

④首届学术报告会④

编号

基—8306

论文资料

关于某些含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的积分公式的讨论

(王 志 东)

常州工业技术学院

九三·十二

关于某些含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的积分公式的讨论

本文讨论被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 而其原函数中含有反三角函数的一些积分公式。这些公式在常见的积分表中有四行，列出如下：（见中国矿业学院数学教研室编《数学手册》第二版中不定积分表中公式（20），（72），（75），（79）。其他各常用教材所附积分表与此基本相同。）

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{u} + C \quad (1)$$

$$\int \frac{du}{u(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{u} + C \quad (2)$$

$$\int \frac{du}{u^3(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3} \arccos \frac{a}{u} + C \quad (3)$$

$$\int \frac{(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}} du}{u} = \sqrt{u^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{u} + C \quad (4)$$

对这些公式进行分析，发现公式（2）（3）（4）中反余弦函数中的 u 应加绝对值，公式（1）中反正割函数的主值应放在 $-$ 、 $+$ 象限，否则运用这些公式进行计算就可能出现错误。

以公式（4）为例进行讨论，从两方面来检查。

1. 从原函数的导数，还是被积函数这一点来检查。

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{u^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{u} \right)' &= \frac{u}{\sqrt{u^2-a^2}} - \frac{\frac{a^2}{u^2}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{u^2}}} \\ &= \frac{u}{\sqrt{u^2-a^2}} - \frac{a^2}{|u|\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u|u|-a^2}{|u|\sqrt{u^2-a^2}} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} & u > a \quad (a > 0) \\ \frac{u^2 + a^2}{u\sqrt{u^2 - a^2}} & u < -a \quad (a > 0) \end{cases}$$

由此可见，在 $u < -a$ 的区间， $\sqrt{u^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{u}$ 的导数，并非 $\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}$ ，换句话说，在此区间， $\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}$ 的原函数并非 $\sqrt{u^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{u}$ 。

从换元积分过程中来检查，以便找出产生错误的原因。

$$\text{令 } u = a \sec t \quad du = a \sec t \tan t dt$$

$$\sec t = \frac{u}{a}, \quad \cos t = \frac{a}{u} \quad t = \arccos \frac{a}{u}$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \int \frac{a \sqrt{\sec^2 t - 1}}{a \sec t} \cdot a \sec t \tan t dt$$

$$= a \int \tan t |\tan t| dt$$

$$= \begin{cases} a \int \tan^2 t dt = a \tan t - t + c & t \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} = \sqrt{u^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{u} + c & u \in [a, +\infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -a \int \tan^2 t dt = -a \tan t + t + c & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} = \sqrt{u^2 - a^2} + a \arccos \frac{a}{u} + c & u \in (-\infty, -a] \end{cases}$$

由此可见，公式(4)仅适用于 $u \in [a, +\infty)$ 的情况，而对 $u \in (-\infty, -a]$ 的情况，仅余弦函数前应为正号，产生错误的原因在于无条件地把 $\sqrt{\tan^2 t}$ 化为 $\tan t$ 。

因此，要使公式(4)适用于 $u \geq a$ ， $u \leq -a$ 的所有情况，应

改为:

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} \mp a \arccos \frac{a}{u} + C \quad (4')$$

其中当 $u \geq a$ 时取 $-$, $u \leq -a$ 时取 $+$.

但公式 (4') 有双重符号, 有便于使用, 对此可加以改进.

由于 $\arccos(-u) = \pi - \arccos u$

所以, 当 $u \leq -a$ 时

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du &= \sqrt{u^2 - a^2} + a \arccos \frac{a}{u} + C_1 \\ &= \sqrt{u^2 - a^2} + a \left[\pi - \arccos \left(-\frac{a}{u} \right) \right] + C_1 \\ &= \sqrt{u^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{|u|} + C \end{aligned}$$

这样公式 (4') 改进为

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{|u|} + C \quad (4-1)$$

同理可推得公式 (2) (3) 中 $\frac{a}{u}$ 应改为 $\frac{a}{|u|}$.

$$\int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{|u|} + C \quad (2-1)$$

$$\int \frac{du}{u^3(u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3} \arccos \frac{a}{|u|} + C \quad (3-1)$$

对这些积分, 也可引用反正割函数, 如公式 (1)。但要引用反正割函数, 必需明确规定它的主值区间。主值区间规定得不同, 原函数的形式也有所不同。通常反正割函数主值区间的规定有两种方法:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \text{当 } u \geq 1 \text{ 时} \quad 0 \leq \operatorname{arcsec} u < \frac{\pi}{2} \\ & \text{当 } u \leq -1 \text{ 时} \quad \frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} x \leq \pi \end{aligned}$$

(II) 当 $u \geq 1$ 时, $0 \leq \arccos u < \frac{\pi}{2}$

当 $u \leq -1$ 时, $-\pi \leq \arccos u < -\frac{\pi}{2}$

这两种方法都各有人采用, 例如, C. V. 诺 塞洛夫著《三角学专门教程》采用 (I), 《数学手册》采用 (II), 它们的不同仅在于当 $u \leq -1$ 时, $\arccos u$ 的区间所在象限不同, (I) 为第二象限, (II) 为第三象限。

现讨论在 (I) (II) 规定下 积分公式的形成。

(I) 此时 $\arccos u$ 与 $\arccos \frac{1}{u}$ 的区间是相同的

即 $\arccos u = \arccos \frac{1}{u}$

因此, 只要把前面各积分公式中的 $\arccos \frac{a}{|u|}$ 换为 $\arccos \frac{|u|}{a}$ 即可。

$$\int \frac{du}{u(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{|u|}{a} + C \quad (2-2)$$

$$\int \frac{du}{u^3(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3} \arccos \frac{|u|}{a} + C \quad (3-2)$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} du = \sqrt{u^2-a^2} - a \arccos \frac{|u|}{a} + C \quad (4-2)$$

(II) 此时, 当 $u \geq 1$ 时, $\arccos u = \arccos \frac{1}{u}$

当 $u \leq -1$ 时 $\arccos u = -\arccos \frac{1}{u}$

两式合并可写作 $\arccos u = \pm \arccos \frac{1}{u}$

式中当 $u \geq 1$ 时取+, 当 $u \leq -1$ 时取-,

由上述关系, 公式 (4-1) 可改写为

$$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} du = \sqrt{u^2-a^2} - a \arccos \frac{u}{a} + C \quad (4-3)$$

同样也有,

$$\int \frac{du}{u(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc sec} \frac{u}{a} + C \quad (2-3)$$

$$\int \frac{du}{u^3(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc sec} \frac{u}{a} + C \quad (3-3)$$

注意公式(2-3)与公式(1)相同

举例计算对比

例：计算 $I_1 = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ 和 $I_2 = \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

解：显然被积函数是奇函数， I_1, I_2 的积分区间是对称于原点的，因此有 $I_2 = -I_1$

用公式(4)计算

$$I_1 = \left[\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arc cos} \frac{1}{x} \right]_{\sqrt{2}}^2 = \sqrt{3}-1 - \operatorname{arc cos} \frac{1}{2} + \operatorname{arc cos} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{3}-1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \sqrt{3}-1 - \frac{\pi}{12} \quad I_1 \text{ 是正确的}$$

$$I_2 = \left[\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arc cos} \frac{1}{x} \right]_{-2}^{-\sqrt{2}} = 1-\sqrt{3} - \operatorname{arc cos} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{arc cos} \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1-\sqrt{3} - \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = 1-\sqrt{3} - \frac{\pi}{12}$$

$I_2 \neq -I_1$ ， I_2 是错误的

用公式(4-1)计算

$$I_1 = \left[\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arc cos} \frac{1}{|x|} \right]_{\sqrt{2}}^2 = \sqrt{3}-1 - \frac{\pi}{12}$$

$$I_2 = \left[\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arc cos} \frac{1}{|x|} \right]_{-2}^{-\sqrt{2}} = 1-\sqrt{3} - \operatorname{arc cos} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arc cos} \frac{1}{2}$$

$$= 1-\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = 1-\sqrt{3} + \frac{\pi}{12}$$

$I_2 = -I_1$ ， I_1, I_2 都正确

用公式(4-2)计算

$$I_1 = \left[\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec} x \right]_{\sqrt{2}}^2 = \sqrt{3} - 1 - \operatorname{arcsec} 2 + \operatorname{arcsec} \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$$

$$I_2 = \left[\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec} x \right]_{-2}^{-\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{3} - \operatorname{arcsec} (-\sqrt{2}) + \operatorname{arcsec} (-2)$$

$$= 1 - \sqrt{3} - (-\frac{3}{4}\pi) + (-\frac{2}{3}\pi) = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12}$$

$$I_2 = -I_1$$

I_1, I_2 都正确

通过以上讨论，建议各积分表中将公式 (2) (3) (4) 改为公式 (2-1) (3-1) (4-1)，以便使用时在任何情况下都能得到正确的结果。为了教学，使用的方便，最好不引入反正割函数。如果要引入反正割函数，则应采用规定 (II) 及公式 (2-3) (3-3) (4-3) 为较好。

北京人民广播电台
东大街160号 电话5366