

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等代数探究性课题精编/邱森,朱林生主编.—武汉:武汉大学出版社,2012.1

ISBN 978-7-307-09354-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.①邱…　②朱…　Ⅲ.高等代数—研究　Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 249086 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:787×1092　1/16　印张:26.5　字数:475 千字　插页:1

版次:2012 年 1 月第 1 版　　2012 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-09354-6/O·462　　定价:38.00 元

# 前　言

数学在不断地发展与创新，学习数学的方式也要与时俱进，必须把现代的数学观反映到数学教学中来. 现代数学的发展使人们认识到数学是一门研究模式的科学（其中所谓的“模式”有着极广泛的内涵，包括了数的模式，形的模式，运动与变化的模式……这些模式可以是现实的，也可以是想象的；可以是定量的，也可以是定性的），学习数学时，不仅需要学习各种数学知识，进行各种计算或演绎，还需要学习探究模式（它涉及模式的观察、猜测的检验以及结果的估计），也就是说，在数学知识发生、发展和应用的探究过程中，所获得的结果固然重要，探究过程本身也是很有价值的. 在探究过程中，要勇于质疑，敢于提出想法，善于发现、提出、解决数学问题，这都有助于提高学生的数学思维层次，发展创新意识和实践能力.

在《高等代数探究性课题集》（见 [21]）的基础上，我们进一步搜集和整理国内外有关资料，将原有的 23 个课题引申和拓广，并编写了新课题，现总共 43 个课题，供学生探究性学习或教师进行高等代数研究使用. 这些课题背景丰富有趣，题材涉及行列式、线性方程组、矩阵、矩阵对角化、若尔当标准形、二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间、多项式等高等代数的方方面面，有些课题具有一定的综合性或应用性，有的课题还能产生意料不到的有趣的结果. 对每个课题，我们一开始就阐明其背景、目的和意义，并提出本课题的**中心问题**，让学生围绕某个中心问题进行**课题探究**. 书中采用问题链的形式，给读者以启发、引导，帮助读者明晰进一步探究的思路，从而使他们对数学研究工作是如何提出问题，如何思考问题，如何发展问题能有所感悟. 每个课题都附有**问题解答**，但我们希望读者自己进行探索，甚至一接触该课题或者一看到“中心问题”，就独立思考，自主探究. 在这次编写中，我们还在各课题中新增了**探究题**栏目，以丰富探究性的层次.

一切学习行为都是由动机引起的，本书为成功创造了机会. 做了一些例子，形成了猜测，解决了问题，改进所用方法，引出新的方法、新的问题，将所用方法推广到新问题中……只要有提高，那就是成功. 每次成功都会使

人有更强的动机去学习更多的东西，去探究、去发现更多的东西，以至得到“超常”发挥.

富有创新能力的人的显著特点在于其发现问题的能力，而不仅仅是解决这些问题的能力. 求学问，需学问. 发现别人没讲透、没讲清楚，或者发现别人还没发现的问题都是值得研究的问题，都有可能搞出新东西. 具有创造性的人往往具有敏锐的感知能力，感觉到问题的存在，在将问题明确后，还具有把“复杂问题简单化”的本领，他们有很强的联想能力和解决问题的能力，经常会产生人们意料不到的想法，创见性地解决问题. 本书为创新能力的培养设置了情景，构建了平台，读者通过探究性学习，可以积累创造性思维的经验，培养初步的数学研究能力.

成功没有捷径，克服和超越的困难越大，过程中收获也越大. 经过时间的历练、岁月的积淀，只要过了那些坎，必定会见到另一片天地.

在本书编写的过程中，首都师范大学石生明教授提供了他在教学实践中多年积累的课题，我们深表谢意. 我们还得到了武汉大学出版社的协助，在此也深表谢意. 最后，本书只是为展开高等代数课题的探究性学习抛砖引玉，对书中的不妥之处我们还企盼同行、读者批评指正.

**编　者**

2011 年 11 月

# 目　　录

# 0. 绪　言

## 数学探究——尝试数学研究的过程

数学探究即数学探究性课题学习，通过课题的探究，可以尝试数学研究的过程，获得数学创造的体验. 课题的探究过程常常包括：观察分析数学事实，提出有意义的数学问题，特例探讨，联想类比，合情推理，猜想试探，失败更正，改进扩充等. 通过数学探究可以培养长期起作用的洞察力、理解力以及探索和发现的能力，以获得不断深造的能力和创造能力.

数学探究课题的选择是完成探究性课题学习的关键. 课题的选择可以从以下几方面考虑：

1） 具有较强的探索性，有助于体验数学研究的过程，形成发现、探究问题的意识；

2） 具有一定的启示意义，不过于追求技巧难度，有助于对数学本质的理解，掌握内在的数学思想和方法；

3） 具有一定的实际背景，有较强的应用性，能体现数学的科学价值和应用价值，开阔视野；

4） 具有一定的发展余地，由此可以引出新的方法、新的问题和进一步的思考，有助于发挥想象力和创造力.

课题的素材是多样化的，可以是某些数学结果的推广和深入，可以是不同数学知识的联系和类比，可以从不同的角度对某些数学方法和结果进行探讨，也可以是数学知识的应用.

高等代数有丰富的探究性课题素材和背景材料. 例如：可以将数为元素的行列式和矩阵的秩的一些性质推广到元素为子块的分块矩阵中去，可以研究一些特殊的矩阵(如帕斯卡矩阵、友矩阵、有向图的关联矩阵等)，得到一些特殊的性质，可以对一些特殊类型的矩阵(如 2 阶矩阵、幂等矩阵、幂么矩阵、幂零矩阵、无限可分矩阵等)进行深入的研究，也可以从向量空间的角度来求矩阵的特征值与特征向量或者若尔当标准形等，有时建立各数学概念和方法之间、数学与其他学科以及实践之间的相互联系，也会产生一些意想不

到的新问题和新方法(如用轮换矩阵来解决多项式方程的求根问题，用数域扩张来解决尺规作图三大难题，用插值多项式或伯努利多项式来解决正整数幂的求和问题等)，以上这些题材的预备知识基本上都是所学的高等代数知识.

读者也可以从本书提供的课题和背景材料中发现和建立新的课题，甚至自己发现和提出问题并加以研究. 与数学研究工作一样，读者可以查阅相关的参考文献和资料，可以在计算机网络上查找和引证资料，也可以与他人交流合作，逐步培养良好的科学研究的习惯. 从长远的学习和高层次的思维来看，只有通过自己的思考，建立起自己的数学理解力，才能真正地学好数学；只有通过自己的探究工作，才能掌握独立探求新知识的方法，获得初步的科学研究能力. 有志于成才的读者们，如果你学有余力，不妨对高等代数探究性课题活动多付出一些努力，你会发现数学是饶有兴趣的，也是应用广泛的，你的研究能力会因此得到明显提高，同时你会发现学习其他课程的水平也在随之提高.

# 1. 斐波那契行列式序列

设数列$\{f_n\}$满足递推关系

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n = 2,3,\cdots \tag{1.1}$$

以及初始条件

$$f_0 = a, \quad f_1 = b, \tag{1.2}$$

则称它为**斐波那契数列**. 当(1.2)中取$a=0$, $b=1$时，由(1.1)得到的是标准斐波那契数列：0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，….

由[12]的课题34中，我们利用离散线性动态系统来探求斐波那契数列及其有关数列的通项公式，并利用斐波那契数列来产生伪随机数. 本课题将探讨如何用三对角矩阵(或海森堡(Hessenberg)矩阵)的行列式来构造斐波那契数列.

**中心问题** 求海森堡矩阵的行列式的值.

**准备知识** 行列式

## 课题探究

除主对角线、下对角线和上对角线外，其余元素皆为零的$n$阶矩阵称为**三对角矩阵**. 更一般地，上对角线以上的元素皆为零的但不是下三角方阵的$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$(也就是说，当$j>i+1$时$a_{ij}=0$，但存在某个$i$使得$a_{i,i+1}\neq 0$)称为**海森堡矩阵**，三对角矩阵是海森堡矩阵的特例.

**问题 1.1** 设$\boldsymbol{F}_n$是主对角线元素皆为1，上、下对角线元素皆为$i$的$n$阶三对角矩阵，即

$$\boldsymbol{F}_n = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

计算行列式$|\boldsymbol{F}_n|$，$n=1,2,3,4,5$，从中你发现什么规律？

**问题 1.2** 1) 设$n\geqslant 1$，$\boldsymbol{B}_n$是主对角线上除$b_{11}=1$，共余元素皆为2，上对角线元素皆为$-1$，在主对角线以下的元素皆为1的$n$阶海森堡矩阵，即

$$\boldsymbol{B}_n=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 2 & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

设$\boldsymbol{C}_n$是主对角线元素皆为2，上对角线元素皆为$-1$，在主对角线以下的元素皆为1的$n$阶海森堡矩阵，即

$$\boldsymbol{C}_n=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

计算行列式$|\boldsymbol{B}_n|$，$|\boldsymbol{C}_n|$，$n=1,2,3,4$，从中你发现什么规律？

2) 如果将$\boldsymbol{C}_n$中的上对角线元素$-1$全改为1，则得到$n$阶海森堡矩阵

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

计算行列式$|\boldsymbol{D}_n|$，$n=1,2,3,4$，从中你发现什么规律？

**探究题 1.1** 如果将问题1.1中三对角矩阵$\boldsymbol{F}_n$中(2,2)位置上的元素1改为2，则得到$n$阶三对角矩阵

$$\boldsymbol{L}_n=\begin{pmatrix}1 & i & 0 & \cdots & 0\\ i & 2 & i & \ddots & \vdots\\ 0 & i & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i\\ 0 & \cdots & 0 & i & 1\end{pmatrix}.$$

试探求行列式序列$\{|\boldsymbol{L}_n|\}$与斐波那契数列的对应关系.

从以上的讨论中，我们已经得到了计算一些特殊的海森堡矩阵的行列式

的递推关系式，是否能把它们加以推广，从而求得一般的海森堡矩阵的行列式的递推公式呢？

**探究题 1.2** 设 $M_n$ 是 $n$ 阶海森堡矩阵，

$$M_n=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \ddots & \vdots \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} & m_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $n\geqslant 1$. 定义 $|M_0|=1$，而 $|M_1|=m_{11}$，求行列式 $|M_n|$ ($n\geqslant 2$) 的递推关系式.

## 问题解答

**问题 1.1** $|F_1|=1$，$|F_2|=2$，$|F_3|=3$，将 $|F_4|$ 和 $|F_5|$ 分别按第 4 行和第 5 行展开，得

$$\begin{aligned}|F_4| &= |F_3|+(-1)i\cdot i\cdot|F_2|=|F_3|+|F_2|\\ &=3+2=5,\\ |F_5| &= |F_4|+(-1)i\cdot i\cdot|F_3|=|F_4|+|F_3|\\ &=5+3=8.\end{aligned}$$

可以发现，如果令 $|F_0|=1$，则行列式序列 $\{|F_n|\}$ 为 $\{1,1,2,3,5,8,\cdots\}$，是满足递推关系

$$|F_n|=|F_{n-1}|+|F_{n-2}|,\quad n=2,3,\cdots, \tag{1.3}$$

以及初始条件

$$|F_0|=1,\quad |F_1|=1$$

的斐波那契数列，其中只要将 $n$ 阶行列式 $|F_n|$ 按第 $n$ 行展开，就立即可证 (1.3) 成立.

**问题 1.2** 1) $|B_1|=1$，$|B_2|=3$，

$$\begin{aligned}|B_3| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{（按第 1 行展开）}\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5+3=8,$$

$$|\boldsymbol{B}_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{按第 1 行展开})$$

$$= 13+8=21.$$

$|\boldsymbol{C}_1| = 2$，$|\boldsymbol{C}_2| = 5$，

$$|\boldsymbol{C}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{按第 1 行展开})$$

$$= 2\times 5+3=13.$$

$$|\boldsymbol{C}_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{按第 1 行展开})$$

$$= 2\times 13+8=34.$$

可以发现，只要将$|\boldsymbol{B}_n|$（或$|\boldsymbol{C}_n|$）按第 1 行展开就可以得到

$$|\boldsymbol{B}_n| = |\boldsymbol{C}_{n-1}| + |\boldsymbol{B}_{n-1}|,$$

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{C}_n| &= 2|\boldsymbol{C}_{n-1}| + |\boldsymbol{B}_{n-1}| \\ &= |\boldsymbol{C}_{n-1}| + (|\boldsymbol{C}_{n-1}| + |\boldsymbol{B}_{n-1}|) \\ &= |\boldsymbol{C}_{n-1}| + |\boldsymbol{B}_n|. \end{aligned}$$

于是，行列式序列

$$|\boldsymbol{B}_1|, |\boldsymbol{C}_1|, |\boldsymbol{B}_2|, |\boldsymbol{C}_2|, |\boldsymbol{B}_3|, |\boldsymbol{C}_3|, |\boldsymbol{B}_4|, |\boldsymbol{C}_4|, \cdots$$

（即数列 1,2,3,5,8,13,21,34,…）构成斐波那契行列式序列.

2) $|\boldsymbol{D}_1| = 2$，$|\boldsymbol{D}_2| = 3$，

$$|\boldsymbol{D}_3|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\quad（按第3列展开）$$

$$=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}+\left(\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}$$ （利用行列式性质：如果行列式的一列元素是两组数的差，则这个行列式等于两个行列式之差）

$$=3+2=5,$$

$$|\boldsymbol{D}_4|=\begin{vmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}\quad（按第4列展开）$$

$$=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&1&1\end{vmatrix}=5+3=8.$$

可以发现，只要将$|\boldsymbol{D}_n|$按第$n$列展开就可以得到

$$|\boldsymbol{D}_n|=|\boldsymbol{D}_{n-1}|+|\boldsymbol{D}_{n-2}|,\quad n\geqslant 3,$$

因而行列式序列$\{|\boldsymbol{D}_n|\}$构成斐波那契行列式序列.

# 2. 分块矩阵的乘法

本课题将针对矩阵的行数和列数的一些特殊划分，讨论相应的特殊分块矩阵的乘法，并用分块矩阵的乘法证明矩阵乘法的结合律.

**中心问题** 给出各种特殊划分方式的分块矩阵乘法的公式.

**准备知识** 矩阵分块乘法

## 课题探究

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为 $q\times p$ 矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可以定义乘法当且仅当 $n=q$. 因此矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 定义为 $\boldsymbol{AB}=(c_{ij})$，是 $m\times p$ 矩阵，且

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,p.$$

对于行数与列数较高的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的运算，通常采用“分块法”，即用若干条纵线和横线把矩阵分成许多个小矩阵，每个小矩阵成为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块作为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，称这个形式矩阵为**分块矩阵**. 把大矩阵的运算转化为其子块的运算，这体现了数学的化归思想，即把复杂的问题转化为容易的问题. 具体到矩阵的运算，为了简化运算，我们往往采取把高阶矩阵的运算转化为分块矩阵的运算.

考虑矩阵作为分块矩阵的乘法时，如何来表述矩阵的分块呢？下面采用对集合 $\{1,\cdots,m\}$，$\{1,\cdots,n\}$ 和 $\{1,\cdots,p\}$ 进行划分的方式来表述. 如果 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 分别组成 $\{1,\cdots,m\}$ 和 $\{1,\cdots,n\}$ 的一个划分，$\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_s)$ 和 $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t)$ 分别组成 $\{1,\cdots,n\}$ 和 $\{1,\cdots,p\}$ 的一个划分，那么就把矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别分块如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix},$$