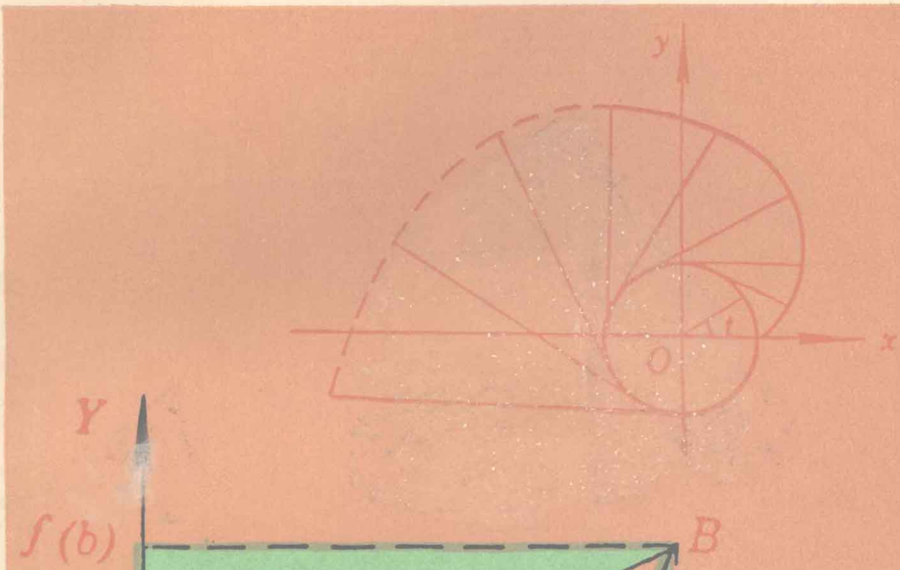
高等数学

（上册）

同济大学函授数学教研室 编著



同济大学出版社

高等工科院校函授自学教材

高 等 数 学

上 册

同济大学函授数学教研室 编

同济大学出版社

（沪）新登字204号

内容提要

本书在总结我校原先的函授《高等数学》教材基础上，根据有关"成人教育本科《高等数学》教学基本要求"而编写了这套《高等数学》函授自学教材。全书分上、下册。上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用，书末还附有积分表和习题解答等有关附录。

本书概念清楚，论述正确；循序渐进，由浅入深；例题较多，台阶较小；重点突出，难点分散；要求适当，便于自学。可作为函授高等工科院校的函授教材，也可作为工程技术人员的自学用书或参考书.

责任编辑　许纪森
封面设计　王肖生

高等数学
上册
同济大学函授数学教研室　编
同济大学出版社出版
（上海四平路 1239 号）
新华书店上海发行所发行
青浦任屯印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张 21　字数：504 千
1993年1月第1版　1993年1月第1次印刷
印数：1—6000　定价：6.70元
ISBN7—5608—1022—5/O・97

前　　言

本书是在总结我校原有的函授《高等数学》教材及多年来的函授教学经验的基础上，根据全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组制定的“成人教育本科《高等数学》教学基本要求”编写而成的．全书分上、下两册，其中上册为一元函数微积分；下册包括向量代数及空间解析几何，多元函数微积分，级数与微分方程等．

根据函授教学以“自学为主，面授为辅”的特点，我们在编写此书时，力求做到：概念清楚，论述正确；循序渐进，由浅入深；例题较多，台阶较小；重点突出，难点分散．为使教材便于自学，便于使用，具有多种功能，我们在编写时，注意采取了以下一些措施：

（1）取材“少而精”．对于超出教学基本要求的内容，一般都不编入；对于个别因后继课程用得较多的内容，则以＊号标出，可以不作为必读的内容，仅供需要时查阅参考．

（2）在内容的安排上，尽量保持章节间相对的独立性．照顾到少学时专业或专科类专业函授生使用时，可以方便地删减取舍．

（3）注意理论联系实际，重视学生能力的培养．尽可能使数学的概念、理论与应用相结合，并适当增加数学在物理、力学中的应用举例．

（4）在每章之末都编写了“自学指导”：一方面指出学习该章的基本要求及重点，使学生自学后能够“心中有数”；另一方面对于某些概念、重点或难点，为避免多占正文的篇幅，放入“自学指导”，指出应当注意的问题，并适当地解释和说明，以弥补函授生在自学中缺少教师指导的不足．

（5）贯彻“学练结合，适当反复”的教学原则．在每节后都附有较为简单的练习题，以供学生消化所学的内容；在每章之末配有习题，以供学生在自学的基础上，系统而又全面地消化巩固所学的知识；为便于复习或提高的需要，在每章之末还选编了适量的复

习思考题．这些习题在书后均附有答案，个别较难的题也都附有提示，可供学生参考．此外，为了定期检查学生的自学效果，书中还精心地选编了阶段性的测验作业题．

（6）考虑到学生多分散于各基层单位，查找有关资料可能不便，我们在上册书末还特地附有积分表、初等数学常用公式及平面解析几何（摘要）等附录，可供查阅．

参加本书编写的有本教研室顾吉衢、谈祝多、周忆行、周葆一、郭景德、刘浩荣等同志．其中第一、二、九、十、十一章由郭景德执笔；第三、五章由周葆一执笔；第四、十四、十五、十六章由周忆行执笔；第六、七、八、十二、十三章由刘浩荣执笔．顾吉衢、谈祝多担任编写工作的指导，刘浩荣组织全书的汇总定稿，并选编了上册末的有关附录的内容．

本书经同济大学谈祝多副教授及北京科技大学原函授部主任钱文侠研究员详细审阅．他们对全书的初稿提出了许多宝贵的意见，对于修改定稿起到了重要的作用．在编写过程中，我们曾广泛地参考了许多国内外的《高等数学》教材，特别是本校及其他兄弟院校编写出版（或未正式出版）的《高等数学》教材或函授专用教材．在此，我们一并表示衷心的感谢．

这套函授自学教材的编写出版，曾得到同济大学函授学院、应用数学系及同济大学出版社有关同志的关心与支持，也得到了本教研室的许多老师的热情帮助与支持，我们也深表感谢．

本书除了工科专业函授生可以作为《高等数学》教材使用外，也可供工科类成人教育的电大、职大、夜大学生及广大自学者或工程技术人员作为教材或自学参考书．对于全日制工科类专业的大学生也是比较合适的参考书．

由于我们的水平所限，书中难免有许多不足或错误之处，诚恳地希望广大读者批评指正．

编　者

1991 年 4 月于同济

目　录

第一章　函　数

函数是高等数学研究的主要对象。本章将在中学代数关于函数知识的基础上来进一步讨论函数。首先，我们用集合论的观点给出函数的一般定义，然后着重介绍后面的章节中常用到的概念：函数的特性、基本初等函数、复合函数及初等函数。

§1.1　集合、区间、邻域

一、集　合

研究事物时，常要按事物的某些性质进行归类，由此产生了集合的概念。一个**集合**(简称为**集**)是具有某种共同性质的事物的全体。集合中的每一个单一的事物称为集合的**元素**。

例如：

某车间的全部机器构成一个集合，车间中的每台机器是集合的元素。

小于 2 的所有实数构成一个集合，其中的每个实数是集合的元素；

直角坐标平面中，单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的点 (x,y) 的全体构成一个集合，单位圆上的每个点 (x,y) 是集合的元素。

本书主要用到的集合是**实数集**，即元素是实数的集合。全体实数构成的集合记作 R。本书还要用到元素是点(直线、平面、空间上的点)的集合，简称为**点集**。

集合常用大写的字母如 A,B,C,E,N,M 等表示；集合的元素常用小写的字母如 a,b,e,x,y,t 等表示。给定一个集合 M，若 a 是 M 的元素，则记作

$$a \in M \tag{1}$$

（读作 a 属于 M），若 a 不是 M 的元素，则记作

$$a \notin M（或\ a \overline{\in} M） \tag{2}$$

（读作 a 不属于 M）。

集合的构成常用**括号记法**表示。一般有两种表示方法：一种是把集合中所有的元素都一一列举出来，写在花括号"{ }"内。例如，全体自然数集可以表示成

$$N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\cdots\cdots\}.$$

另一种方法是在花括号内，左边写出集合的一个代表元素，右边写出集合的元素的性质，中间用符号"|"分开。例如，满足不等式 $-3<x<1$ 的一切实数 x 所构成的实数集，可以表示成

$$A = \{x \mid -3<x<1\}.$$

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $e \in A$，必有 $e \in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记作

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A \tag{3}$$

（读作 B 包含 A）。

若 A 是 B 的子集，而 B 又是 A 的子集，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作

$$A = B. \tag{4}$$

设集合 A 是集合 U 的子集，属于 U 而不属于 A 的所有元素构成的集合称为 A 在 U 内的**余集**，记作 $\bar{A}_U$，即

$$\bar{A}_U = \{e \mid e \in U，且\ e \notin A, A \subset U\}. \tag{5}$$

例如，集合 $A = \{1, 2\}$ 是集合 $U = \{1, 2, 4, 6\}$ 的子集。集合 A 在 U 内的余集为 $\bar{A}_U = \{4, 6\}$。

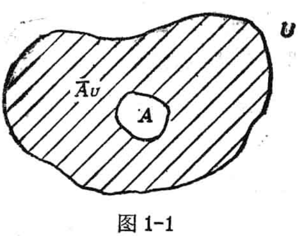


图 1-1

下面介绍有关集合的运算。

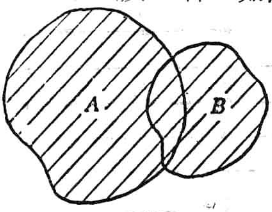
把两个集合 A 和 B 的元素合在一起构成一个新的集合（A 与 B 中若有两个元素相同，在新集合中只算一个元素），此集合称为 A 和 B 的**并集**，记作 $A \cup B$，即

$$A\cup B=\{e|e\in A \text{ 或 } e\in B\}. \tag{6}$$

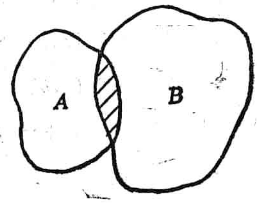
从两个集合 A 和 B 中，取出所有相同的元素构成一个新的集合，此集合称为 A 和 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{e|e\in A \text{ 且 } e\in B\}. \tag{7}$$

$A\cup B$ 及 $A\cap B$ 如图 1-2 所示。



$A\cup B$



$A\cap B$

图 1-2

例 1 设 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|2<x\leqslant 6\}$，求：$A\cup B$，$A\cap B$。

解 根据定义有

$$A\cup B=\{x|\ 1\leqslant x\leqslant 6\};$$

$$A\cap B=\{x|2<x\leqslant 5\}.$$

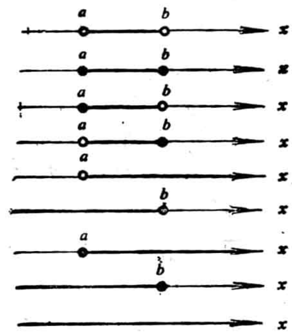
为了讨论方便，我们引入空集的概念。**不含有任何元素的集合称为空集**，记作 Φ。例如，集合 A 和它在 U 内的余集 $\overline{A}_U$ 的交集不含有任何元素，所以它是空集，即 $A\cap\overline{A}_U=\Phi$。再如，不存在同时满足不等式 $x<2$ 及 $x>3$ 的实数，因此，集合 $\{x|x<2 \text{ 且 } x>3\}=\Phi$。应注意，空集不能写成 $\Phi=\{0\}$。这是因为集合$\{0\}$中含有一个元素 0，所以它不是空集。

二、区　间

区间是常用的一类实数集。它的类型，定义及几何表示如表 1-1 所列。

表中的 a 和 b 称为**区间的端点**。数 $b-a$ 称为**区间的长度**。记号“$+\infty$”和“$-\infty$”分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，它们不代表任何实数。数轴上的记号“•”和“◦”分别表示区间包含该端点和不包含该端点。

表 1-1

	名称	记号	定　义	几　何　表　示
有限区间	开区间	(a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$	
	闭区间	$[a,b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
	半开区间	$[a,b)$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	
	半开区间	$(a,b]$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	
无限区间	开区间	$(a,+\infty)$	$\{x\mid a<x\}$	
	开区间	$(-\infty,b)$	$\{x\mid x<b\}$	
	半开区间	$[a,+\infty)$	$\{x\mid a\leqslant x\}$	
	半开区间	$(-\infty,b]$	$\{x\mid x\leqslant b\}$	
	开区间	$(-\infty,+\infty)$	$\{x\mid x\in R\}$	

三、绝对值和邻域

1．绝对值

一个实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时},\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{8}$$

常用的绝对值性质主要有：

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(2) $\big||a|-|b|\big|\leqslant |a-b|\leqslant |a|+|b|$①；

① 由性质(1)知：$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant |b|$，两式相加，得 $-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|$，所以

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

由于 $|a|=|a-b+b|\leqslant |a-b|+|b|$，故 $|a|-|b|\leqslant |a-b|$。又 $|b|=|b-a+a|\leqslant |b-a|+|a|$，故 $|b|-|a|\leqslant |b-a|$，即 $-(|a|-|b|)\leqslant |a-b|$，所以

$$\big||a|-|b|\big|\leqslant |a-b|.$$

(3) 若 $|a| \leqslant k$（k 是实数，$k>0$），则 $-k \leqslant a \leqslant k$；

(4) $|ab| = |a||b|$；

(5) $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$。

2. 邻域

从绝对值的性质（3）可以看到，满足不等式 $|x|<k$（k 是实数，$k>0$）的一切实数 x 所构成的集合是区间

$$(-k,k)=\{x|-k<x<k\}.$$

在数轴上，该区间关于原点 O 对称，所以我们又称它为**对称区间**。原点 O 称为**区间的中心**。正数 k 称为**区间的半径**。

类似于上面的讨论可知，集合 $\{x||x-a|<\delta\}$ 是一个以 a 为中心，δ 为半径的开区间：$(a-\delta,a+\delta)$，此区间又称为点 a 的 **δ-邻域**。

定义 设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，集合

$$\{x||x-a|<\delta\} \tag{9}$$

称为点 a 的 **δ-邻域**（图 1-3），记作 $U(a,\delta)$。点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**。

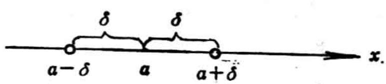


图 1-3

如果把邻域的中心 a 除去，即集合

$$\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的**去心 δ-邻域**（图 1-4），记作 $U(\hat{a},\delta)$。（注意：这里的 $0<|x-a|$ 表明了 $x \neq a$。）

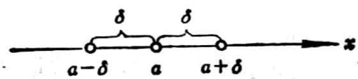


图 1-4