MATHEMATICS OLYMPIAD

数学竞赛

湖南教育出版社 11

数学竞赛

MATHEMATICS OLYMPIAD

ISBN 7－5355－1349－2／G·1344

定 价：1.60 元

数学竞赛

湖南教育出版社 11

数 学 竞 赛

(11)

本 社 编

责任编辑：欧阳维诚

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷三厂印刷

850×1168毫米　32开　印张：4.125　字数：100000

1991年12月第1版　1991年12月第1次印刷

印数：1—2200

ISBN7—5355—1349—2／G・1344

定　价：1.60元

目　录

第 32 届 IMO 试题解答

湘 普

第 32 届国际中学生数学竞赛(IMO)于 1991 年 7 月 17～18 日在瑞典斯德哥尔摩举行，下面是此次竞赛的试题及其解答：

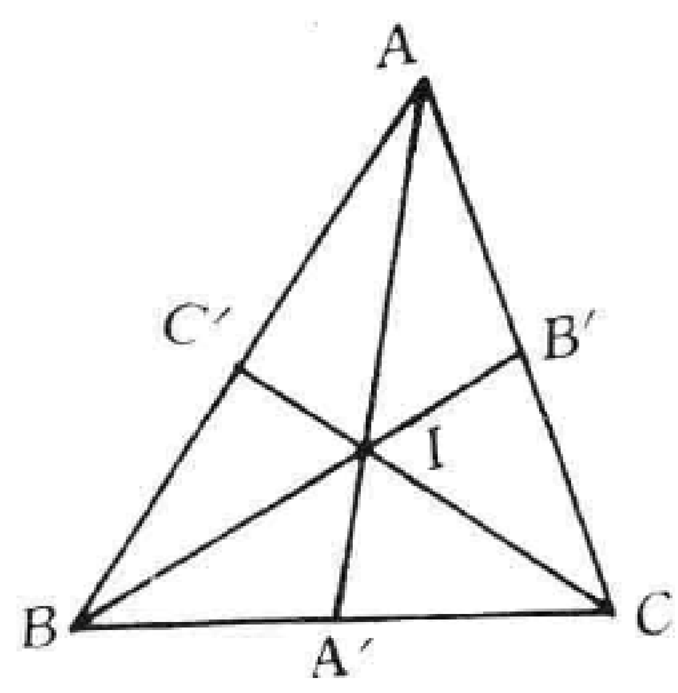
一、(英国供题)设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，角 A、B、C 的内角平分线分别与其对边交于 A'、B'、C'，求证：

$$\frac{1}{4}<\frac{IA\cdot IB\cdot IC}{AA'\cdot BC'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}$$

证 如图，令 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，

则 $$\frac{IA'}{IA}=\frac{A'C}{b}=\frac{BA'}{c}$$

$$=\frac{BA'+A'C}{b+c}=\frac{a}{b+c}$$



于是 $\dfrac{AA'}{IA}=\dfrac{a+b+c}{b+c}$， $\dfrac{IA}{AA'}=\dfrac{b+c}{a+b+c}$，

同理 $\dfrac{IB}{BB'}=\dfrac{a+c}{a+b+c}$， $\dfrac{IC}{CC'}=\dfrac{a+b}{a+b+c}$

因为 $$\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}=2$$

且 $\dfrac{b+c}{a+b+c}>\dfrac{1}{2}$， $\dfrac{a+c}{a+b+c}>\dfrac{1}{2}$， $\dfrac{a+b}{a+b+c}>\dfrac{1}{2}$

故可设：

$$\frac{b+c}{a+b+c}=\frac{1}{2}+\alpha,\quad \frac{a+c}{a+b+c}=\frac{1}{2}+\beta,\quad \frac{a+b}{a+b+c}=\frac{1}{2}+\gamma$$

此处$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}$

由均值不等式可得

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27} \tag{1}$$

以及 $$\frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{(a+b+c)^3}=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)$$

$$>\frac{1}{8}+\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1}{4} \tag{2}$$

综合(1)与(2)，即得

$$\frac{1}{4}<\frac{IA\cdot IB\cdot IC}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}$$

二、(罗马尼亚供题)设 n 是大于 6 的自然数，a_1，a_2，$\cdots$，a_k 是所有小于 n 且与 n 互素的自然数．如果

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_k-a_{k-1}>0$$

求证：n 或者是素数或者是 2 的某个正整数幂．

证 令 $M=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1},\ a_k\}$

因为$(1,\ n)=1$，$(n-1,\ n)=1$，故必 $a_1=1$，$a_k=n-1$．若令 $d=a_2-a_1>0$，则 M 可写成：

$$M=\{1,\ 1+d,\ 1+2d,\ \cdots,\ n-1\}$$

下面就d的值分别讨论：

若 $d=1$，则 $M=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$，即 n 与所有小于它的自然数互素，所以 n 为一素数．

若 $d=2$，则 $M=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ n-1\}$，即 n 是偶数，且与一切小于 n 的奇数互素，故 n 是 2 的乘幂．

若 $d\geqslant3$，则 $3\notin M$，即 $(3,\ n)>1$，故 $3|n$．由 $n-1=1+(k-1)d$，得 $n-2=(k-1)d$，若 $3|d$，则 $3|2$，此不可能，故 $3\nmid d$．又 $1+d\in M$，若有 $3|1+d$，则 $(1+d,\ n)\geqslant3$，矛盾，

故 $3\nmid 1+d$. 由此得 $3|d-1$，$3|d+2$，从而 $3|1+2d$. 即 $1+2d$ 不在 M 中，这意味着 M 中只有两个数：1，$n-1$.

不难证明：小于 n 且与 n 互素的自然数只有 1 和 $n-1$ 的自然数 n 只有三种可能：$n=3$，$n=4$，$n=6$，均与 $n>6$ 矛盾. 故 $d\geqslant 3$ 不可能出现. 命题得证.

三、(中国供题)设 $S=\{1, 2, \cdots, 280\}$，求最小的自然数 n，使得 S 的每一个 n 元子集都含有 5 个两两互素的数.

解 $n=217$.

先证明：当 $n\geqslant 217$ 时，S 的任一 n 元子集中都存在 5 个两两互素的数.

因为不超过280的素数共有59个，令

$B_1=\{1和S中的素数\}$

$B_2=\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2\}$

$B_3=\{2\times 131, 3\times 89, 5\times 33, 7\times 37, 11\times 23, 13\times 19\}$

$B_4=\{2\times 127, 3\times 87, 5\times 47, 7\times 31, 11\times 19, 13\times 17\}$

$B_5=\{2\times 113, 3\times 79, 5\times 43, 7\times 29, 11\times 17\}$

$B_6=\{2\times 109, 3\times 73, 5\times 41, 7\times 33, 11\times 13\}$

易见 $B_i(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 都是 S 的不相交子集，在同一 B_i 中数两两互素. 令

$$B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4\cup B_5\cup B_6$$

则 $|B|=60+6+6+6+5+5=88$

从而 $|S/B|=280-88=192$

由 $217-192=25$ 知，在 S 中任取一个 217 元子集 D，D 中至少有 25 个元素属于 B. 根据抽屉原理，至少有 5 个数属于同

一个 $B_i(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$，这 5 个数是两两互素的．所以 $n \leqslant 217$.

我们构造一个 S 的 216 元子集，使其中任意 5 个数都不两两互素．事实上，令

$A_i = \{k|k \in S, i|k\}$ ，$i=2, 3, 5, 7$.

$A = A_2 \bigcup A_3 \bigcup A_5 \bigcup A_7$

利用容斥原理:

$$|A|=\left[\frac{280}{2}\right]+\left[\frac{280}{3}\right]+\left[\frac{280}{5}\right]+\left[\frac{280}{7}\right]-\left(\left[\frac{280}{6}\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{280}{10}\right]+\left[\frac{280}{14}\right]+\left[\frac{280}{15}\right]+\left[\frac{280}{21}\right]+\left[\frac{280}{35}\right]\right)$$
$$+\left[\frac{280}{30}\right]+\left[\frac{280}{42}\right]+\left[\frac{280}{70}\right]+\left[\frac{280}{105}\right]-\left[\frac{280}{210}\right]=216$$

从 A 中任取 5 个数，其中必有两个属于同一个 $A_i(i=2, 3, 5, 7)$，它们不互素．故 $n>216$.

综上所述，$n=217$.

四、（美国供题）设 G 是有 k 条棱的连通图．用自然数 $1,2,\cdots,k$ 给 G 的各条棱编号，求证：对于任意至少属于两条棱的顶点，从该顶点出发的所有棱的标号数的最大公因数为 1.

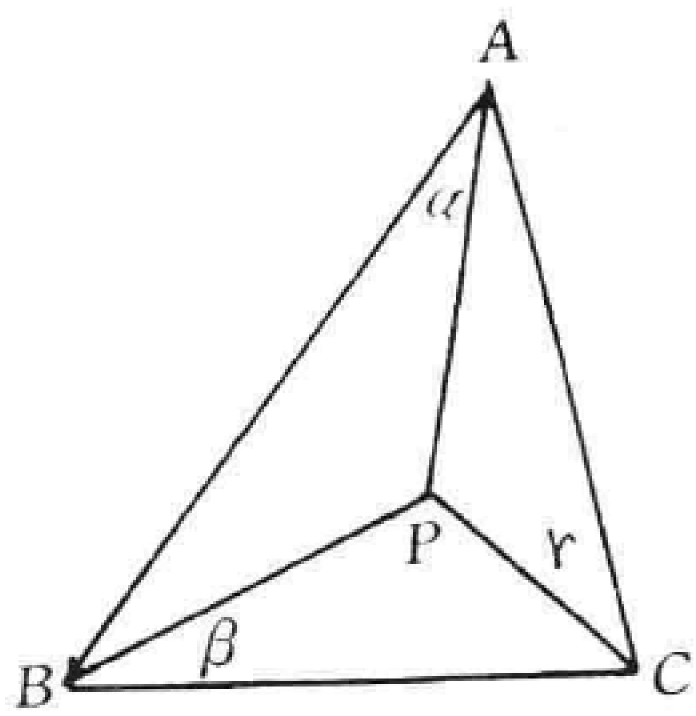
证 因为 G 是连通图，G 的每一顶点至少属于一条棱．任取 G 的一个顶点 V_0，从 V_0 出发，沿 G 的棱前进，使得 G 的每一条棱至多通过一次（顶点可通过多次），假设经过 l_1 条棱之后无法再继续前进，依次通过的顶点顺次记为 V_0，$V_1,\cdots V_{l_1}$（其中某些不同的 i、j，V_i、V_j 可能是同一顶点，$0 \leqslant i<j \leqslant l_1$）．显然 $1 \leqslant l_1 \leqslant k$．将已通过的棱顺次编号为 1，2，$\cdots l_1$．易知，除 V_0 外，其余任一顶点，如果从这点出发的棱有两条以上被编号，必有两条棱的编号为两个相邻的自然数．（因为设这顶点

为 V_t，从 V_{t-1} 到达 V_t 的棱编号为 t，则从 V_t 离开到达 V_{t+1} 的棱编号为 $t+1$).

当$l_1=k$时，则所有的棱都已标号.

当 $1\leqslant l_1<k$ 时，由 G 的连通性知，必存在这样的顶点，它已有两条被编号的棱通过，但从该点出发的棱中尚有未标号的．再从此点出发，按上述的办法对未标号的棱从 l_1+1 开始继续依次标号．由于 G 的棱有限，最后必可将所有的棱依次标号为 1，2，$\cdots k$.

现在任取 G 的一顶点 V，若从 V 出发至少有两条棱，当 $V=V_0$，则由于从 V_0 出发的棱有一条标号为 1，故从 V_0 出发的所有棱的标号的最大公因数为 1.若 $V\neq V_0$，则从 V 出发的棱中有两条标号为相邻的自然数，也有从 V 出发的所有棱的标号数的最大公因数为 1.



五、(法国供题)设 P 是$\triangle ABC$ 内一点，求证$\angle PAB$、$\angle PBC$、$\angle PCA$ 三个角中至少有一个小于或等于 30°.

证：令$\angle PAB=\alpha$，$\angle PBC=\beta$，$\angle PCA=\gamma$.

$S_{\triangle PAB}=S_1$，$S_{\triangle PBC}=S_2$，$S_{\triangle PCA}=S_3$.

则 $$2S_1=PA\cdot AB\sin\alpha=PB\cdot AB\sin(B-\beta)$$

$$2S_2=PB\cdot BC\sin\beta=PC\cdot BC\sin(C-\gamma)$$

$$2S_3=PC\cdot AC\sin\gamma=PA\cdot AC\sin(A-\alpha)$$

将以上三式相乘并两边除以 $PA\cdot PB\cdot PC\cdot AB\cdot BC\cdot CA$，即得

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin(A-\alpha)\sin(B-\beta)\sin(C-\gamma)$$

$$(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2=\sin\alpha\sin(A-\alpha)\sin\beta\sin(B-\beta)\sin\gamma\sin(C-\gamma)$$

由 $\ln\sin X$在$(0,\ \pi)$间的凸性可知

$$(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2 \leqslant \sin^6\frac{\alpha+A-\alpha+\beta+B-\beta+\gamma+C-\gamma}{6}$$

$$=\sin^6\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

所以 $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}.$

由此可知，$\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\sin\gamma$ 三者中至少有一个的值不超过$\frac{1}{2}$，不妨设 $\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}$. 则或者 $\alpha\leqslant 30°$；或者 $\alpha\geqslant 150°$，从而 $\beta+\gamma\leqslant 30°$. 在所有情况下，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 中都至少有一个小于或等于 $30°$.

六、（荷兰供题）已给实数 $a>1$，试构造一个无穷有界数列 x_0，x_1，x_2，…，使得对每一对不同的非负整数 i，j，都有 $|x_i-x_j||i-j|^a\geqslant 1$.

解 对非负数n，设

$$n=b_0+b_1 10+\cdots+b_m 10^m \quad (0\leqslant b_i\leqslant 9)$$

$$y_n=b_0+b_1 10^{-a}+\cdots+b_m 10^{-ma}$$

则 $$|y_n|<9\sum_{k=0}^{\infty}10^{-ka}=\frac{9}{1-10^{-a}}=\frac{9\cdot 10^a}{10^a-1}$$

故 $\{y_n\}$ 为有界数列. 任取非负整数 i，j $(i<j)$，

$$i=c_0+c_1 10+\cdots+c_l 10^l$$

$$j=d_0+d_1 10+\cdots+d_h 10^h$$

并令 t 是满足 $c_s\neq d_s$，当 $s<t$ 时，$c_t=d_t$ 的最小数，则 $|i-j|\geqslant 10^t$. 又

$$|y_i - y_j| \geqslant 10^{-ta} - 9(10^{-(t+1)a} + 10^{-(t+2)a} + \cdots)$$

$$= 10^{-ta} - 9 \cdot 10^{-(t+1)a} \frac{1}{1 - 10^{-a}}$$

$$= 10^{-ta} - 9 \cdot 10^{-(t+1)a} \frac{10^{a}}{10^{a} - 1}$$

$$|y_i - y_j||i - j|^a \geqslant 1 - \frac{9}{10^a - 1} = \frac{10^a - 10}{10^a - 1}$$

令$x_n = \dfrac{10^a - 1}{10^a - 10} y_n$，则 $\{x_i\}$ 即合所求.

注：此题可改进为$a = 1$. 令

$$x_n = 9(n - \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]\sqrt{2}，|x_n| = 9\sqrt{2}\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]\right) < 9\sqrt{2}$$

于是数列 x_0，x_1，x_2，$\cdots$

有界. 设 $p \in N$，$q \in N +\ \{0\}$，则 $|p - q\sqrt{2}| \geqslant \dfrac{1}{9p}$

事实上，若有 $|p - q\sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{9p}$

则 $-\dfrac{1}{9p} \leqslant p - q\sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{9p} \Rightarrow 9p^2 - 1 \leqslant 9\sqrt{2}pq \leqslant 9p^2 + 1$

$$\Rightarrow 81p^4 - 18p^2 + 1 \leqslant 162p^2q^2 \leqslant 81p^4 + 18p^2 + 1$$

在 $81p^4 - 18p^2 + 1$ 与 $81p^4 + 18p^2 + 1$ 之间只有 $81p^4$ 可以是 $81p^2$ 的倍数，故必有 $162p^2q^2 = 81p^4$，从而 $2q^2 = p^2$，矛盾.

故必 $|p - q\sqrt{2}| > \dfrac{1}{9p}$. 对于不同的 $i,j \in N +\ \{0\}$，不妨设 $i > j$，则

$$|x_i - x_j| = 9|(i - j) - \left(\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{j}{\sqrt{2}}\right]\right)\sqrt{2}| \geqslant \frac{1}{|i - j|}.$$

即 $|x_i - x_j||i - j| \geqslant 1$.

论奥林匹克数学*

罗增儒

国际数学奥林匹克(International. Matnematical olympiad，简称 IMO)指的是国际中学生数学竞赛.1959 年罗马尼亚首倡这项活动以来，已经举办了 32 届. 数学奥林匹克活动的发展，产生了许多始料未及的学术成果，其意义远远超过只选拔出几个尖子人才. 在中国，有三个主要方面:

1. 诞生了一个数学教育的新分支　以 IMO 为龙头，包括各国不同层次的数学竞赛活动已经搭起了一个数学教育新分支的框架，我们称之为“数学奥林匹克”(或数学竞赛). 这是通过数学内容而进行的教育. 立足点在教育. 这种教育的基本特征是：(1) 以开发智力为根本目的；(2) 以解答问题为基本形式；(3) 以竞赛数学为主要内容;(4)具有包括选拔尖子人才在内的教育功能.

2. 形成了一个教育数学的新层面　以 IMO 的 188 道题为主体，包括候选题和各国高水平的竞赛内容，已经结构出一个数学新层面的雏形，我们称之为“奥林匹克数学”（或竞赛数学）. 这是具有教育功能的数学，立足点在数学.

我们的初步研究显示，这个以竞赛为标记的数学. 自始至终都是各国数学工作者的共同创造. 但却没有任何个人专利的世界数学，这个以“问题和解”为形式的数学，横跨传统数学与现代数学. 既充满挑战性问题又充满挑战性解答的活数学. 有趣的是，虽然没有预先规定好的命题大纲，完全是各自独立、充分自由的创造，但各国数学工作者却有不约而同的集中思考.（中国古语

* 原文约2万余字，发表时由编辑部作了删节.

说：英雄所见略同！）这些集中思考，有相对稳定的内容，有充满创造性的方法，有深沉而活泼的风格，有锋芒毕露的功能，表现为奥林匹克数学的四个基本特征：

(1) 处于中间数学的特征（中间数学）；

(2) 邻接数学前沿的特征（前沿数学）；

(3) 展示数学艺术的特征（艺术数学）；

(4) 富于教育功能的特征（教育数学）；

本文的主题，就是对这四个方面进行分析.

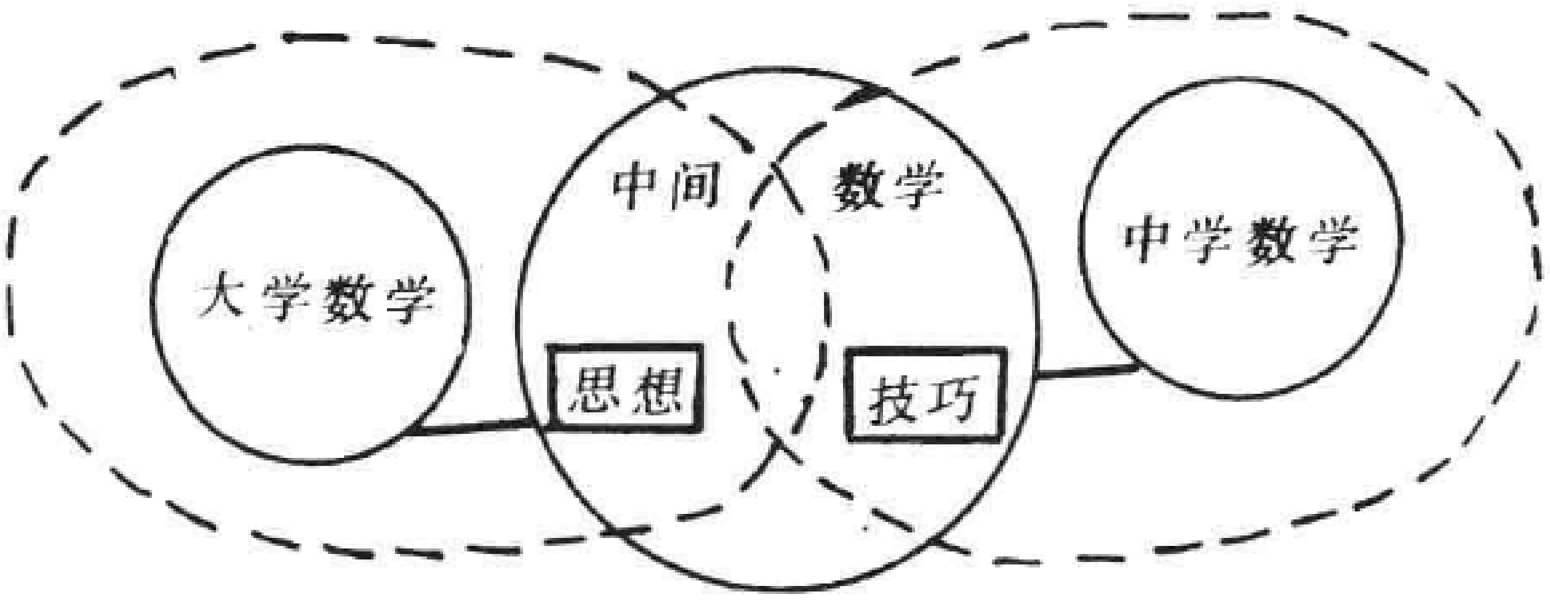
3. 造就了一个数学奥林匹克新学派　以数学竞赛的组织、选拔、命题、求解与科研等方面为纽带，形成了一个强大的人才集团，我们姑称之为“奥林匹克学派”. 这个学派包括专业数学工作者,教育行政管理人员和中学教师,其中不乏一流数学家参与.

数学竞赛的活动虽然包括的方面很多，但都离不开这三个学术方面的活动；同样，数学竞赛的发展，也离不开这三个本质方面的发展. 三十年来竞赛经验的积累，已经为全面进行理论研究（包括命题原则、培训大纲、早慧儿童教育、竞赛选手跟踪等在内）准备了丰富的素材. 作为开头，我们先从数学教育的角度探讨第二个学术成果，谈谈奥林匹克数学的基本特征. 所提出的论点，意在抛砖引玉.

一、处于中间数学的特征

奥林匹克竞赛所涉及的内容，走过了一段从古典传统到现代化的路程. 开始的那些年头，主要是中学教材中的代数方程、平面几何、三角函数等，经过 30 年的发展，已经相对稳定在几个中学教材不怎么涉及的内容上，如几何（包括在欧几里得空间中的拉姆赛问题），有图论或其他组合背景的不等式，多项式与函数方程等. 这样一个广泛的内容，我们既不能直接归为中学数学（因为它有大学数学的背景，并且用了很多大学数学的思想方法），也不能简单地并入大学数学，毕竟 IMO 的命题到微积分之前就截止了，并不超出中学或优秀中学生所能接受的范围，毕

竟大学数学知识对于选手并不要求，在解题中也不起决定性作用. 情况表明，它是高等数学的深刻思想与初等数学的精妙技巧相结合的"中间数学"，很多题目确有高等背景，而解法完全是初等的.



我们用两个虚线椭园分别表示大学数学与中学数学，它们不能截然分开，因而相交. 又用两个实线圆表示大学数学和中学数学的实质部分，它们从研究内容到研究方法都有着显著的区别，因而相离. 竞赛数学处于两个实心圆之间. 很多思想来源于高等数学，而基本方法则植根于初等数学，至于阴影部分，是指那些表面上不象"数学题"，却与数学思维的实质相联系，就是说，不需要用到高深的数学工具，但要有良好的数学素质，如敏锐的数学思考，深刻的数学分析，精湛的数学构思.

例 1. （1983 年中国）函数 $F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$ 在 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关，问 A、B 取什么值时 M 为最小？证明你的结论.

此题是函数逼进论中的最佳逼近问题，有契比雪夫定理：次数不大于 n 的一个多项式 $P_n(x)$ 成为 $C〔a,\ b〕$ 中某给定函数 $f(x)$ 的最佳逼近多项式的充分必要条件是 $p(x)-f(x)$ 至少在 $(a,\ b)$ 上 $n+2$ 个点处交错地达到 $|p_n(x)-f(x)|$ 的最大值.

例 2 （1963 中国北京）已知多项式 x^3+bx^2+cx+d 的系

数都是整数，并且 $bd+cd$ 是奇数．证明：这多项式不能分解成为两个整系数多项式的乘积．

这类题目的统一背景是多项式理论中的爱森斯坦定理 (Esensten)：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是整系数多项式，如果存在素数 p，使最高次项的系数 a_0 不能被 p 整除，而所有其余的系数都能被 p 整除，但常数项 a_n 不能被 p^2 整除，那么 $f(x)$ 不能分解为两个低次的整系数多项式的乘积．

例 3　(1963 波兰) 若平面内五点没有 3 点共线，则其中必有某 4 点是凸 4 边形的 4 个顶点．

此题还曾被美国普特南 (Putman) 数学竞赛采用，背景是组合数学的 Erdos—Szekers 定理：假设整数 $m \geqq 3$，则存在一个整数 N_m 在 $n \geqq N_m$ 时，若平面内的 n 个点无 3 点共线，那么总有 m 点可连成一个凸 m 多边形 (自然 $N_m>m$).

例 4　(1951 匈牙利) 同一平面上的 4 个半平面完全覆盖了这个平面，即：平面的任一点至少和 4 个半平面中的一个半平面的某一内点重合．证明：从这些半平面中，可以挑选出 3 个半平面，它们仍能覆盖全平面．

此题的背景是关于凸集的海莱定理：设在平面上给定了有限多个凸图形，如果其中任何三个凸图形包含有公共点，那么存在这样一个点，它同时属于所有这些图形．

例 5　(1978IMO) 一个国际社团的成员来自六个国家，共 1978 人，用 1，2，…，1977，1978 编号，请证明，该社团至少有一个成员的编号数，与他的两个同胞的编号数之和相等，或是一个同胞的编号的二倍．

背景是组合数学的许尔定理 (Schur)：存在正整数 $S(r)$，使得当 $n \geqq S(r)$ 时，把集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 划分为 r 个子集

合 N_1，N_2，$\cdots N_r$，必存在一个子集合 N_1，使得在这个子集合中，方程 $x+y=z$ 有解．

关于例 5，有一个尚未解决的猜想：有 n 个人来自 k 个国家 $(n \geqq k \geqq 2)$，若 $n=\dfrac{3^k-1}{2}$，则无论如何编号，都至少有一个国家，其中至少有两个同胞的编号之差，是另一个同胞的编号．

例 6　(1964 IMO)17 个科学家中每名科学家都和其他科学家通信，在他们通信时只讨论三个题目，而且任意两名科学家通信时只讨论一个题目．证明其中至少有三名科学家，他们互相通信中讨论的是同一题目．

这题的统一背景是图论中的拉姆赛定理(Ramsey). 值得指出，拉姆赛背景的竞赛题很多、很有趣，保持着一种长盛不衰的势头，也构成了竞赛数学极具特点的性格，染色和抽屉原理在数学竞赛中的地位，就象三角形内角和定理之于欧氏几何，那样基本，那样有名，甚至连小学生都知道抽屉原理．

例 7　(1987　中国冬令营)把边长为 l 的正三角形 ABC 的各边都 n 等分，过各分点作平行于其它两边的直线，将这三角形分成小三角形．各小三角形的顶点都称为结点．在每一结点上放置了一个实数．已知

(Ⅰ) A, B，C三点上放置的数分别为a，b，c;

(Ⅱ) 在每个由有公共边的两个最小三角形组成的菱形之中，两组相对顶点上放置的数之和相等．试求

(1)放置最大的数的点与放置最小数的点之间的最短距离.

(2)所有结点上的数的总和S.

此题的背景是二元伯恩斯坦多项式．[1]

例 8　(1987 IMO) 命 $p_n(k)$ 是集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的保持 k 个不动的排列的数目．求证: