华腾教育

高等学校教材经典同步辅导丛书数学专业类(一)
配高教社《数学分析》第三版 上册 华东师范大学数学系 编

数学分析

上册 华东师大第三版

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
曾 捷 主编

◇紧扣教材 ◇知识精讲 ◇习题全解
◇应试必备 ◇联系考研 ◇网络增值

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步辅导

数学分析

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
曾　捷　主编

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是高等教育出版社出版，华东师范大学数学系编的《数学分析》（第三版）教材的配套辅导书。全书由课程学习指南、知识点归纳、典型例题与解题技巧、历年考研真题评析、课后习题全解及考研考试指导等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题和解决问题的方法技巧，并且提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校数学分析课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析（上册）同步辅导及习题全解/曾捷主编．
徐州：中国矿业大学出版社，2006.8
（高等学校教材经典同步辅导丛书）
ISBN 7 - 81107 - 399 - 4

Ⅰ.数…　Ⅱ.曾…　Ⅲ.数学分析—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 086920 号

书　　名　数学分析（上册）同步辅导及习题全解
主　　编　曾　捷
责任编辑　罗　浩
选题策划　孙怀东
特约编辑　王丽娜
出版发行　中国矿业大学出版社
印　　刷　北京市昌平百善印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　720×960　1/16　**本册印张** 20.5　**本册字数** 499 千字
印　　次　2008 年 7 月第 1 版第 4 次印刷
总 定 价　83.60 元

前言

PREFACE

《数学分析》是数学类专业重要的基础课之一，也是报考该类专业硕士研究生的专业考试课程。华东师范大学数学系编的《数学分析》(第三版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《数学分析同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到《数学分析》这门课程的特点，我们在内容上做了以下安排：

1. 课程学习指南　从该课程的知识体系出发，对各个章节在全书的位置，以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述，使学习更有重点。

2. 知识点归纳　串讲概念，总结性质和定理，使得知识全面系统，便于掌握。

3. 典型例题与解题技巧　精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题、能够举一反三，拓展思路。

4. 历年考研真题评析　精选历年考研真题进行深入的讲解。

5. 课后习题全解　本书给出了华东师范大学数学系《数学分析》(上册)(第三版)各章课后习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程，而且对有难度或综合性较强的习题做了分析和小结，从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

6. 考研考试指导　首先归纳了本课程的考研考点，然后精选了清华大学等名校的最新考研考试试题并给出了参考答案，以帮助学生顺利通过相关考试。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此，谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网：http://www.huatengedu.com.cn

电子邮件：huateng@huatengedu.com

华腾教育教学与研究中心

目 录

CONTENTS

课程学习指南

数学分析是数学类各专业必修的一门主干核心理论基础课程，也是以后继续深化系统学习数学理论的基础课程，同时也是数学类各专业硕士研究生入学考试的必考科目，因此学好本门课程，掌握好基础理论对以后的学习是非常重要的。

学习数学分析课程的目的是了解掌握数学分析的基本理论，进而提高自己解决实际问题的能力。在社会经济高速发展的今天，数学分析在工程方面的应用越来越普遍。

数学分析课程具有很强的理论性和系统性，需要一定的理论分析能力与逻辑思维能力，因此在学习本课程之前最好有计划地进行适当预习，并了解一下相关理论的发展历程，对所学的课程有一个体系性的把握。同时本课程又是一门指导性的学科，对它的掌握直接关系到数学专业的其他课程。

数学分析 ⇒	实变函数
	复变函数
	泛函分析
	常微分方程

本册书包含十一章内容，可分为四个部分。第一部分为实数与函数，包括第一、七两章，主要介绍实数集与函数和实数的完备性。第二部分为极限与连续，包括第二至四章，主要介绍数列极限与函数的连续性。第三部分为导数微分两方面，包括第五、六章，主要介绍导数和微分与微分中值定理及其应用。第四部分为积分方面内容，包括八至十一章内容，主要介绍不定积分、定积分、定积分的应用与反常积分等内容。

数学分析是一门逻辑性很强的课程，因此学习这门课程有一定难度。为了学好这门课程，建议在学习过程中应按以下方法学习：

1. **理解掌握基本概念与定理，掌握基本方法。**
2. **注意，理论前后发展的系统性与联系性，要融会贯通，保持知识的连续性。**
3. **要注意应用所学的理论分析实际问题，做到理论与实际相结合。**

4. 要养成综合分析，认真思考的良好学习习惯。

此外，为了帮助学生在考研、期末考试等考试中取得良好成绩，我们提出以下建议：

1. **勤动脑、爱思考。**将课程中所学的理论知识与实际问题相结合，认识到知识的力量在应用实践。

2. **多阅读、善分析。**要重点阅读一些数学分析方面的书籍，提高自已的分析能力及综合理论素质，并归纳总结解题的思维方法，做到学为所用，举一反三。

第一章
实数集与函数

知识点归纳

一、实数

1. 实数及其性质

(1)实数包括有理数和无理数.有理数可用分数$\frac{p}{q}$(p、q为整数,$q\neq0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示.实数的无限十进小数表示在人类实践活动中被普遍采用,我们是由无限十进小数表示出发来阐述实数理论的.

(2)若$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为非负实数,称有理数

$$x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

为实数x的n位不足近似,而有理数

$$\bar{x}_n=x_n+\frac{1}{10^n}$$

称为x的n位过剩近似,$n=0,1,2,\cdots$.

2. 绝对值与不等式

实数a的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant0\\-a, & a<0\end{cases}$$

从数轴上看,数a的绝对值$|a|$就是点a到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质:

(1)$|a|=|-a|\geqslant0$,当且仅当$a=0$时有$|a|=0$.

(2)$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(3)$|a|<h\Leftrightarrow-h<a<h$;$|a|\leqslant h\Leftrightarrow-h\leqslant a\leqslant h(h>0)$.

(4)对于任何a、$b\in\mathbf{R}$有如下的三角形不等式:

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$$

(5)$|ab|=|a||b|$.

(6)$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq0)$.

二、数集·确界原理

1. 区间与邻域

邻域是数学分析中重要的基本概念.某点的邻域是与该点靠近的数的集合,它是描述极限概念的基本工具.

(1)$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$称为$a$的$\delta$邻域,其中$\delta>0$.

(2)$U^{\circ}(a;\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$称为$a$的空心$\delta$邻域,其中$\delta>0$.

(3)$U_{+}^{\circ}(a;\delta)=(a,a+\delta)$和$U_{-}^{\circ}(a;\delta)=(a-\delta,a)$分别称为$a$的右邻域和左邻域,其中$\delta>0$.

在无限区间记号$(-\infty,a]$,$(-\infty,a)$,$[a,+\infty)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,+\infty)$中出现的$-\infty$与$+\infty$仅是常用的记号,它们并不表示具体的数.在数学分析课程范围内,不要把$+\infty$,$-\infty$,∞当作数来运算.

2. 有界集

有界集和无界集是本章中关键的概念.要熟练掌握验证某个数集S是有界集或无界集的方法,其中重要的是证明数M不是数集S的上界(或下界)的方法.

3. 确界及确界定理

(1)确界是数学分析的基础严格化中的重要的概念.上(下)确界是最大(小)数在无限数集情况下的推广.确界概念有两种等价的叙述方法,以上确界为例:

设S是$\mathbf{R}$中一个数集,若数η满足

①(ⅰ)对一切$x\in S$,有$x\leqslant\eta$,则η是S的上界;
　(ⅱ)对任意$\alpha<\eta$,存在$x_0\in S$,使得$x_0>\alpha$,则η又是S的最小上界.

或

②(ⅰ)对一切$x\in S$,有$x\leqslant\eta$,则η是S的上界;
　(ⅱ)对任意$\varepsilon>0$,存在$x_0\in S$,使得$x_0>\eta-\varepsilon$,则η又是S的最小上界.

则称数η为数集S的上确界,记作$\eta=\sup S$.

这两种定义是等价的.(2)中的$\eta-\varepsilon$相当于(1)中的α.在上述定义中可以限定$\varepsilon<\varepsilon_0$,其中$\varepsilon_0$为充分小的正数.定义(2)在某些证明题中使用起来更方便些.

(2)确界原理:设S是非空数集,若S有上界,则S必有上确界;若S有下界,则S必有下确界.

三、函数及其性质

1. 函数

(1)函数定义

给定两个实数集D和M,若有一个对应法则f,使D内每一个数x,都有唯一的一个数$y\in M$与它对应,则称f是定义在D上的一个函数,记为$y=f(x)$,$x\in D$,并称D为函数的定义

域,称 $f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}(\subset M)$ 为函数 f 的值域.

(2)几个重要的函数

①分段函数

函数在其定义域的不同部分用不同的公式表达,这类函数常称为分段函数.

②符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

③狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

④黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q},p,q\in\mathbf{N}_+,\dfrac{p}{q}\text{ 为既约真分数}\\ 0, & \text{当 } x=0,1 \text{ 和}(0,1)\text{中的无理数}\end{cases}$$

⑤复合函数

$$y=f(g(x)),x\in E^*$$

其中 $y=f(u),u\in D,u=g(x),x\in E,E^*=\{x|g(x)\in D\}\cap E,E\neq\varnothing$.

(3)反函数

已知函数 $u=f(x),x\in D$. 若对 $\forall y\in f(D)$,在 D 中有且只有一个值 x,使得 $f(x)=y$,则按此对应法则得到一个函数 $x=f^{-1}(y),y\in f(D)$,称这个函数 $f^{-1}:f(D)\to D$ 为 f 的反函数.

(4)初等函数

①基本初等函数　常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数称为基本初等函数.

②初等函数　由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数,统称为初等函数.

③凡不是初等函数的函数,都称为非初等函数.

2. 函数的性质

(1)有界性

设 $y=f(x),x\in D$,有

①若存在数 M,使 $f(x)\leqslant M,\forall x\in D$,则称 f 是 D 上的有上界的函数.

②若存在数 L,使 $f(x)\geqslant L,\forall x\in D$,则称 f 是 D 上的有下界的函数.

③若存在正数 C,使 $|f(x)|\leqslant C,\forall x\in D$,则称 f 是 D 上的有界函数.

④若对任意数 M,都存在 $x_0\in D$,使 $f(x_0)>M$,则称 f 是 D 上的无上界函数,类似可定义无下界及无界函数.

(2)单调性

设 $y=f(x)$，$x\in D$，若对 $\forall x_1,x_2\in D$，$x_1<x_2$，有

①$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 f 在 D 上是递增函数.

②$f(x_1)<f(x_2)$，则称 f 在 D 上是严格递增函数.

类似可定义递减函数与严格递减函数.

(3)奇偶性

设 D 是对称于原点的数集，$y=f(x)$，$x\in D$，有

①若 $\forall x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是偶函数.

②若 $\forall x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$是奇函数.

③奇函数图象关于原点对称，偶函数图像关于纵轴对称.

(4)周期性

①设 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在正数 k，使 $f(x\pm k)=f(x)$，$\forall x\in D$. 则称$f(x)$为周期函数，k 称为 f 的一个周期.

②若 f 的所有周期中，存在一个最小周期，则为 f 的基本周期.

典型例题与解题技巧

例 1 设 $f(x)$在$[-a,a]$上有定义，证明 $f(x)$在$[-a,a]$上可表示为奇函数与偶函数的和.

【分析】 本题主要考察奇函数、偶函数的定义，采用构造法解题.

证 设 $f(x)=G(x)+H(x)$，其中 $G(x)$，$H(x)$分别为奇、偶函数，于是

$$f(-x)=G(-x)+H(-x)=-G(x)+H(x)$$

而
$$f(x)=G(x)+H(x)$$

由之可得
$$G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},H(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

这里 $G(x)$，$H(x)$分别是奇函数和偶函数.

例 2 求数集 $S=\left\{\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\,\middle|\,n\in\mathbf{N}_+\right\}$的上、下确界.

【分析】 当 $n=2k$ 时，$\sqrt[2k]{1+2^{2k}}=2\sqrt[2k]{1+\frac{1}{2^{2k}}}$，容易看出 $k=1$ 时，$2\sqrt{1+\frac{1}{2^2}}$是偶数项中的最大数. 当 $n=2k+1$ 时，$\sqrt[2k+1]{1+2^{-(2k+1)}}=\sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}>1$，当 k 充分大时，奇数项与数 1 充分靠近. 因为 $2\sqrt{1+\frac{1}{2^2}}=\sqrt{5}$是 S 中最大数，于是 $\sup S=\sqrt{5}$，由上面分析可以看出 $\inf S=1$.

解 因为$\sqrt{5}$是 S 中最大数，于是 $\sup S=\sqrt{5}$. 再证 $\inf S=1$，这是因为

(1) $\forall n$，$\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\geqslant 1$；

(2)设 $a=\sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}$，由等式 $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)$可知

$$\sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}-1=\frac{\frac{1}{2^{2k+1}}}{a^{2k}+a^{2k-1}+\cdots+1}\leqslant\frac{1}{2^{2k+1}}$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists k_0\in\mathbf{N}_+$ $\left(\text{只要 } k_0>\frac{1}{2}\left(\log_2\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\right)$，使得

$$\sqrt[2k_0+1]{1+\frac{1}{2^{2k_0}+1}}-1\leqslant\frac{1}{2^{2k_0}+1}<\varepsilon$$

即

$$\sqrt[2k_0+1]{1+\frac{1}{2^{2k_0}+1}}<1+\varepsilon$$

例 3　设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上，如果对于任何 $x_1,x_2\in I$，及 $\lambda\in(0,1)$，恒有 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

证明：在区间 I 的任何闭子区间上 $f(x)$ 有界.

【分析】　本题主要考察函数的有界性，要充分利用已知条件给出的不等式，积极构造出类似的不等式，以证出结论.

证　$\forall[a,b]\subset I$，$\forall x\in(a,b)$，则存在 $\lambda\in(0,1)$，使 $x=a+\lambda(b-a)$，有

$$x=\lambda b+(1-\lambda)a$$

由已知不等式有

$$f(x)=f[\lambda b+(1-\lambda)a]\leqslant\lambda f(b)+(1-\lambda)f(a)\leqslant\lambda M+(1-\lambda)M=M \qquad ①$$

其中 $M=\max\{f(a),f(b)\}$.

$\forall x\in[a,b]$，令 $y=(a+b)-x$，那么

$$\frac{a+b}{2}=\frac{x+y}{2}$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})\leqslant\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)\leqslant\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}M$$

所以

$$f(x)\geqslant2f(\frac{a+b}{2})-M=m_1 \qquad ②$$

由①，②两式可知　$m_1\leqslant f(x)\leqslant M$，$\forall x\in(a,b)$.

再由 M 的定义，可知 $f(x)\leqslant M$，$\forall x\in[a,b]$

若令 $m=\min\{f(a),f(b),m_1\}$，则

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\ \forall x\in[a,b]$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

历年考研真题评析

题 1　（北京大学，2005 年）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，求证：$\exists c\in[a,b]$，使得对 $\forall\varepsilon>0$，$f(x)$ 在 $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap[a,b]$ 上无界.

【分析】　本题采用闭区间套定理证明.

证　取 a,b 中点 $\frac{a+b}{2}$，则 $[a,\frac{a+b}{2}]$，$[\frac{a+b}{2},b]$ 中至少有一个区间使 $f(x)$ 无界（如果两个

都是可任取一个),记为$[a_1,b_1]$.

再取中点$\frac{a_1+b_1}{2}$,又可得区间$[a_2,b_2]$,使$f(x)$在其上无界,这样继续下去有

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

使$f(x)$在每个区间上无界.

由区间套原理,存在$c=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,则$c\in[a,b]$,而对$\forall\varepsilon>0$,当$n$充分大时,有

$$(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap[a,b]\supset[a_n,b_n]$$

故$f(x)$在$(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap[a,b]$上无界.

题 2 (甘肃工业大学,2007 年)有下列几个命题:

(1)任何周期函数一定存在最小正周期.

(2)$[x]$是周期函数.

(3)$\sin\sqrt{x}$不是周期函数.

(4)$x\cos x$不是周期函数.

其中正确的命题有( ).

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】 本题主要考察周期函数的定义.

解 选 B 其中:

(1)错. 比如$f(x)=0$. 那么任何正实数都是它的周期,而无最小正实数.

(2)错. 设$f(x)=[x]$的周期为$T>0$,并设$[T]=m\geqslant0$.

当$m=0$时,则$T=1-a$,其中$0<a<1$,那么$[a+T]=1$,$[a]=0$. 故$[a+T]\neq[a]$. 这与T为周期矛盾. 所以,$m\neq0$.

当$m>0$时,$[T+1]=m+1$,$[1]=1$,故$[1+T]\neq[1]$,也矛盾.

所以$[x]$不是周期函数.

(3)对. 若$f(x)$是定义域D上周期函数,那么存在函数T,使$\forall x\in D$都有$f(x\pm T)=f(x)$. 这必须有$x\pm T\in D$. 而本题定义域$D=[0,+\infty)$,若是周期函数,则$0\in D$,必须$-T\in D$,但$-T\notin D$,故不是周期函数.

(4)对. 用反证法,设$f(x)=x\cos x$的周期为$T>0$,则

$$f(0)=0=f(T)=T\cos T$$

故$\cos T=0$,$T=n_0\pi+\frac{\pi}{2}$,$n_0\in\mathbf{Z}$,且$n_0\geqslant0$,于是

$$f(\frac{\pi}{2}+T)=f(\pi+n_0\pi)=(n_0+1)\pi\cos[(n_0+1)\pi]$$

$$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=0$$

由$f(\frac{\pi}{2}+T)=f(\frac{\pi}{2})$,知$\cos(n_0+1)\pi=0$,矛盾. 即$x\cos x$不是周期函数.