跨考教育集团推荐用书

2012

考研数学

基础复习大全

跨考教育考研数学名师团队　编著

总策划　张爱志　张文平　曹先仲

业内唯一数学基础复习用书

最具效果的考研数学首轮复习辅导教辅书

注重基础训练、高标准、高分基础

北京邮电大学出版社

www.buptpress.com

2012 考研数学基础复习大全

跨考教育考研数学名师团队　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

得数学者得天下是考研中的共识，数学得分的高低将在很大程度上决定考生考试的成败。而数学复习又是考研各科中最困难最复杂的，需要考生从复习一开始就能有一个合理而完整的规划贯穿于整个复习过程。而我们在教学中发现，考研中几乎有将近半数的考生都是零基础的，其余考生中大部分的数学也处于荒废或半荒废的状态。对于这部分考生来说，在复习的前期踏踏实实打好基础就显得尤为关键了。

有鉴于此，我们结合考试大纲和考研数学指定教材以及跨考教育模块化四阶教学体系编写了本书，主要讲解考研数学中最基本的概念和公式定理以及常见的主要题型，旨在指导考生通过对本书的学习打好基础，建立起基本的知识框架，理清整个学科的理论体系，为后一阶段的强化复习打下基础。

书中加入了笔者在跨考教育教学实践中对考研数学的一些独到的见解和体会，对考生很有启发性，可用于考生在考研复习的基础阶段(3～6月)的自学，也可用作基本的知识手册用于考研后期的复习巩固及考研辅导班的培训教材。

图书在版编目(CIP)数据

2012考研数学基础复习大全/跨考教育考研数学名师团队编著. --北京：北京邮电大学出版社，2011.3
ISBN 978-7-5635-2589-8

Ⅰ.①2…　Ⅱ.①跨…　Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第028565号

书　　名：2012考研数学基础复习大全
作　　者：跨考教育考研数学名师团队
责任编辑：姚　顺
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京忠信诚胶印厂
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：22.25
字　　数：553千字
版　　次：2011年3月第1版　2011年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2589-8　　定　价：38.00元

前　言

考研数学考试到今年已经走过了 20 多个年头，其中自 2006 年以来，数学考试的总体难度有所下调，但考生的分数却一直不甚理想。综合多年的教学经验，我们发现：考生的考分偏低，最根本的原因还是基本功不够扎实。很多考生往往在还没有弄清楚很多基本概念的情况下就开始大量做题。这样的复习不但事倍功半，而且很容易遇到瓶颈。很多考生到了后期发现无论怎么做题，成绩就是上不去，其根本原因往往就出在基础上。因此，在开始强化阶段的练习之前打好基础，建立起基本的知识体系是很有必要的。

本书依据考试大纲，结合了我们多年的教学实践，主要讲解考研数学的三基（基本概念，基本理论，基本方法），对大纲所要求的知识点进行深度的剖析，重点讲解基本概念的内涵和外延以及重要公式定理的应用，再辅以适量经典例题的归纳和讲解，旨在帮助考生夯实基础，了解考研数学的基本内容，掌握考研数学的基本方法技巧，建立清晰而完整的逻辑知识体系，为下一阶段的强化练习打下基础。

本书有如下四大特点：

（1）重视从宏观上把握整个学科，强调知识点之间的联系，帮助考生梳理知识结构，建立知识框架，使考生对整个学科有比较全面的理解和认识。

（2）所有例题都是服务于基本知识点的，没有脱离基本考点而单纯地归纳题型，每一道题目都有对解题思路以及所涉及考点的详细分析和总结，题目不讲求数量而追求质量，力求使考生通过一道题练习去掌握一类题。

（3）注重基础，题目难度等于或略低于考研难度，相对于市面上很多难度较大的辅导书，更适合于考生基础阶段的水平，也可以用于考研复习后期对基本知识点的强化巩固。

（4）书中包含了笔者多年来教学中所积淀的对考研数学一些独到的见解，对于帮助考生理解相关知识点有很大启发作用。

本书由跨考教育考研数学名师团队编著，参加的人员有李擂，贾俊晶，张利华，尹霞。由于时间有限，书中难免有疏漏和不足之处，希望广大考生和数学同仁给予批评指正。如遇到疑难问题可通过以下方式与我们联系：bjbaba@263. net。

最后祝每一位怀揣梦想的考生都能考出好成绩！

跨考教育考研数学名师团队于北京

目　　录

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限和连续性

要点提示：极限是高等数学中最基本的运算，微积分中核心的运算微分和积分都可以看做是特殊的极限过程，而高等数学之所以让很多学生感到头疼，根本原因也是因为处理的都是极限过程。因此，可以毫不夸张地说："高等数学是一门关于极限的学科。"基于其基础性的作用，正确理解并掌握极限的概念及相关性质也就成了高等数学入门阶段的复习过程中最为关键的一环。高等数学中所处理的函数绝大多数是连续函数或是除去有限个点以外的连续函数。函数的连续性与可导性、可积性也有重要的联系。因此，理解函数的连续性以及间断点的分类就变成了进一步学习的基础。本章主要的考点有：极限的运算法则、洛必达法则、两个重要极限、收敛法则、无穷小的比较、函数连续性及间断点的分类、闭区间上连续函数的性质。另外，本章的第一节还介绍了作为学习高等数学的预备知识的函数的相关知识，供广大考生参考。

第一节　函　　数

一、知识点精析

1. 函数

从实数集的子集 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 f 称为函数，记作 $y=f(x), x\in D$，称 x 为自变量，y 为因变量。函数的三要素：定义域、解析式和值域（也作二要素：定义域、解析式，因为这两者可以决定值域）。其中，定义域是自变量 x 的取值范围；值域是因变量的取值范围记作 $f(D)$。函数由其解析式和定义域唯一确定，与符号的选取无关，如 $y=f(x), x\in D$ 与 $u=f(t), t\in D$ 是同一个函数。

在没有特别指定的情况下，函数的定义域取自然定义域，即使得函数运算有意义的自变量的取值范围。易知，人为指定的定义域必为自然定义域的子集。常见的函数的定义域如下：

$$y=\sqrt{x}, x\geqslant 0;\quad y=\frac{1}{x}, x\neq 0$$

$$y=\ln x, x>0;\quad y=e^x, x\in\mathbf{R}$$
$$y=\sin x, x\in\mathbf{R};\quad y=\cos x, x\in\mathbf{R}$$
$$y=\tan x, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\quad y=\cot x, x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$$

2. 函数的单调性

如果对函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 内的任意两点 $x_1>x_2$ 都有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$〔或 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$〕，就称函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增（或单调递减），相应地称 I 是 $f(x)$ 的一个单调增区间（或单调减区间）。如果对区间 I 内的任意两点 $x_1>x_2$ 都有 $f(x_1)>f(x_2)$〔或 $f(x_1)<f(x_2)$〕，就称函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增（或严格单调递减）。

函数单调性的性质：

(1) 如果 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 都是增函数（或减函数），则 $f_1(x)+f_2(x)$ 也是增函数（或减函数）。

(2) 如果 $f_1(x)$ 是增函数，$f_2(x)$ 是减函数，则 $f_1(x)-f_2(x)$ 是增函数，$f_2(x)-f_1(x)$ 是减函数。

(3) 如果 $f(x)$ 是增函数（或减函数），如果常数 $C>0$，则 $Cf(x)$ 是增函数；如果常数 $C<0$，则 $Cf(x)$ 是减函数。

常见函数的单调增区间及单调减区间：

$y=x^2+ax+b$，增区间：$\left(-\frac{a}{2},+\infty\right)$，减区间：$\left(-\infty,-\frac{a}{2}\right)$。

$y=e^x$，增区间：$(-\infty,+\infty)$。

$y=\ln x$，增区间：$(0,+\infty)$。

$y=\sin x$，增区间：$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，减区间：$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$。

$y=\cos x$，增区间：$[2k\pi-\pi,2k\pi]$，减区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$。

3. 函数的周期性

如果存在正数 T，使得函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 内的任意一点 x 都有 $f(x\pm T)=f(x)$，就称 $f(x)$ 是一个周期函数，T 是 $f(x)$ 的一个周期。易知如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期，那么对任意的正整数 n，nT 都是 $f(x)$ 的周期。在 $f(x)$ 的所有周期中，一般，把其中最小的称为最小正周期。很多时候，往往也把最小正周期简称为周期。

周期函数的性质：

(1) 如果 $f(x)$ 以 T 为周期，则对任意的非零常数 C，$Cf(x)$ 仍然以 T 为周期，$f(Cx)$ 以 $\frac{T}{|C|}$ 为周期。

(2) 如果 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 都以 T 为周期，则 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$ 仍然以 T 为周期($k_1,k_2\in\mathbf{R}$)。注意这时最小正周期有可能缩小，如 $f_1(x)=\cos 2x+\sin x$，$f_2(x)=\sin x$ 都以 2π 为最小正周期，但 $f_1(x)-f_2(x)=\cos 2x$ 以 π 为最小正周期。

常见周期函数的周期：

$y=\sin x, T=2\pi$；　$y=\cos x, T=2\pi$

$y=\tan x, T=\pi$；　$y=\cot x, T=\pi$

4. 函数的奇偶性

如果对其定义域 D 内的任意一点 x，$f(-x)=f(x)$〔或 $f(-x)=-f(x)$〕，就称 $f(x)$

是一个偶函数(或奇函数)。

奇偶函数的性质:

(1) 偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称。

(2) 如果 $f_1(x)$,$f_2(x)$都是奇函数(或偶函数),则对任意的常数 $k_1,k_2\in\mathbf{R}$,$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$仍然是奇函数(或偶函数)。

(3) 如果 $f_1(x)$,$f_2(x)$奇偶性相同,则 $f_1(x)f_2(x)$为偶函数;如果 $f_1(x)$,$f_2(x)$奇偶性相反,则 $f_1(x)f_2(x)$为奇函数。

(4) 对于任意定义在对称区间上的函数 $f(x)$,$f(|x|)$、$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$与 $f(x)f(-x)$都是偶函数,$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$是奇函数。

常见的奇函数:

$y=x^k$,k 为奇数,$y=\sin x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$。

常见的偶函数:

$y=x^k$,k 为偶数,$y=\cos x$。

5. 反函数

函数是一个映射,如果该映射的逆映射存在,则称该逆映射是函数 $y=f(x)$,$x\in D$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,$y\in f(D)$。

反函数的性质:

(1) 函数 $y=f(x)$,$x\in D$ 存在反函数当且仅当对定义域内任意两点 $x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 。

(2) 反函数与原函数的图像关于直线 $y=x$ 对称。

(3) 反函数与原函数的增减性相同。

常见反函数:

$$f(x)=\sin x,\quad f^{-1}(y)=\arcsin y$$
$$f(x)=\cos x,\quad f^{-1}(y)=\arccos y$$
$$f(x)=\tan x,\quad f^{-1}(y)=\arctan y$$
$$f(x)=\mathrm{e}^x,\quad f^{-1}(y)=\ln y$$
$$f(x)=\frac{1}{x},\quad f^{-1}(y)=\frac{1}{y}$$

6. 复合函数

设 $y=f(u)$,$u\in D_1$ 与 $u=g(x)$,$x\in D_2$ 为两个函数,如果 $g(x)$的值域 $g(D_2)$包含于 $f(u)$的定义域 D_1,则可以定义 $f(u)$与 $g(x)$的复合函数 $f\circ g$:$y=f[g(x)]$,$x\in D_2$。类似地,还可以定义三个或更多函数的复合函数。

复合函数的性质:

(1) 复合函数的运算满足结合律,即$(f_1\circ f_2)\circ f_3=f_1\circ(f_2\circ f_3)$(注意,复合函数不满足交换律。例如令 $f(x)=2x$,$g(x)=x^2$,则 $f[g(x)]=2x^2$,$g[f(x)]=4x^2$。

(2) 如果 $f_1(x)$,$f_2(x)$单调性相同,则 $f_1[f_2(x)]$单调递增;如果 $f_1(x)$,$f_2(x)$单调性相反,则 $f_1[f_2(x)]$单调递减。

7. 函数的有界性

设 $y=f(x),x\in D$ 是一个函数，如果存在一个实数 M，使得对定义域内任意的一点 x，都有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 有上界，并称 M 是函数 $f(x)$ 的一个上界；如果存在一个实数 m，使得对定义域内任意的一点 x，都有 $f(x)\geqslant m$，则称函数 $f(x)$ 有下界，并称 m 是函数 $f(x)$ 的一个下界。既有上界又有下界的函数称为有界函数，也即函数 $f(x)$ 有界，则存在实数 m 与 M，使得对定义域内任意的一点 x，都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$。

注：有界函数还有一个等价的定义：存在实数 $M\geqslant 0$，使得对定义域内任意一点 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$。读者可以尝试自行证明这个结论。

二、题型归纳与精讲

【例 1.1.1】 设 $f(x)=\begin{cases}2x,x<0\\x^2,x\geqslant 0\end{cases}$，试求 $f[f(x)]$ 与 $f\{f[f(x)]\}$。

分析：直接按定义代入。

解答：按照定义有 $f[f(x)]=\begin{cases}2f(x),f(x)<0\\ [f(x)]^2,f(x)\geqslant 0\end{cases}$

由 $f(x)$ 定义域有

$$f(x)<0\Leftrightarrow x<0,f(x)\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant 0$$

因此有

$$f[f(x)]=\begin{cases}4x,x<0\\x^4,x\geqslant 0\end{cases}$$

进一步还有

$$\begin{aligned}f\{f[f(x)]\}&=\begin{cases}4f(x),f(x)<0\\ [f(x)]^4,f(x)\geqslant 0\end{cases}\\&=\begin{cases}8x,x<0\\x^8,x\geqslant 0\end{cases}\end{aligned}$$

【例 1.1.2】 设函数 $f(x)$ 是奇函数，且是周期为 4 的周期函数，已知当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x+1$，求 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 内的解析式。

分析：通过几何意义求解。由于函数 $f(x)$ 是奇函数，可以由 $[0,2]$ 内的解析式得到 $[-2,0]$ 上的解析式；再由 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，可以由 $[-2,0]$ 上的解析式平移得到 $[2,4]$ 内的解析式。

解答：设 $x\in[-2,0]$，则 $-x\in[0,2]$，由于 $f(x)$ 是奇函数，因此当 $x\in[-2,0]$ 时，有

$f(x)=-f(-x)=-(-x)^2+2(-x)-1=-x^2-2x-1$

再设 $x\in[2,4]$，则 $x-4\in[-2,0]$，由于 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，因此当 $x\in[2,4]$ 时，有

$$f(x)=f(x-4)=-(x-4)^2-2(x-4)-1=-x^2+6x-9$$

【例 1.1.3】 设 $f(x)=\begin{cases}2x,x<0\\x^2,x\geqslant 0\end{cases}$，求其反函数 $f^{-1}(x)$。

分析：按照反函数的定义，通过 $y=f(x)$ 反解出 $x=f^{-1}(y)$，再求出其定义域，即原函数的值域即可。

解答:当 $x<0$ 时,$y=2x$,y 的取值范围为 $y<0$,可得 $x=\frac{y}{2}$,$y<0$;

当 $x\geqslant 0$ 时,$y=x^2$,y 的取值范围为 $y\geqslant 0$,可得 $x=\sqrt{y}$,$y\geqslant 0$。

则
$$f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{y}{2}, & y<0\\ \sqrt{y}, & y\geqslant 0\end{cases}$$

【例 1.1.4】 讨论下列函数在其定义域内的有界性。

$$\frac{x}{1+x^2},\sin\left(\frac{e^x}{x+1}\right),\sqrt{x}$$

分析:按照定义,如果有界,找出其上界和下界;如果无界,予以说明。

解答:$\frac{x}{1+x^2}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,由$(|x|-1)^2=x^2+1-2|x|\geqslant 0$ 可得 $x^2+1\geqslant 2|x|$,因此$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$,因此$\frac{x}{1+x^2}$在定义域上有界。

$\sin\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$。在其定义域上有$\left|\sin\left(\frac{e^x}{x+1}\right)\right|\leqslant 1$,因此函数在定义域上有界。

$\sqrt{x}$的定义域为$[0,+\infty)$,可知当 x 无限增大时,$\sqrt{x}$也无限增大,因此$\sqrt{x}$无上界;易知,$\sqrt{x}\geqslant 0$,因此$\sqrt{x}$有下界。

第二节 极 限

一、知识点精析

1. 基本概念

(1) 数列极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在一个正整数 $N>0$,当 $n>N$ 时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$。

(2) 函数极限(形式很多,把握其规律)

① **极限**:$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在一个正数$\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

注:函数在 a 点的极限是该函数在 a 点附近的性质,与函数在 a 点的函数值及其他性质均无关。

② **左(右)极限**:$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,存在一个正数 $\delta>0$,当$-\delta<|x-a|<0$ 时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

右极限的定义类似。

(3) 无穷小

以 0 为极限的量:也即,如果$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$,则称 $x\to\square$时 $f(x)$为无穷小。

注:无穷小是一个极限,一个变化的过程,而不是真正的 0。

(4) 无穷大

在自变量的某一过程中,函数值为无限增大的量:

注:①无穷大实际上是极限不存在的情况,但极限不存在的量并不一定都是无穷大量。

② 无穷大量也是一个动态变化的过程，而不是一个实际存在的数。

③ 无穷大量与无穷小量的关系：无穷大量的倒数是无穷小量，非0的无穷小量的倒数是无穷大量。

(5) 无穷小量的比较

设$\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0,\lim\limits_{x\to\square}\beta(x)=0$，$x\to\square$可以是任一极限过程。

① 高阶无穷小量与低阶无穷小量：$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0\Leftrightarrow\alpha(x)$是$\beta(x)$的高阶无穷小量，$\beta(x)$是$\alpha(x)$的低阶无穷小量，记作$\alpha(x)=o[\beta(x)],x\to\square$〔也就是说$\alpha(x)$收敛于0的速度比$\beta(x)$快〕。

② 同阶无穷小量：$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq0\Leftrightarrow\alpha(x)$与$\beta(x)$为同阶无穷小量〔可以理解为$\alpha(x)$收敛于0的速度与$\beta(x)$在同一数量级〕。

③ 等价无穷小量：同阶无穷小量的特殊情况，将定义中的C改为1即可，记作$\alpha(x)\sim\beta(x)$〔也就是说$\alpha(x)$收敛于0的速度与$\beta(x)$完全一样〕。

2. 重要公式、定理

(1) 极限的性质

四则运算：设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A,\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$，$x\to\square$可以是任一极限过程。

$$\lim_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to\square}f(x)\pm\lim_{x\to\square}g(x)=A\pm B$$

$$\lim_{x\to\square}f(x)g(x)=\lim_{x\to\square}f(x)\lim_{x\to\square}g(x)=AB$$

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\square}f(x)}{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq0)$$

注：四则运算只适用于有限次计算的情形，对无限次运算不一定适用。如$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}}_{n个}=1$。

(2) 数列极限的性质及其收敛法则

1) 性质：

唯一性：若$\{x_n\}$收敛，则其极限唯一。

有界性：若$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$有界(其逆不真)。

保序性：有两个数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$

若从某一项N开始，以后所有项都有$x_n\geqslant y_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$(**注**：把"$\geqslant$"都改为"$>$"，则结论不成立)。

若有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，则从某一项$N$开始，以后所有项都有$x_n>y_n$(**注**：把"$>$"都改为"$\geqslant$"，则结论不成立)。

2) 收敛准则：

单调有界原理：单调递增有上界的数列必有极限；单调递减有下界的数列必有极限；单调无界的数列极限为$+\infty$或$-\infty$(**注**：定理也适用于从某一项以后开始单调的数列)。

夹逼定理:若存在自然数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,且有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$。

(3) 函数极限的性质及其相关定理

1) **唯一性**:若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)$ 存在,则极限唯一。

2) **保序性**:若存在正数 δ,对于任意满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x 都有 $f(x)\geqslant g(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$(**注**:把"$\geqslant$"都改为"$>$",则结论不成立)。

若有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,存在正数 δ,对于任意满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x 都有 $f(x)>g(x)$(**注**:把"$>$"都改为"$\geqslant$",则结论不成立)。

3) **夹逼定理**:若存在正数 δ,对于任意满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x 都有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\square}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\square}\psi(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$。

4) **洛必达法则**:

① $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$x\to a$ 情况下,设 $f(x),g(x)$ 满足:

ⅰ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

ⅱ $f(x),g(x)$ 在 a 的邻域内可导(a 点除外)且 $g'(x)\neq 0$;

ⅲ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或等于 $+\infty$ 或 $-\infty$),则有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

$x\to\infty$ 情况下,设 $f(x),g(x)$ 满足:

ⅰ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$;

ⅱ 存在一个正数 X,当 $|x|>X$ 时有 $f(x),g(x)$ 可导,且 $g'(x)\neq 0$;

ⅲ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或等于 $+\infty$ 或 $-\infty$),则有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

② $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

$x\to a$ 情况下,设 $f(x),g(x)$ 满足:

ⅰ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

ⅱ $f(x),g(x)$ 在 a 的邻域内可导(a 点除外)且 $g'(x)\neq 0$;

ⅲ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或等于 $+\infty$ 或 $-\infty$),则有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

$x\to\infty$ 情况类似 $\dfrac{0}{0}$ 型。

5) 两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

② $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$。

6) 重要公式:

① 需要记住的等价无穷小量:

$x\to 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \frac{(1+x)^a - 1}{a}$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$$

② 几种常见的无穷大量趋近于无穷的快慢比较：

当 $x \to +\infty$ 时，以下各函数趋近于无穷的快慢：

$$\xrightarrow[\text{由慢到快}]{\ln x, x^a(a>0), b^x(b>1), x^x}$$

当 $n \to \infty$ 时，以下各数列趋近于无穷的快慢：

$$\xrightarrow[\text{由慢到快}]{\ln n, n^a(a>0), b^n(b>1), n!, n^n}$$

3. 计算极限的主要方法

(1) 四则运算

设 $\lim\limits_{x \to \Box} f(x) = A, \lim\limits_{x \to \Box} g(x) = B$，极限过程可以是 $x \to x_0, x \to \infty$ 等。

$$\lim_{x \to \Box}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to \Box} f(x) \pm \lim_{x \to \Box} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \to \Box} f(x)g(x) = \lim_{x \to \Box} f(x) \lim_{x \to \Box} g(x) = AB$$

$$\lim_{x \to \Box} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to \Box} f(x)}{\lim\limits_{x \to \Box} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$$

注：① 关于无穷的运算法则：

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (+\infty) - (-\infty) = +\infty, (-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, (+\infty) + C = +\infty$$

$$0 \cdot C = 0, \frac{C}{0} = \infty (C \neq 0), \frac{C}{\infty} = 0$$

$$C \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, C > 0 \\ -\infty, C < 0 \end{cases}, a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, a > 1 \\ 0, 0 < a < 1 \end{cases}$$

② 如果出现 $\frac{0}{0}, \infty - \infty, 1^\infty$ 等情况，则不能直接用公式计算需要应用后面的方法计算。

(2) 等价无穷小替换

设在 $x \to \Box$ 时，$\alpha(x) \sim \beta(x)$，则有

$$\lim_{x \to \Box} f(x)\alpha(x) = \lim_{x \to \Box} f(x)\beta(x), \lim_{x \to \Box} \frac{g(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to \Box} \frac{g(x)}{\beta(x)} \quad [\alpha(x) \neq 0]$$

注：① 等价无穷小替换在极限计算过程中一般起辅助的作用，它和洛必达法则连用可以简化计算。

② 只有整个式子的乘除因子才能用等价无穷小替换，有加减时不能替换。如 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ 中的 $\sin x$ 不能替换为 x。事实上，由洛必达法则可知 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$。

(3) 洛必达法则

注：① 如果 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，并不代表 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。如由夹逼原理可知 $x > 0$ 时，

$-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\sin x}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=0$，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}+1=1$。而如果运用洛必达法则的话，就会得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在。

② 使用洛必达法则之前，先检验是否满足所需条件。

③ 多次应用时，注意在用完之后将式子整理化简。

④ 与等价无穷小量结合使用通常可以简化计算。

（4）利用两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

推广：$\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1, f(x)\neq0$

② $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

推广：$\lim\limits_{f(x)\to0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}, f(x)\neq0$ 或 $\lim\limits_{f(x)\to1}(f(x))^{\frac{1}{f(x)-1}}=\mathrm{e}, f(x)\neq1$

③ 关于幂指函数的三个公式

- 设 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to\square}v(x)=b$，则 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)^{v(x)}=a^b$
- 设 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)=1$，$\lim\limits_{x\to\square}v(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\square}[u(x)-1]v(x)}$
- 设 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)=0>0$，$\lim\limits_{x\to\square}v(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to\square}[1+u(x)]^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\square}u(x)v(x)}$

（5）夹逼法

函数极限：若存在正数 δ，对于任意满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x 都有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，且 $\lim\varphi(x)=\lim\psi(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$。

数列极限：若存在自然数 N，当存在正数 $n>N$ 时，有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

注：夹逼法实质上是对待求极限的数列或函数进行放大或缩小，进行放缩的时候有两个原则：① 尽量简化计算；② 不改变极限值，优先考虑此条。

（6）利用单调有界原理

单调有界原理：单调递增有上界的数列必有极限；单调递减有下界的数列必有极限；单调无界的数列极限为 $+\infty$ 或 $-\infty$（注：定理也适用于从某一项以后开始单调的数列）。

注：单调有界原理一般用于递推形式的数列极限，也即数列以 $a_{n+1}=f(a_n)$ 的形式给出的极限。思路是：先证明极限存在（一般要用到数学归纳法证明数列单调有界），再对递推式两边同时取极限得到 $a=f(a)$，进而解出极限值 a。

二、题型归纳与精讲

题型一　利用初等变换直接求极限

【例 1.2.1】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

分析：注意到公式 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right]$，原式可以通过它逐项消去从而实现简化。