专著 西北工业大学出版基金资助项目 ZIZHU XIANGMU

ZHUANZHU

不确定原理引论

唐素芳　钮鹏程　郭千桥　著

西北工業大學出版社

不确定原理引论

唐素芳　钮鹏程　郭千桥　著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是作者对近年来关于不确定原理方向已有研究成果的总结，其内容既吸收了国外数学家关于这个领域的经典论述和最新研究进展，也包括了作者在此方向取得的一些研究成果. 为方便读者阅读，在撰写过程中尽量做到详尽，特别是对已有的来自国外文献的阐述做了较多补充，有些内容甚至改写或重写，以使得本书更加完备. 本书分为8章，包含欧氏空间、Heisenberg群、二步幂零Lie群、非紧秩1对称空间、调和 *NA* 群、半单Lie群、复空间以及Schwartz空间上的不同形式的不确定原理. 本书内容力图由浅入深，为对分析数学有兴趣的读者提供一本合适的参考书.

本书可供大学数学系学生、研究生、教师和有关的科学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

不确定原理引论/唐素芳，钮鹏程，郭千桥著．—西安:西北工业大学出版社，2011.11

ISBN 978-7-5612-3227-9

Ⅰ. ①不… Ⅱ. ①唐… ②钮… ③郭… Ⅲ. ①不确定系统 Ⅳ. ①N94

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第228739号

出版发行: 西北工业大学出版社
通信地址: 西安市友谊西路127号 邮编:710072
电 话: (029)88493844 88491757
网 址: www.nwpup.com
印 刷 者: 陕西兴平报社印刷厂
开 本: 850 mm×1 168 mm 1/32
印 张: 6.75
字 数: 172千字
版 次: 2011年11月第1版 2011年11月第1次印刷
定 价: 25.00元

前　言

不确定原理来源于多个学科领域. 在量子力学领域，不确定原理阐述了规范的共轭对(例如位移和动量)在任何量子状态下不能同时确定. 该原理最早出现在 Heisenberg 的论文中，并得到广泛的传播.

不确定原理在经典物理学中也有重要的解释. 例如，若用 $f(t)$ 表示在时间 t 处的信号(可以是声波，也可以是光波)，则 Fourier 变换 $\hat{f}$ 将告诉人们如何从不同频率的正弦波得到 f. 不确定原理表明了信号是能够同时被时间和频带限制的极限. 这是 N. Wiener 于 1925 年指出的，后来发表在 Gabor 的基础性著作中，使得不确定原理成为信号分析的基础之一，并渗透到其他领域.

从数学上来看，人们感兴趣的是函数与其 Fourier 变换究竟有怎样的衰减，才会使这个函数等于 0. 1933 年，Hardy 发表了刻画实直线上可积函数与其 Fourier 变换之间关系的一个重要结果(现在通常将其称为 Hardy 定理)，并指出了非零函数与它的 Fourier 变换不能同时精确地局部化，即它们不能同时在无穷远处速降(现在常称之为不确定原理).

之后，Hardy 定理受到数学界的广泛关注并得到各种推广，其形式主要有 Cowling - Price 定理(实直线上的 L^p-L^q 形式的 Hardy 定理)，Morgan 定理(实直线上的 $p-q$ 形式的 Hardy 定理)以及 Beurling 定理(可包括前述这些定理). Hardy 不确定原理在数个不同方向上得到进一步发展，如推广到齐型空间上、半单 Lie 群上 或叙述成相空间上时间-频率分布的衰减. 别的方向包括 Hardy 不确定原理的变形的研究，关于 Hermite 展开和相关算子的特征值的衰

减的叙述. 这些推广的证明几乎都是归结为 Hardy 型不确定原理[1] 或 Beurling 型不确定原理[2] 的最初形式.

Thangavelu 在其相关著作中介绍了欧氏空间、Heisenberg 群及非紧秩 1 对称空间上调和分析的基础知识，包括 Fourier 变换和酉表示，论述了这三类空间上的 Hardy 不确定原理. Hardy 不确定原理涉及 Fourier 变换，而在代数、分析、几何中有重要作用的幂零 Lie 群、半单 Lie 群中的酉表示或群 Fourier 变换可看做是欧氏空间中 Fourier 变换的对应物，这使得在比欧氏空间更为广泛的非交换 Lie 群中研究 Hardy 不确定原理变得自然. 本书就是在这样的背景下试图把经典理论、作者学习的体会及取得的一些研究成果进行较为系统的整理和总结，以便于相关数学工作者较为便利地进入该研究领域.

本书内容只包括作者近几年了解和涉及的知识. 从理论或应用上看，不确定原理的范围实际上非常广泛，有兴趣的读者可参考 V. Havin 和 B. Jöricke 著的 *The uncertainty principle in harmonic analysis*. 正因如此，本书定名为《不确定原理引论》. 不确定原理研究中尚有许多未解决的问题，欲在此领域开展研究工作的读者可在 Thangavelu 的著作 *An Introduction to the Uncertainty Principle* 中找到许多问题.

我们的导师罗学波教授从 1984 年开始与他指导的博士生以幂零 Lie 群上的酉表示作为工具研究不变微分算子的亚椭圆性、可解性和谱性质. 我们利用酉表示在 Hardy 不确定原理方面进行研究也可看做是罗学波教授开创的本方向研究的延续.

2009 年 3 月 28 日至 4 月 1 日，我们受刘和平教授邀请前往北京大学参加“非交换调和分析学术研讨会”，与彭立中教授、刘和平教授及国内调和分析方向的众多专家进行了有益的交流. 这对本书的撰写和完成有极大的帮助. 在此谨向他们表示衷心的感谢.

本书由 8 章组成. 第 1～2 章介绍欧氏空间和 Heisenberg 群上

的不确定原理，其中欧氏空间情形主要取材于参考文献[1][2][5]和[6]，Heisenberg 群情形主要取材于参考文献[6]和[7].

第 3 章是关于二步幂零 Lie 群上的不确定原理，主要取材于参考文献[8]及我们自己的研究结果[9].

第 4 章是关于非紧秩 1 对称空间上的不确定原理，主要取材于参考文献[5]及我们自己的研究结果.

第 5 章讨论调和 NA 群上的不确定原理，主要取材于我们自己的研究结果[10-11].

第 6 章讨论半单 Lie 群上的不确定原理，主要取材于我们自己的研究结果[12-14].

第 7 章研究复空间上的不确定原理，关于复平面的情形主要取材于参考文献[15]，关于一般复空间的情形则是我们自己的研究结果[16].

第 8 章是关于 Schwartz 函数的短时 Fourier 变换及 Hardy 形式的不确定原理，主要取材于参考文献[17]及我们自己的研究结果[16].

全书的材料有多处取材于已有文献，但在整理过程中有些结果的证明重写了，有些内容进行了补充. 为方便读者，本书内容尽量写得详细和完备，以使读者只需实变函数、复变函数和泛函分析初步知识即可阅读. 本书是由唐素芳(西安财经学院)、钮鹏程(西北工业大学)和郭千桥(西北工业大学)合作完成的。陕西师范大学魏广生教授、西北工业大学丁晓庆教授、张胜贵教授审阅了书稿，提出了许多建设性的意见和建议. 在此谨向他们表示衷心的感谢.

由于学识浅薄，不足之处在所难免，欢迎读者和专家指正.

著　者

目　录

第 1 章　欧氏空间上的不确定原理 ······························ 1

1.1　实直线上的不确定原理 ······························ 1

1.2　欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的不确定原理 ······························ 11

习题 1 ······························ 19

第 2 章　Heisenberg 群上的不确定原理 ······························ 20

2.1　Heisenberg 群的基础知识 ······························ 20

2.2　Heisenberg 群上 Hardy 形式的不确定原理 ············ 25

2.3　Heisenberg 群上 Cowling-Price 形式的不确定原理 ··· 36

习题 2 ······························ 40

第 3 章　二步幂零 Lie 群上的不确定原理 ······························ 42

3.1　二步幂零 Lie 群的基础知识 ······························ 42

3.2　二步幂零 Lie 群上的 Hardy 形式的不确定原理 ······ 49

3.3　二步幂零 Lie 群上的 Cowling-Price 形式的不确定原理 ······························ 52

习题 3 ······························ 63

第 4 章　非紧秩 1 对称空间上的不确定原理 ······························ 64

4.1　非紧秩 1 对称空间的基础知识 ······························ 64

4.2 非紧秩 1 对称空间上的 Hardy 形式的不确定原理 …… 69
4.3 非紧秩 1 对称空间上的 Cowling-Price 形式的不确定原理 …… 74
4.4 非紧秩 1 对称空间上的 Beurling 形式的不确定原理 …… 82
习题 4 …… 93

第 5 章 调和 *NA* 群上的不确定原理 …… 94

5.1 调和 NA 群的基本结构和球分析 …… 94
5.2 调和 NA 群上的 Hardy 不确定原理 …… 105
5.3 调和 NA 群上 Cowling-Price 形式的不确定原理 …… 109
习题 5 …… 120

第 6 章 半单 Lie 群上的不确定原理 …… 121

6.1 半单 Lie 群的基础知识 …… 121
6.2 半单 Lie 群上 Hardy 形式的不确定原理 …… 124
6.3 半单 Lie 群上 Cowling-Price 形式的不确定原理 …… 128
6.4 $SL(2,\mathbf{C})$上 Beurling 形式的不确定原理 …… 132
习题 6 …… 147

第 7 章 复空间上的 Hardy 不确定原理 …… 148

7.1 复平面上 Hardy 形式的不确定原理 …… 148
7.2 多复变空间上的 Hardy 定理和旋转 …… 158
习题 7 …… 175

第 8 章 关于 Schwartz 函数的 Hardy 不确定原理 ················ 176

8.1 与短时 Fourier 变换相关的 Hardy 不确定原理 ······ 176

8.2 Schwartz 空间上与 Weyl 变换相关的 Hardy 不确定原理 ································ 190

习题 8 ··· 198

参考文献 ··· 199

第 1 章　欧氏空间上的不确定原理

本章分 2 节，第 1 节为建立实直线上的不确定原理；第 2 节为建立欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的不确定原理.

1.1　实直线上的不确定原理

本节给了出实直线上的不确定原理(包括 Hardy 不确定原理、Cowling-Price 不确定原理、Morgan 不确定原理以及 Beurling 不确定原理). 首先，我们给出几个要用到的概念和引理.

定义 1.1.1　(1) 令 f 是定义在实直线 $\mathbf{R}$ 上的函数，它的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(y)=\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\mathrm{d}x$$

Fourier 逆变换定义为

$$f(x)=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbf{R}}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y}\mathrm{d}y$$

(2) 由等式 $H_n(x)=(-1)^n(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\{\mathrm{e}^{-t^2}\}\mathrm{e}^{t^2})$ 给出的 $H_n(x)$ 称为 Hermite 多项式，且称

$$\phi_n(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\mathrm{e}^{-x^2}$$

为 Hermite 函数. 注意到 $\phi_n(x)$ 的 Fourier 变换为 $(-\mathrm{i})^n\phi_n(x)$.

引理 1.1.2(Phragmén-Lindelöf 定理)[19]　设 $f(z)$ 为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的解析函数，它位于在原点处相交成 π/α 角的两条直线间的区域 D 中，且在这两条直线上都正则(即可导). 假定

（i）在这些直线上，$|f(z)|\leqslant M$；

（ii）当 $r\to\infty$ 时，在角状区域 D 中一致地有 $f(z)=O(e^{r^{\beta}})$，$\beta<\alpha$，则 $|f(z)|\leqslant M$ 在整个区域 D 中都成立.

证明：不失一般性，我们可以假设这两条直线就是 $\theta=\pm\pi/(2\alpha)$. 令

$$F(z)=e^{-\varepsilon z^{\gamma}}f(z)$$

其中 $\beta<\gamma<\alpha$，$\varepsilon>0$，则有

$$|F(z)|=e^{-\varepsilon r^{\gamma}\cos(\gamma\theta)}|f(z)|$$

因为 $\gamma<\alpha$，故在直线 $\theta=\pm\pi/(2\alpha)$ 上 $\cos(\gamma\theta)>0$. 所以在这两直线上

$$|F(z)|\leqslant|f(z)|\leqslant M$$

又在圆 $|z|=R$ 的弧段 $|\theta|\leqslant\pi/(2\alpha)$ 上

$$|F(z)|=e^{-\varepsilon R^{\gamma}\cos(\frac{1}{2}\gamma\pi/\alpha)}|f(z)|<Ce^{R^{\beta}-\varepsilon R^{\gamma}\cos(\frac{1}{2}\gamma\pi/\alpha)}$$

右端随 $R\to\infty$ 而趋于 0，故当 R 充分大时，在这弧段上也有 $|F(z)|\leqslant M$. 因此由解析函数的最大模定理可知，$|F(z)|\leqslant M$ 在区域 $|\theta|\leqslant\pi/(2\alpha)$，$r\leqslant R$ 的整个内部都成立；又因 R 任意大，所以它在区域 D 中都成立. 故在 D 中有 $|f(z)|\leqslant Me^{\varepsilon r^{\gamma}}$. 再令 $\varepsilon\to 0$，就得到引理 1.1.2.

引理 1.1.3[1,4]　若 $f(z)$ 是可积函数，满足下面两个条件：

（i）$f(z)=O(|z|^{s}e^{a|z|})$，对 $s>0$，$a>0$，$|z|$ 足够大；

（ii）$f(x)=O(x^{s}e^{-ax})$，对足够大的正的 x.

则 $f(z)=e^{-az}P(z)$，其中 P 是 s 阶的多项式.

证明：首先假设 f 是偶函数. 对任意的 α，使得 $0<\alpha<\pi$，定义

$$w(z,\alpha)=w(r,\theta,\alpha)=\exp\left[aiz\frac{e^{-i\alpha/2}}{\sin(\alpha/2)}\right]$$

其中 $z=re^{i\theta}\in G_{\alpha}=\{re^{i\theta}\mid r>0,0<\theta<\alpha\}$. 那么，

(a) $|w(r,0,\alpha)|=\left|\exp\left[air\dfrac{e^{-i\alpha/2}}{\sin(\alpha/2)}\right]\right|=$

$$\left|\exp\left[air\frac{\cos(-\alpha/2)+\mathrm{i}\sin(-\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\right]\right|=$$
$$|\exp[ar(1+\mathrm{i}\cot(\alpha/2))]|$$

(b) $|w(r,\alpha,\alpha)|=\left|\exp\left[aire^{\mathrm{i}\alpha}\frac{e^{-\mathrm{i}\alpha/2}}{\sin(\alpha/2)}\right]\right|=$
$$\left|\exp\left[air\frac{e^{\mathrm{i}\alpha/2}}{\sin(\alpha/2)}\right]\right|=e^{-ar}$$

(c) $\lim_{\alpha\to\pi}w(z,\alpha)=e^{az}$

然后,考虑函数 $F(z)=w(z,\alpha)f(z)/(\mathrm{i}+z)^s, z=re^{\mathrm{i}\theta}\in G_\alpha$. F 在这个开区域内解析,在闭区域内连续. 对 $\theta=0$,利用(a) 和(ii),有

$$|F(x)|=\frac{|w(x,0,\alpha)||f(x)|}{|\mathrm{i}+x|^s}\leqslant C$$

且在 $\{z=re^{\mathrm{i}\alpha}\mid r>0\}$ 上,利用(b) 和(i),有

$$|F(re^{\mathrm{i}\alpha})|\leqslant C\left(\frac{(1+r)}{|\mathrm{i}+re^{\mathrm{i}\alpha}|}\right)^s\leqslant C$$

其中常数不依赖 α. 利用引理1.1.2,对 $z\in G_\alpha$,有 $|F(z)|\leqslant C$. 令 $\alpha\to\pi$, 对上半平面上任意的 z,得到

$$\left|\frac{f(z)e^{az}}{(\mathrm{i}+z)^s}\right|\leqslant C$$

类似地,对下半平面上任意的 z,得到

$$\left|\frac{f(z)e^{az}}{(z-\mathrm{i})^s}\right|\leqslant C$$

由上面的两个式子以及 $f(z)e^{az}$ 是阶数不超过 s 的多项式 $P(z)$ 可知,对任意的 $z\in\mathbf{C}$,有

$$|f(z)e^{az}|\leqslant C(1+|z|)^s$$

因此

$$f(z)=Ce^{-az}P(z)$$

如果 f 是奇函数,那么 $g(z)=f(z)/z$ 是偶整函数. 仿照上面过程可知,存在多项式 P,使得 $f(z)=Ce^{-az}zP(z)$. 最后, 通过把

f 分解为奇部和偶部：

$$f(z)=\frac{f(z)+f(-z)}{2}+\frac{f(z)-f(-z)}{2}=f_{\text{even}}(z)+f_{\text{odd}}(z)$$

即知引理的结论也成立.

实直线 $\mathbf{R}$ 上的 Hardy 不确定原理阐述为：

定理 1.1.4[1,4] 如果 f 与 $\hat{f}$ 都等于 $O(|x|^m e^{-\frac{1}{2}x^2})$，其中 $|x|$ 足够大，m 是正整数，那么 f 与 $\hat{f}$ 都为有限个 Hermite 函数的线性组合. 特别地，若 f 与 $\hat{f}$ 都等于 $O(e^{-\frac{1}{2}x^2})$，则 $f=\hat{f}=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$，其中 C 是大于零的常数；若 f 和 $\hat{f}$ 都等于 $o(e^{-\frac{1}{2}x^2})$，则 $f=\hat{f}=0$.

证明：对 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbf{C}$，$\hat{f}(z)$ 定义为

$$\hat{f}(z)=\int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-\mathrm{i}x\cdot z}\mathrm{d}x$$

则

$$|\hat{f}(z)|\leqslant C\int_{\mathbf{R}}|f(x)|\,|e^{-\mathrm{i}x\cdot z}|\,\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}}|x|^m e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{x\cdot y}\mathrm{d}x=$$
$$Ce^{\frac{1}{2}y^2}\int_{\mathbf{R}}|x|^m e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2}\mathrm{d}x\leqslant C|y|^m e^{\frac{1}{2}y^2}\qquad(1.1.1)$$

从式(1.1.1) 可知 $\hat{f}(z)$ 是一个整函数.

首先假设 f 与 $\hat{f}$ 都是偶函数，此时 m 为偶数，则可以令 $\hat{f}(z)=F(z^2)$，其中 F 是整函数. 从式(1.1.1) 和定理的条件(即 $|F(x)|\leqslant Cz^{m/2}e^{-|x|/2}$) 可知 F 满足引理 1.1.3 的两个条件(其中取 $s=m/2, a=1/2$)，从而推出 $F(z)=CP(z)e^{-z/2}$，其中 P 是 $m/2$ 阶的多项式. 因此得到 $\hat{f}(x)$ 等于有限个 Hermite 函数的线性组合(这里的 Hermite 函数具有偶数阶).

下面假设 f 与 $\hat{f}$ 都是奇函数，则 $g: z\rightarrow z^{-1}\hat{f}(z)$ 是偶函数. 再令 $g(z)=G(z^2)$，则从式(1.1.1) 和定理的条件可知

$$G(z)\leqslant C|y|^{(m-1)/2}e^{|y|/2}$$
$$|G(x)|\leqslant Cx^{(m-1)/2}e^{-|x|/2}$$

因此推出 G 满足引理 1.1.3 的两个条件(其中取 $s=(m-1)/2$)，

从而推出 $G(z)=CP_1(z)\mathrm{e}^{-z/2}$,其中 P_1 是 $(m-1)/2$ 阶的多项式,进一步可以得到 $\hat{f}(z)=CQ(z)\mathrm{e}^{-z^2/2}$,其中 Q 是 m 阶的多项式. 从而 $\hat{f}(x)$ 等于有限个 Hermite 函数的线性组合(这里的 Hermite 函数具有奇数阶).

对于一般的情况，我们可以令

$$f(z)=f_{\text{even}}(z)+f_{\text{odd}}(z)$$

其中 $f_{\text{even}}(z)$ 和 $f_{\text{odd}}(z)$ 分别是 f 的奇部和偶部. 从上面两种情形的推导过程可知 $f_{\text{even}}(z)$ 和 $f_{\text{odd}}(z)$ 都满足定理的条件和结论，从而可知对一般的 f,引理 1.1.3 都成立.

若 f 和 $\hat{f}$ 都等于 $o(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2})$. 我们不妨设 $f(x)=O(\mathrm{e}^{-ax^2})$，其中 $a>1/2$. 则从式(1.1.1) 可知

$$\hat{f}(y)=O(\mathrm{e}^{-y^2/(4a)})$$

由于 $1/(4a)<1/2$，因此 $\mathrm{e}^{-y^2/(4a)}>\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$，所以上式与 $\hat{f}$ 等于 $o(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2})$ 的条件矛盾，即可得到 $f=\hat{f}=0$. 证毕.

定理 1.1.4 还可以进一步按照下面的形式阐述.

定理 1.1.5[20—21]　如果 f 是定义在实直线 $\mathbf{R}$ 上的函数，使得不等式

$$|f(x)|\leqslant C\mathrm{e}^{-ax^2}\quad 与\quad |\hat{f}(y)|\leqslant C\mathrm{e}^{-by^2}$$

成立，其中 C,a,b 是大于零的常数,那么有

(i) 当 $ab=1/4$ 时，$f(x)=C\mathrm{e}^{-ax^2}$；

(ii) 当 $ab>1/4$ 时,$f(x)=0$;

(iii) 当 $ab<1/4$ 时,存在无限多个线性无关的函数,满足上面两个不等式.

证明：利用伸缩来证明.

(i) 令 $\rho=(b/a)^{1/4}$,$f_\rho(x)=f(\rho x)$，及 $\hat{f}_\rho(y)=\hat{f}(y/\rho)$. 则有

$$|f_\rho(x)|\leqslant C\exp\left(-a\frac{b^{1/2}}{(a^{1/2})}x^2\right)\leqslant C\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

$$|\hat{f}_\rho(y)| \leqslant C\exp\left(-b\frac{a^{1/2}}{(b^{1/2})}y^2\right) \leqslant Ce^{-y^2/2}$$

因此从定理 1.1.4 可知 $f_\rho(x)=Ce^{-x^2/2}$，从而利用 $ab=1/4$，有

$$f(x)=C\exp\left(-\frac{1}{2\rho^2}x^2\right)=C\exp\left(-(ab)^{1/2}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}x^2\right)=Ce^{-ax^2}$$

(ⅱ) 若 $ab>1/4$，则根据定理 1.1.4 的推导过程可知 $f_\rho(x)=0$，故有 $f(x)=0$.

(ⅲ) 若 $ab<1/4$，则根据定理1.1.4的推导过程可知，$f_\rho(x)$ 可以表示为任意多个 Hermite 函数的线性组合，再通过适当的伸缩得到结论. 证毕.

定理 1.1.5 表明非零函数和它的 Fourier 变换不能同时精确地局部化(这里“精确地局部化”理解为在无穷远处速降). 之后，Hardy 不确定原理的研究引起了国际数学界广泛的关注并取得了巨大的进展.

1983 年，Cowling 和 Price 证得了“L^p-L^q”形式的不确定原理[18]. 它阐述为：

定理 1.1.6(Cowling-Price 定理)[2] 令 $e_a(x)=e^{ax^2}$，若 f 满足下面两个不等式

$$\|e_a f\|_{L^p}<\infty \quad 与 \quad \|e_a\hat{f}\|_{L^q}<\infty$$

其中 $\min(p,q)<\infty$，那么：

(ⅰ) 当 $ab\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$f(x)=0$；

(ⅱ) 当 $ab<\frac{1}{4}$ 时，存在无限多个线性无关的函数，满足上面两个不等式.

当 $ab>\frac{1}{4}$ 时，定理 1.1.5 能推出定理 1.1.6[6]. 当不考虑 $ab=\frac{1}{4}$ 的情况时，显然 Cowling-Price 不确定原理能推出 Hardy

不确定原理.

随后，一些学者相继证得了不同形式的不确定原理. 参考文献[4] 推广了 Hardy 不确定原理，以下列形式描述。

定理 1.1.7(Morgan 定理) 令 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ 是可测的，且对所有的 x,y 满足：

$$|f(x)|\leqslant Ce^{-a\pi|x|^p} \quad 与 \quad |\hat{f}(y)|\leqslant Ce^{-(A(a)+\varepsilon)\pi|y|^q}$$

其中 $p>2, p^{-1}+q^{-1}=1, a,\varepsilon>0$ 且 $A(a)=2^q/[\sin\alpha(q(pa)^{q-1})]$，$\alpha=\pi(q-1)/2$. 那么 $f=0$ a. e. 成立.

定理 1.1.6 与 1.1.7 可由下面的 Beurling 定理(定理 1.1.8)推出，下面先叙述 Hörmander 的证明过程。

定理 1.1.8(Beurling 定理)[2] 若 $f\in L^1(\mathbf{R})$ 满足 $\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}|f(x)\|\hat{f}(y)|e^{|xy|}dxdy<\infty$，则 $f=0$ 几乎处处成立.

证明：令

$$\hat{M}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|e^{|xy|}dx \text{ 和 } M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(y)|e^{|xy|}dy$$

则 $\hat{M}(y)$ 和 $M(x)$ 分别是 $|y|$ 和 $|x|$ 的增函数，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(y)|\hat{M}(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|M(x)dx=$$

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}|f(x)\|\hat{f}(y)|e^{|xy|}dxdy<\infty \tag{1.1.2}$$

若 f 有紧支集且 $f\neq 0$，则 $\hat{M}$ 按照指数增长. 因此，在包含实轴的带型区域中，$\hat{f}$ 是解析的，从而推出 f 一定为零. 若 $\hat{f}$ 有紧支集，则可以作类似的讨论.

若 f 和 $\hat{f}$ 都没有紧支集，则 M 和 $\hat{M}$ 比任何指数函数增长得还要快. 由 Fourier 逆变换可知，f 和 $\hat{f}$ 都是整函数，且

$$|f(z)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(y)\|e^{izy}|dy=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(y)|e^{-\operatorname{Im}z\cdot y}dy\leqslant M(-\operatorname{Im}z) \tag{1.1.3}$$

$$|\hat{f}(z)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-iz\cdot x}| dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{\mathrm{Im}\, z\cdot x} dx \leqslant \hat{M}(\mathrm{Im}\, z),\ z \in \mathbf{C}$$

令

$$F(z) = \int_0^z f(z) f(iz) dz \tag{1.1.4}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |f(\pm ix)| dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| M(x) dx < \infty$$

因此，整函数 F 在实轴和虚轴上都是有界的，则

$$\lim_{|x|\to\infty} M(x) e^{-cx^2/2} = 0$$

对任意的 $c > 0$，则从引理 1.1.2 可知 f 是一个有界函数，因而推出 $f=0$. 若 $f \neq 0$，则可以找到常数 $c > 0$ 和 $\hat{c} > 0$ 使得

$$M(x) > e^{cx^2/2},\ \hat{M}(y) > e^{\hat{c}y^2/2}，当\ x, y\ 足够大时$$

由于

$$f(z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{izy} dy$$

因此推出

$$|f(z)| \leqslant (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(y)| \hat{M}(y) e^{|y||\mathrm{Im}\, z| - \hat{c}y^2/2} dy \leqslant$$

$$(2\pi)^{-1} \sup_y e^{|y||\mathrm{Im}\, z| - \hat{c}y^2/2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(x)|$$

$$|\hat{f}(y)| e^{|xy|} dx dy \leqslant K \sup_y e^{|y||\mathrm{Im}\, z| - \hat{c}y^2/2} \leqslant$$

$$K \sup_y \exp\left[-\frac{\hat{c}}{2}\left(|y| - \frac{|\mathrm{Im} z|}{\hat{c}}\right)^2 + \frac{|\mathrm{Im}\, z|^2}{2\hat{c}}\right] =$$

$$K e^{|\mathrm{Im}\, z|^2/(2\hat{c})}$$

这表明 f 被指数函数控制，且指数是 2 阶的，或 $f \equiv 0$.

令 $z = re^{i\alpha}$，其中 α 是实的，则从式(1.1.2) 和式(1.1.3) 得到

$$\int_0^{\infty} |f(r) f(re^{i\alpha})| dr \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(r)| M(r) dr = K' < \infty$$