



跨考教育集团推荐用书

2012

考研数学

基础复习大全

跨考教育考研数学名师团队 编著

总策划 张爱志 张文平 曹先仲

业内唯一数学基础复习用书

最具效果的考研数学首轮复习辅导教辅书

注重基础训练、高标准、高分基础



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

2012 考研数学基础复习大全

跨考教育考研数学名师团队 编著

北京邮电大学出版社

• 北京 •

内 容 简 介

得数学者得天下是考研中的共识,数学得分的高低将在很大程度上决定考生考试的成败。而数学复习又是考研各科中最困难最复杂的,需要考生从复习一开始就能有一个合理而完整的规划贯穿于整个复习过程。而我们在教学中发现,考研中几乎有将近半数的考生都是零基础的,其余考生中大部分的数学也处于荒废或半荒废的状态。对于这部分考生来说,在复习的前期踏踏实实打好基础就显得尤为关键了。

有鉴于此,我们结合考试大纲和考研数学指定教材以及跨考教育模块化四阶教学体系编写了本书,主要讲解考研数学中最基本的概念和公式定理以及常见的主要题型,旨在指导考生通过对本书的学习打好基础,建立起基本的知识框架,理清整个学科的理论体系,为后一阶段的强化复习打下基础。

书中加入了笔者在跨考教育教学实践中对考研数学的一些独到的见解和体会,对考生很有启发性,可用于考生在考研复习的基础阶段(3~6月)的自学,也可用作基本的知识手册用于考研后期的复习巩固及考研辅导班的培训教材。

图书在版编目(CIP)数据

2012 考研数学基础复习大全/跨考教育考研数学名师团队编著. --北京:北京邮电大学出版社,2011.3
ISBN 978-7-5635-2589-8

I. ①2… II. ①跨… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 028565 号

书 名: 2012 考研数学基础复习大全
作 者: 跨考教育考研数学名师团队
责任编辑: 姚 顺
出版发行: 北京邮电大学出版社
社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)
发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经 销: 各地新华书店
印 刷: 北京忠信诚胶印厂
开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16
印 张: 22.25
字 数: 553 千字
版 次: 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2589-8

定 价: 38.00 元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

前 言

考研数学考试到今年已经走过了 20 多个年头,其中自 2006 年以来,数学考试的总体难度有所下调,但考生的分数却一直不甚理想。综合多年的教学经验,我们发现:考生的考分偏低,最根本的原因还是基本功不够扎实。很多考生往往在还没有弄清楚很多基本概念的情况下就开始大量做题。这样的复习不但事倍功半,而且很容易遇到瓶颈。很多考生到了后期发现无论怎么做题,成绩就是上不去,其根本原因往往就出在基础上。因此,在开始强化阶段的练习之前打好基础,建立起基本的知识体系是很有必要的。

本书依据考试大纲,结合了我们多年的教学实践,主要讲解考研数学的三基(基本概念,基本理论,基本方法),对大纲所要求的知识点进行深度的剖析,重点讲解基本概念的内涵和外延以及重要公式定理的应用,再辅以适量经典例题的归纳和讲解,旨在帮助考生夯实基础,了解考研数学的基本内容,掌握考研数学的基本方法技巧,建立清晰而完整的逻辑知识体系,为下一阶段的强化练习打下基础。

本书有如下四大特点:

(1) 重视从宏观上把握整个学科,强调知识点之间的联系,帮助考生梳理知识结构,建立知识框架,使考生对整个学科有比较全面的理解和认识。

(2) 所有例题都是服务于基本知识点的,没有脱离基本考点而单纯地归纳题型,每一道题目都有对解题思路以及所涉及考点的详细分析和总结,题目不讲求数量而追求质量,力求使考生通过一道题练习去掌握一类题。

(3) 注重基础,题目难度等于或略低于考研难度,相对于市面上很多难度较大的辅导书,更适合于考生基础阶段的水平,也可以用于考研复习后期对基本知识点的强化巩固。

(4) 书中包含了笔者多年来教学中所积淀的对考研数学一些独到的见解,对于帮助考生理解相关知识点有很大启发作用。

本书由跨考教育考研数学名师团队编著,参加的人员有李擂,贾俊晶,张利华,尹霞。由于时间有限,书中难免有疏漏和不足之处,希望广大考生和数学同仁给予批评指正。如遇到疑难问题可通过以下方式与我们联系:bjbaba@263.net。

最后祝每一位怀揣梦想的考生都能考出好成绩!

跨考教育考研数学名师团队于北京

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限和连续性 1

第一节 函数 1

一、知识点精析 1

二、题型归纳与精讲 4

第二节 极限 5

一、知识点精析 5

二、题型归纳与精讲 9

题型一 利用初等变换直接求极限 9

题型二 无穷小的比较 10

题型三 利用等价无穷小计算极限 12

题型四 利用两个重要计算极限 13

题型五 利用洛必达法则计算极限 14

题型六 计算递推形式的极限 15

第三节 函数的连续性 16

一、知识点精析 16

二、题型归纳与精讲 17

题型一 讨论函数的连续性和间断点 17

题型二 闭区间上连续函数的性质的应用 19

第二章 导数与微分 21

第一节 导数与微分 21

一、知识点精析 21

二、题型归纳与精讲 24

题型一 对可导性与导数定义的考查 24

题型二 复合函数求导 26

题型三 反函数求导 28

题型四 隐函数求导与参数方程求导 29

题型五 高阶导数 30

第二节 中值定理 31

一、知识点精析 31

二、题型归纳与精讲 32

题型一 定理证明 32

题型二 与中值定理相关的证明题 33

第三节 泰勒公式 35

一、知识点精析 35

二、题型归纳与精讲 36

题型一 求函数的泰勒公式 36

题型二 泰勒公式的应用 37

第四节 导数与微分的应用 39

一、知识点精析 39

二、题型归纳与精讲 41

题型一 求函数的切线 41

题型二 极值点的讨论 41

题型三 最值的计算 42

题型四 函数不等式的证明 43

题型五 函数凹凸性与拐点的判断 44

题型六 函数的渐近线 45

第三章 一元函数积分学 47

第一节 不定积分 47

一、知识点精析 47

二、题型归纳与精讲 49

题型一 直接利用基本积分表进行计算 49

题型二 利用第一类换元法计算积分 51

题型三 利用第二类换元法计算积分 53

题型四 分部积分法 54

第二节 定积分 56

一、知识点精析 56

二、题型归纳与精讲 59

题型一 变限积分求导 59

题型二 定积分的计算 61

题型三 积分恒等式或积分不等式的证明 67

第三节 反常积分 69

一、知识点精析 69

二、题型归纳与精讲 70

题型一 反常积分的计算 70



第四节 定积分的应用	72	题型二 对坐标的曲线积分的计算	121
一、知识点精析	72	第四节 格林公式及其应用	122
二、题型归纳与精讲	74	一、知识点精析	122
题型一 平面图形面积的计算	74	二、题型归纳与精讲	123
题型二 简单几何体体积的计算	77	题型一 对弧长的曲线积分的计算	123
第四章 多元函数微分学	79	题型二 积分与路径无关的条件	125
第一节 多元函数微分	79	题型三 二元函数的全微分	128
一、知识点精析	79	第五节 曲面积分	129
二、题型归纳与精讲	84	一、知识点精析	129
题型一 多元函数的基本运算	84	二、题型归纳与精讲	132
题型二 与二重极限有关的题型	85	题型一 对面积的曲面积分的计算	132
题型三 二元函数连续性、可微性的 判断	86	题型二 对坐标的曲面积分的计算	134
题型四 偏导数的计算	87	第六节 斯托克斯公式及其应用	139
题型五 方向导数与梯度 * (数学一) ..	93	一、知识点精析	139
第二节 多元函数微分学的应用	95	二、题型归纳与精讲	139
一、知识点精析	95	题型一 斯托克斯公式的应用	139
二、题型归纳与精讲	96	题型二 场论	140
题型一 无条件极值	96	第六章 无穷级数	141
题型二 条件极值	97	第一节 常数项级数	141
题型三 空间曲线的切线与法平面	98	一、知识点精析	141
题型四 空间曲面的切平面与法线	99	二、题型归纳与精讲	144
第五章 多元函数积分学	100	题型一 收敛性	144
第一节 二重积分	100	题型二 正项级数的审敛法	147
一、知识点精析	100	题型三 任意项级数审敛法	149
二、题型归纳与精讲	102	第二节 幂级数	150
题型一 二重积分的几何意义和 主要性质	102	一、知识点精析	150
题型二 利用直角坐标系计算 二重积分	103	二、题型归纳与精讲	152
题型三 利用极坐标计算重积分	106	题型一 计算级数的收敛域	152
题型四 综合计算	109	题型二 将函数展开为幂级数	154
题型五 简单的反常重 积分 (* 数学三)	112	题型三 幂级数求和	156
第二节 三重积分	112	第七章 微分方程	159
一、知识点精析	112	第一节 一阶微分方程	159
二、题型归纳与精讲	113	一、知识点精析	159
题型一 三重积分的计算	113	二、题型归纳与精讲	161
第三节 曲线积分	116	题型一 可分离变量方程	161
一、知识点精析	116	题型二 齐次方程的求解	162
二、题型归纳与精讲	119	题型三 一阶线性微分方程	163
题型一 对弧长的曲线积分的计算	119	题型四 伯努利方程的求解	164
		题型五 全微分方程的求解	165
		第二节 二阶方程	167
		一、知识点精析	167
		二、题型归纳与精讲	169



题型一 可降阶的高阶微分方程 的求解	169	题型四 向量组的秩与矩阵秩的计算与 证明	215
题型二 二阶常系数齐次线性微分 方程的求解	170	题型五 向量组的极大线性无关组	219
题型三 二阶常系数非齐次线性微分 方程的求解	171	第四章 线性方程组	221
题型四 欧拉方程的求解	172	一、知识点精析	221
题型五 微分方程的应用	173	二、题型归纳与精讲	224
题型六 微分方程与级数的结合	175	题型一 对解的判定,性质,结构的 考查	224
第二部分 线性代数		题型二 对含有参数的线性方程组解的 考查	229
第一章 行列式	177	题型三 对两个方程组公共解的 讨论	232
一、知识点精析	177	题型四 对基础解系相关知识的 考查	233
二、题型归纳与精讲	180	第五章 矩阵的特征值与特征向量	237
题型一 对逆序及行列式定义的 考察	180	一、知识点精析	237
题型二 与伴随矩阵,可逆性有关的 命题及计算	181	二、题型归纳与精讲	241
题型三 低阶行列式的计算	182	题型一 求数值矩阵的特征值与特征 向量及其性质的证明	241
题型四 高阶行列式的计算	183	题型二 求抽象矩阵的特征值与 特征向量	243
第二章 矩阵	190	题型三 求矩阵特征值与特征向量的 相关逆问题	246
第一节 矩阵的概念与计算	190	题型四 矩阵相似的相关问题	247
一、知识点精析	190	题型五 矩阵对角化的相关问题	249
二、题型归纳与精讲	192	第六章 二次型	253
第二节 逆矩阵	194	一、知识点精析	253
一、知识点精析	194	二、题型归纳与精讲	256
二、题型归纳与精讲	197	题型一 对二次型所对应的矩阵及其 性质的考查	256
题型一 逆矩阵及相关性质的考查	197	题型二 化二次型为标准型	258
题型二 对伴随阵相关知识的 考查	198	题型三 二次型及其矩阵正定性的判定 与证明	261
题型三 方阵可逆的相关证明	201	第三部分 概率论与数理统计	
题型四 有关初等矩阵的命题	201	第一章 随机事件与概率	268
题型五 矩阵秩与矩阵等价的命题	204	第一节 随机事件与概率	268
第三章 向量	207	一、知识点精析	268
一、知识点精析	207	二、题型归纳与精讲	270
二、题型归纳与精讲	210	第二节 简单的概型	272
题型一 向量组的线性相关性计算的 讨论	210	一、知识点精析	272
题型二 向量组的线性相关性证明的 讨论	212	二、题型归纳与精讲	272
题型三 向量组线性表示的计算与 证明	215	题型一 古典概型	272



题型二 几何概型	273	二、题型归纳与精讲	318
第三节 条件概率及相关的公式	275	题型一 离散型随机变量的数学	
一、知识点精析	275	期望	318
二、题型归纳与精讲	276	题型二 连续型随机变量的数学	
题型一 条件概率的计算	276	期望	318
题型二 重要公式的应用	277	题型三 数学期望的运算性质	319
题型三 独立性	278	第二节 随机变量的方差	322
第二章 随机变量及其分布	280	一、知识点精析	322
一、知识点精析	280	二、题型归纳与精讲	322
二、题型归纳与精讲	283	题型一 离散型随机变量的方差	322
题型一 随机变量分布函数与概率密度		题型二 连续型随机变量的方差	323
的性质	283	题型三 有关方差的综合计算	324
题型二 离散型随机变量	285	第三节 协方差与相关系数	326
题型三 随机变量的分布函数和概率密度		一、知识点精析	326
有关的计算	288	二、题型归纳与精讲	327
题型四 常见的连续性随机变量	291	题型一 协方差与相关系数的计算	327
题型五 计算随机变量函数的分布	293	题型二 不相关性的讨论	328
第三章 多元随机变量及其分布	295	第五章 大数定律和中心极限定理	331
一、知识点精析	295	第一节 大数定理	331
二、题型归纳与精讲	299	一、知识点精析	331
题型一 二维随机变量的分布函数	299	二、题型归纳与精讲	332
题型二 二元离散型随机变量的		第二节 中心极限定理	333
分布律	300	一、知识点精析	333
题型三 二元连续型随机变量的		二、题型归纳与精讲	333
概率密度	304	第六章 数理统计	336
题型四 边缘概率密度与条件		一、知识点精析	336
概率密度	307	二、题型归纳与精讲	337
题型五 随机变量的独立性	310	第七章 参数估计	340
题型六 随机变量函数的分布	311	一、知识点精析	340
第四章 数字特征	317	二、题型归纳与精讲	342
第一节 数学期望	317		
一、知识点精析	317		

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限和连续性



要点提示:极限是高等数学中最基本的运算,微积分中核心的运算微分和积分都可以看做是特殊的极限过程,而高等数学之所以让很多学生感到头疼,根本原因也是因为处理的都是极限过程。因此,可以毫不夸张地说:“高等数学是一门关于极限的学科。”基于其基础性的作用,正确理解并掌握极限的概念及相关性质也就成了高等数学入门阶段的复习过程中最为关键的一环。高等数学中所处理的函数绝大多数是连续函数或是除去有限个点以外的连续函数。函数的连续性与可导性、可积性也有重要的联系。因此,理解函数的连续性以及间断点的分类就变成了进一步学习的基础。本章主要的考点有:极限的运算法则、洛必达法则、两个重要极限、收敛法则、无穷小的比较、函数连续性及间断点的分类、闭区间上连续函数的性质。另外,本章的第一节还介绍了作为学习高等数学的预备知识的函数的相关知识,供广大考生参考。

第一节 函 数

一、知识点精析

1. 函数

从实数集的子集 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 f 称为函数,记作 $y=f(x), x \in D$, 称 x 为自变量, y 为因变量。函数的三要素:定义域、解析式和值域(也作二要素:定义域、解析式,因为这两者可以决定值域)。其中,定义域是自变量 x 的取值范围;值域是因变量的取值范围记作 $f(D)$ 。函数由其解析式和定义域唯一确定,与符号的选取无关,如 $y=f(x), x \in D$ 与 $u=f(t), t \in D$ 是同一个函数。

在没有特别指定的情况下,函数的定义域取自然定义域,即使得函数运算有意义的自变量的取值范围。易知,人为指定的定义域必为自然定义域的子集。常见的函数的定义域如下:

$$y=\sqrt{x}, x \geq 0; \quad y=\frac{1}{x}, x \neq 0$$



$$y = \ln x, x > 0; \quad y = e^x, x \in \mathbf{R}$$

$$y = \sin x, x \in \mathbf{R}; \quad y = \cos x, x \in \mathbf{R}$$

$$y = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad y = \cot x, x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$$

2. 函数的单调性

如果对函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 内的任意两点 $x_1 > x_2$ 都有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ [或 $f(x_1) \leq f(x_2)$], 就称函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增 (或单调递减), 相应地称 I 是 $f(x)$ 的一个单调增区间 (或单调减区间)。如果对区间 I 内的任意两点 $x_1 > x_2$ 都有 $f(x_1) > f(x_2)$ [或 $f(x_1) < f(x_2)$], 就称函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增 (或严格单调递减)。

函数单调性的性质:

(1) 如果 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 都是增函数 (或减函数), 则 $f_1(x) + f_2(x)$ 也是增函数 (或减函数)。

(2) 如果 $f_1(x)$ 是增函数, $f_2(x)$ 是减函数, 则 $f_1(x) - f_2(x)$ 是增函数, $f_2(x) - f_1(x)$ 是减函数。

(3) 如果 $f(x)$ 是增函数 (或减函数), 如果常数 $C > 0$, 则 $Cf(x)$ 是增函数; 如果常数 $C < 0$, 则 $Cf(x)$ 是减函数。

常见函数的单调增区间及单调减区间:

$$y = x^2 + ax + b, \text{增区间: } \left(-\frac{a}{2}, +\infty\right), \text{减区间: } \left(-\infty, -\frac{a}{2}\right).$$

$$y = e^x, \text{增区间: } (-\infty, +\infty).$$

$$y = \ln x, \text{增区间: } (0, +\infty).$$

$$y = \sin x, \text{增区间: } \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], \text{减区间: } \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}.$$

$$y = \cos x, \text{增区间: } [2k\pi - \pi, 2k\pi], \text{减区间: } [2k\pi, 2k\pi + \pi], k \in \mathbf{Z}.$$

3. 函数的周期性

如果存在正数 T , 使得函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 内的任意一点 x 都有 $f(x \pm T) = f(x)$, 就称 $f(x)$ 是一个周期函数, T 是 $f(x)$ 的一个周期。易知如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期, 那么对任意的正整数 n , nT 都是 $f(x)$ 的周期。在 $f(x)$ 的所有周期中, 一般, 把其中最小的称为最小正周期。很多时候, 往往也把最小正周期简称为周期。

周期函数的性质:

(1) 如果 $f(x)$ 以 T 为周期, 则对任意的非零常数 C , $Cf(x)$ 仍然以 T 为周期, $f(Cx)$ 以 $\frac{T}{|C|}$ 为周期。

(2) 如果 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 都以 T 为周期, 则 $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$ 仍然以 T 为周期 ($k_1, k_2 \in \mathbf{R}$)。注意这时最小正周期有可能缩小, 如 $f_1(x) = \cos 2x + \sin x$, $f_2(x) = \sin x$ 都以 2π 为最小正周期, 但 $f_1(x) - f_2(x) = \cos 2x$ 以 π 为最小正周期。

常见周期函数的周期:

$$y = \sin x, T = 2\pi; \quad y = \cos x, T = 2\pi$$

$$y = \tan x, T = \pi; \quad y = \cot x, T = \pi$$

4. 函数的奇偶性

如果对其定义域 D 内的任意一点 x , $f(-x) = f(x)$ [或 $f(-x) = -f(x)$], 就称 $f(x)$



是一个偶函数(或奇函数)。

奇偶函数的性质:

(1) 偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称。

(2) 如果 $f_1(x), f_2(x)$ 都是奇函数(或偶函数), 则对任意的常数 $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$, $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$ 仍然是奇函数(或偶函数)。

(3) 如果 $f_1(x), f_2(x)$ 奇偶性相同, 则 $f_1(x) f_2(x)$ 为偶函数; 如果 $f_1(x), f_2(x)$ 奇偶性相反, 则 $f_1(x) f_2(x)$ 为奇函数。

(4) 对于任意定义在对称区间上的函数 $f(x), f(|x|), \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 与 $f(x)f(-x)$ 都是偶函数, $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数。

常见的奇函数:

$$y=x^k, k \text{ 为奇数}, y=\sin x, y=\tan x, y=\cot x.$$

常见的偶函数:

$$y=x^k, k \text{ 为偶数}, y=\cos x.$$

5. 反函数

函数是一个映射, 如果该映射的逆映射存在, 则称该逆映射是函数 $y=f(x), x \in D$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y), y \in f(D)$ 。

反函数的性质:

(1) 函数 $y=f(x), x \in D$ 存在反函数当且仅当对定义域内任意两点 $x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。

(2) 反函数与原函数的图像关于直线 $y=x$ 对称。

(3) 反函数与原函数的增减性相同。

常见反函数:

$$f(x)=\sin x, \quad f^{-1}(y)=\arcsin y$$

$$f(x)=\cos x, \quad f^{-1}(y)=\arccos y$$

$$f(x)=\tan x, \quad f^{-1}(y)=\arctan y$$

$$f(x)=e^x, \quad f^{-1}(y)=\ln y$$

$$f(x)=\frac{1}{x}, \quad f^{-1}(y)=\frac{1}{y}$$

6. 复合函数

设 $y=f(u), u \in D_1$ 与 $u=g(x), x \in D_2$ 为两个函数, 如果 $g(x)$ 的值域 $g(D_2)$ 包含于 $f(u)$ 的定义域 D_1 , 则可以定义 $f(u)$ 与 $g(x)$ 的复合函数 $f \circ g: y=f[g(x)], x \in D_2$ 。类似地, 还可以定义三个或更多函数的复合函数。

复合函数的性质:

(1) 复合函数的运算满足结合律, 即 $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$ (注意, 复合函数不满足交换律。例如令 $f(x)=2x, g(x)=x^2$, 则 $f[g(x)]=2x^2, g[f(x)]=4x^2$ 。

(2) 如果 $f_1(x), f_2(x)$ 单调性相同, 则 $f_1[f_2(x)]$ 单调递增; 如果 $f_1(x), f_2(x)$ 单调性相反, 则 $f_1[f_2(x)]$ 单调递减。



7. 函数的有界性

设 $y=f(x), x \in D$ 是一个函数, 如果存在一个实数 M , 使得对定义域内任意的一点 x , 都有 $f(x) \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 有上界, 并称 M 是函数 $f(x)$ 的一个上界; 如果存在一个实数 m , 使得对定义域内任意的一点 x , 都有 $f(x) \geq m$, 则称函数 $f(x)$ 有下界, 并称 m 是函数 $f(x)$ 的一个下界。既有上界又有下界的函数称为有界函数, 也即函数 $f(x)$ 有界, 则存在实数 m 与 M , 使得对定义域内任意的一点 x , 都有 $m \leq f(x) \leq M$ 。

注: 有界函数还有一个等价的定义: 存在实数 $M \geq 0$, 使得对定义域内任意一点 x , 都有 $|f(x)| \leq M$ 。读者可以尝试自行证明这个结论。

二、题型归纳与精讲

【例 1.1.1】 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, 试求 $f[f(x)]$ 与 $f\{f[f(x)]\}$ 。

分析: 直接按定义代入。

解答: 按照定义有 $f[f(x)] = \begin{cases} 2f(x), & f(x) < 0 \\ [f(x)]^2, & f(x) \geq 0 \end{cases}$

由 $f(x)$ 定义域有

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0, f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

因此有

$$f[f(x)] = \begin{cases} 4x, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

进一步还有

$$\begin{aligned} f\{f[f(x)]\} &= \begin{cases} 4f(x), & f(x) < 0 \\ [f(x)]^4, & f(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 8x, & x < 0 \\ x^8, & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

【例 1.1.2】 设函数 $f(x)$ 是奇函数, 且是周期为 4 的周期函数, 已知当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 1$, 求 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 内的解析式。

分析: 通过几何意义求解。由于函数 $f(x)$ 是奇函数, 可以由 $[0, 2]$ 内的解析式得到 $[-2, 0]$ 上的解析式; 再由 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 可以由 $[-2, 0]$ 上的解析式平移得到 $[2, 4]$ 内的解析式。

解答: 设 $x \in [-2, 0]$, 则 $-x \in [0, 2]$, 由于 $f(x)$ 是奇函数, 因此当 $x \in [-2, 0]$ 时, 有 $f(x) = -f(-x) = -((-x)^2 + 2(-x) - 1) = -x^2 - 2x - 1$

再设 $x \in [2, 4]$, 则 $x - 4 \in [-2, 0]$, 由于 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 因此当 $x \in [2, 4]$ 时, 有

$$f(x) = f(x - 4) = -(x - 4)^2 - 2(x - 4) - 1 = -x^2 + 6x - 9$$

【例 1.1.3】 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, 求其反函数 $f^{-1}(x)$ 。

分析: 按照反函数的定义, 通过 $y = f(x)$ 反解出 $x = f^{-1}(y)$, 再求出其定义域, 即原函数的值域即可。



解答: 当 $x < 0$ 时, $y = 2x$, y 的取值范围为 $y < 0$, 可得 $x = \frac{y}{2}$, $y < 0$;

当 $x \geq 0$ 时, $y = x^2$, y 的取值范围为 $y \geq 0$, 可得 $x = \sqrt{y}$, $y \geq 0$.

$$\text{则 } f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{2}, & y < 0 \\ \sqrt{y}, & y \geq 0 \end{cases}$$

【例 1.1.4】讨论下列函数在其定义域内的有界性。

$$\frac{x}{1+x^2}, \sin\left(\frac{e^x}{x+1}\right), \sqrt{x}$$

分析: 按照定义, 如果有界, 找出其上界和下界; 如果无界, 予以说明。

解答: $\frac{x}{1+x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 由 $(|x| - 1)^2 = x^2 + 1 - 2|x| \geq 0$ 可得 $x^2 + 1 \geq 2|x|$,

因此 $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$, 因此 $\frac{x}{1+x^2}$ 在定义域上有界。

$\sin\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 。在其定义域上有 $\left| \sin\left(\frac{e^x}{x+1}\right) \right| \leq 1$, 因此函数在定义域上有界。

$\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 可知当 x 无限增大时, $\sqrt{x}$ 也无限增大, 因此 $\sqrt{x}$ 无上界; 易知, $\sqrt{x} \geq 0$, 因此 $\sqrt{x}$ 有下界。

第二节 极 限

一、知识点精析

1. 基本概念

(1) 数列极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, 存在一个正整数 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$ 。

(2) 函数极限(形式很多, 把握其规律)

① 极限: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, 存在一个正数 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 。

注: 函数在 a 点的极限是该函数在 a 点附近的性质, 与函数在 a 点的函数值及其他性质均无关。

② 左(右)极限: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, 存在一个正数 $\delta > 0$, 当 $-\delta < x - a < 0$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 。

右极限的定义类似。

(3) 无穷小

以 0 为极限的量; 也即, 如果 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 0$, 则称 $x \rightarrow \square$ 时 $f(x)$ 为无穷小。

注: 无穷小是一个极限, 一个变化的过程, 而不是真正的 0。

(4) 无穷大

在自变量的某一过程中, 函数值为无限增大的量:

注: ① 无穷大实际上是极限不存在的情况, 但极限不存在的量并不一定都是无穷大量。



② 无穷大量也是一个动态变化的过程,而不是一个实际存在的数。

③ 无穷大量与无穷小量的关系:无穷大量的倒数是无穷小量,非 0 的无穷小量的倒数是无穷大量。

(5) 无穷小量的比较

设 $\lim_{x \rightarrow \square} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \square} \beta(x) = 0, x \rightarrow \square$ 可以是任一极限过程。

① 高阶无穷小量与低阶无穷小量: $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \Leftrightarrow \alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量, $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小量,记作 $\alpha(x) = o[\beta(x)], x \rightarrow \square$ [也就是说 $\alpha(x)$ 收敛于 0 的速度比 $\beta(x)$ 快]。

② 同阶无穷小量: $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0 \Leftrightarrow \alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量 [可以理解为 $\alpha(x)$ 收敛于 0 的速度与 $\beta(x)$ 在同一数量级]。

③ 等价无穷小量:同阶无穷小量的特殊情况,将定义中的 C 改为 1 即可,记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ [也就是说 $\alpha(x)$ 收敛于 0 的速度与 $\beta(x)$ 完全一样]。

2. 重要公式、定理

(1) 极限的性质

四则运算: 设 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = B, x \rightarrow \square$ 可以是任一极限过程。

$$\lim_{x \rightarrow \square} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = AB$$

$$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \square} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \square} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

注:四则运算只适用于有限次计算的情形,对无限次运算不一定适用。如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ 个}} = 1.$$

(2) 数列极限的性质及其收敛法则

1) 性质:

唯一性: 若 $\{x_n\}$ 收敛,则其极限唯一。

有界性: 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 有界(其逆不真)。

保序性: 有两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$

若从某一项 N 开始,以后所有项都有 $x_n \geq y_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ (注:把“ $\geq$ ”都改为“ $>$ ”,则结论不成立)。

若有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, 则从某一项 N 开始,以后所有项都有 $x_n > y_n$ (注:把“ $>$ ”都改为“ $\geq$ ”,则结论不成立)。

2) 收敛准则:

单调有界原理: 单调递增有上界的数列必有极限;单调递减有下界的数列必有极限;单调无界的数列极限为 $+\infty$ 或 $-\infty$ (注:定理也适用于从某一项以后开始单调的数列)。



夹逼定理:若存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

(3) 函数极限的性质及其相关定理

1) **唯一性:**若 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$ 存在, 则极限唯一。

2) **保序性:**若存在正数 δ , 对于任意满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x 都有 $f(x) \geq g(x)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ (注: 把“} \geq \text{”都改为“} > \text{”, 则结论不成立)}.$$

若有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, 存在正数 δ , 对于任意满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x 都

有 $f(x) > g(x)$ (注: 把“ $>$ ”都改为“ $\geq$ ”, 则结论不成立)。

3) **夹逼定理:**若存在正数 δ , 对于任意满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x 都有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \square} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \square} \psi(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A$ 。

4) **洛必达法则:**

① $\left(\frac{0}{0}\right)$ 型

$x \rightarrow a$ 情况下, 设 $f(x), g(x)$ 满足:

- i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;
- ii $f(x), g(x)$ 在 a 的邻域内可导 (a 点除外) 且 $g'(x) \neq 0$;
- iii $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或等于 $+\infty$ 或 $-\infty$), 则有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。

$x \rightarrow \infty$ 情况下, 设 $f(x), g(x)$ 满足:

- i $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$;
- ii 存在一个正数 X , 当 $|x| > X$ 时有 $f(x), g(x)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$;
- iii $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或等于 $+\infty$ 或 $-\infty$), 则有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。

② $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ 型

$x \rightarrow a$ 情况下, 设 $f(x), g(x)$ 满足:

- i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;
- ii $f(x), g(x)$ 在 a 的邻域内可导 (a 点除外) 且 $g'(x) \neq 0$;
- iii $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或等于 $+\infty$ 或 $-\infty$), 则有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。

$x \rightarrow \infty$ 情况类似 $\frac{0}{0}$ 型。

5) 两个重要极限

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。

② $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 。

6) 重要公式:

① 需要记住的等价无穷小量:

$x \rightarrow 0$ 时



$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \frac{(1+x)^a - 1}{a}$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$$

② 几种常见的无穷大量趋近于无穷的快慢比较:

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 以下各函数趋近于无穷的快慢:

$$\frac{\ln x, x^a (a > 0), b^x (b > 1), x^x}{\text{由慢到快}}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 以下各数列趋近于无穷的快慢:

$$\frac{\ln n, n^a (a > 0), b^n (b > 1), n!, n^n}{\text{由慢到快}}$$

3. 计算极限的主要方法

(1) 四则运算

设 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = B$, 极限过程可以是 $x \rightarrow x_0, x \rightarrow \infty$ 等。

$$\lim_{x \rightarrow \square} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = AB$$

$$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \square} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \square} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$$

注: ① 关于无穷的运算法则:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (+\infty) - (-\infty) = +\infty, (-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, (+\infty) + C = +\infty$$

$$0 \cdot C = 0, \frac{C}{0} = \infty (C \neq 0), \frac{C}{\infty} = 0$$

$$C \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, C > 0 \\ -\infty, C < 0 \end{cases}, a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, a > 1 \\ 0, 0 < a < 1 \end{cases}$$

② 如果出现 $\frac{0}{0}, \infty - \infty, 1^\infty$ 等情况, 则不能直接用公式计算需要应用后面的方法计算。

(2) 等价无穷小替换

设在 $x \rightarrow \square$ 时, $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x)\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \square} f(x)\beta(x), \lim_{x \rightarrow \square} \frac{g(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} \frac{g(x)}{\beta(x)} \quad [\alpha(x) \neq 0]$$

注: ① 等价无穷小替换在极限计算过程中一般起辅助的作用, 它和洛必达法则连用可以简化计算。

② 只有整个式子的乘除因子才能用等价无穷小替换, 有加减时不能替换。如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ 中的 $\sin x$ 不能替换为 x 。事实上, 由洛必达法则可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$ 。

(3) 洛必达法则

注: ① 如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在, 并不代表 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。如由夹逼原理可知 $x > 0$ 时,



$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, 因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} + 1 = 1$. 而如果运用洛必达法则的话, 就会得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ 不存在.

② 使用洛必达法则之前, 先检验是否满足所需条件.

③ 多次应用时, 注意在用完之后将式子整理化简.

④ 与等价无穷小量结合使用通常可以简化计算.

(4) 利用两个重要极限

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{推广: } \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1, f(x) \neq 0$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\text{推广: } \lim_{f(x) \rightarrow 0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e, f(x) \neq 0 \text{ 或 } \lim_{f(x) \rightarrow \infty} (f(x))^{\frac{1}{f(x)-1}} = e, f(x) \neq 1$$

③ 关于幂指函数的三个公式

$$\bullet \text{ 设 } \lim_{x \rightarrow \square} u(x) = a > 0, \lim_{x \rightarrow \square} v(x) = b, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow \square} u(x)^{v(x)} = a^b$$

$$\bullet \text{ 设 } \lim_{x \rightarrow \square} u(x) = 1, \lim_{x \rightarrow \square} v(x) = \infty, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow \square} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \square} [u(x) - 1]v(x)}$$

$$\bullet \text{ 设 } \lim_{x \rightarrow \square} u(x) = 0 > 0, \lim_{x \rightarrow \square} v(x) = \infty, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow \square} [1 + u(x)]^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \square} u(x)v(x)}$$

(5) 夹逼法

函数极限: 若存在正数 δ , 对于任意满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x 都有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 且 $\lim \varphi(x) = \lim \psi(x) = A$, 则 $\lim f(x) = A$.

数列极限: 若存在自然数 N , 当存在正数 $n > N$ 时, 有 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

注: 夹逼法实质上是对待求极限的数列或函数进行放大或缩小, 进行放缩的时候有两个原则: ① 尽量简化计算; ② 不改变极限值, 优先考虑此条.

(6) 利用单调有界原理

单调有界原理: 单调递增有上界的数列必有极限; 单调递减有下界的数列必有极限; 单调无界的数列极限为 $+\infty$ 或 $-\infty$ (注: 定理也适用于从某一项以后开始单调的数列).

注: 单调有界原理一般用于递推形式的数列极限, 也即数列以 $a_{n+1} = f(a_n)$ 的形式给出的极限. 思路是: 先证明极限存在 (一般要用到数学归纳法证明数列单调有界), 再对递推式两边同时取极限得到 $a = f(a)$, 进而解出极限值 a .

二、题型归纳与精讲

题型一 利用初等变换直接求极限

$$\text{【例 1.2.1】} \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right]$$

分析: 注意到公式 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right]$, 原式可以通过它逐项消去从而实现简化.