

清华北大学生的学习秘笈·让你快速提升自己的成绩

主编 / 徐文凭



# 清华北大

学子

# 高效复习法

[ 名校学子满腹经纶献秘方  
权威专家联袂审读塑精品 ]

- 名校学子真诚奉献
- 成功高考全新助剂
- 高效复习全面揭露
- 权威专家联袂把关



# 数学

人民日报出版社



清华北大学子的学习秘笈·让你快速提升自己的成绩

主编 / 徐文凭



# 清华 北大

学子

# 高效复习法

【名校学子满腹经纶献秘方  
权威专家联袂审读塑精品】

- 名校学子真诚奉献
- 成功高考全新助剂
- 高效复习全面揭露
- 权威专家联袂把关



# 数学

人民日报出版社

高必考备

清华北大学子高效复习法

# 数 学

徐文凭 主编

田洪江 审订

人民日报出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

清华北大学子高效复习法·数学/徐文凭主编.-北京:  
人民日报出版社,2004.3  
(冲刺高考王中王)  
ISBN 7-80153-823-4

I. 清... II. 徐... III. 数学课-高中-升学参考  
资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 014892 号

**书 名:清华北大学子高效复习法·数学**

**主 编:徐文凭**

**责任编辑:安 申**

**封面设计:大象工作室**

**出版发行:人民日报出版社(北京金台西路2号  
邮编:100733)**

**经 销:新华书店**

**印 刷:北京市兆成印刷有限责任公司**

**开 本:880×1230 1/32**

**字 数:2600 千**

**印 张:95**

**印 数:1-5000 册**

**印 次:2005年1月第1版 第1次印刷**

**书 号:ISBN 7-80153-823-4/G·453**

**总 定 价:360.00 元**



## 前 言

一直有个期待——用我们力所能及，还每一位在高考边缘饱受煎熬的高中生朋友以快乐、自由和梦想成真。直到此刻，当我们把清华北大两所我国著名高等学府优秀学子的复习方法结集出版，我们绷紧的心弦才得以松弛。

用真诚作注，这是我们始终不遗余力的方向。因为我们懂得，此时的你们最需要的是真诚的理解和宽容的关注。虽然高考会给年轻的你们以压力和不堪负重，但人生之旅是一个漫长而精彩纷呈的舞台，我们又何苦苛求一时的成败呢？

当然，这不是让大家回避高考，而是要淡然处之，坦然面对。况且还有许许多多走过高考的“过客”站在你们面前，成为你们的参照，给予你们以指导。

诚然，踏入大学之门，并不完全是人生价值的体现。但，作为“十年寒窗”的终结，大学依然是众多学子为之奋斗的方向。因此，面对高考，许多考生困惑、迷茫、无所适从，进而走入极端。所有这些都令我们深感痛心，帮助这些学子们早日从这种烦躁不安的困境中摆脱出来，掌握良好的复习方法，并走向成功，正是我们出版此书的目的所在。

或许，这点滴之言，于你、于诸多学子并不能裨益其全部，我们也没法将高考复习的奥妙尽收录其内。我们怕的就是偏见，因为每一颗年轻的心都憧憬快乐的人生，可生活的故事充满了喜剧与悲剧。作为主角的你们，我们教你走向成功之时，也应教你坚强，敢于面对失败。磨炼脆弱的本身，不也是你人生一个成功的伊始吗？

本书的每一篇章，经过精心的设计、总结，内容尽其所能地为正确合理的高考复习指明道路。“考点预览”，为您的明天指明方向，



针对各考点提出不同的要求,设计不同的学习方法,增强您的目标意识,让您做到心中有数;“知识概要”,分析知识分布点,提纲挈领地展现篇章知识构建;“巧思妙记”,对记忆进行归类指导,化繁为简,对您的思维进行多向变通,点石成金;“精点精练”,帮您消化教材知识,夯实基础;“评测在线”,为您提供一个梯度性极强的战场,打造一个应用知识升华能力的新空间。

对于美好的学生时代,即使是高考在望,我们也应以平常心对之。太多的名利于心,会让你背负过重的包袱,于高考、于人生不利。在众多的高考话题中,我们的目的不在于渲染它的利,而是防其弊。因为人生就是一个不断的启程,不断的上路,不断的回首的过程。

看看这些可爱的文字吧,在风雨来临之前,他们的学习方法,是否值得借鉴,让你有所感触?因为,他们刚从这“围城”中走出,而你们却正在朝这“围城”走进。要知道,我们多想设更多的路标,使不再有迷途的孩子!就让我们扫尽荆棘,把路踏得更平些吧,即使成功是那样遥远而艰苦。

以此之心,换彼之心。我们多希望这本书能帮助你顺利通过高考,并走向成功。就让我们和你一起上路吧!——为你的明天喝彩,并祝愿你走向成功。

相信自己吧,因为这里有我们的期待——  
等你在……前面!

田洪江

2005年1月





## 目 录

第一章 .....	1
高考综述 .....	1
§ 1.1 集合 .....	3
§ 1.2 映射与函数 .....	5
§ 1.3 函数的定义域与值域 .....	12
§ 1.4 函数的奇偶性 .....	18
§ 1.5 函数的单调性 .....	25
§ 1.6 反函数 .....	32
§ 1.7 函数的最值 .....	41
§ 1.8 反函数 .....	49
§ 1.9 二次函数与幂函数 .....	55
§ 1.10 指数函数、对数函数(一) .....	62
§ 1.11 指数函数、对数函数(二) .....	69
§ 1.12 指数方程和对数方程 .....	73
第二章 .....	81
高考综述 .....	81
§ 2.1 三角函数的概念 .....	83
§ 2.2 同角间基本关系式与诱导公式 .....	90
§ 2.3 三角函数的图像 .....	98
§ 2.4 三角函数的性质(一) .....	108
§ 2.5 三解函数的性质(二) .....	115
第三章 .....	123
高考综述 .....	123
§ 3.1 基本公式的运用 .....	124
§ 3.2 三角函数式的求值与化简 .....	127



§ 3.3	三角函数式的证明 .....	135
§ 3.4	解斜三角形 .....	143
<b>第四章</b>	.....	152
<b>高考综述</b>	.....	152
§ 4.1	反正弦函数 .....	153
§ 4.2	反余弦函数 .....	162
§ 4.3	反正切函数与反余切函数 .....	170
§ 4.4	最简单的三角方程 .....	175
<b>第五章</b>	.....	184
<b>高考综述</b>	.....	184
§ 5.1	不等式的概念和性质 .....	186
§ 5.2	两个基本不等式 .....	193
§ 5.3	不等式的证明(比较法) .....	201
§ 5.4	不等式的证明(综合法与分析法) .....	208
§ 5.5	不等式的证明(其他方法) .....	215
§ 5.6	有理不等式和无理不等式的解法 .....	223
§ 5.7	指数不等式和对数不等式的解法 .....	231
§ 5.8	绝对值不等式 .....	238
§ 5.9	不等式的综合应用 .....	244
<b>第六章</b>	.....	254
<b>高考综述</b>	.....	254
§ 6.1	数列的概念 .....	255
§ 6.2	等差数列与等比数列的基本运算 .....	263
§ 6.3	等差数列与等比数列的性质及应用 .....	272
§ 6.4	等差(比)数列的综合运用 .....	278
§ 6.5	数列求和 .....	288
§ 6.6	数列极限 .....	295
§ 6.7	数列极限的应用 .....	304
§ 6.8	数学归纳法 .....	311
<b>第七章</b>	.....	320





<b>高考综述</b> .....	320
§ 7.1 复数的概念及几何表示 .....	321
§ 7.2 复数的代数形式及运算 .....	327
§ 7.3 复数的三角形式及运算 .....	334
§ 7.4 复数的几何意义及应用 .....	342
§ 7.5 复平面上的轨迹问题 .....	350
§ 7.6 复数的辐角主值、模及共轭复数 .....	360
§ 7.7 复数集上的方程 .....	371
<b>第八章</b> .....	377
<b>高考综述</b> .....	377
§ 8.1 加法、乘法原理 .....	378
§ 8.2 排列、组合 .....	386
§ 8.3 二项式定理及应用 .....	395
§ 8.4 二项式系数的性质 .....	402
<b>第九章</b> .....	410
<b>高考综述</b> .....	410
§ 9.1 平面、空间直线 .....	412
§ 9.2 直线与平面的平行和垂直 .....	421
§ 9.3 斜线在平面上的射影三垂线定理 .....	432
§ 9.4 平面与平面的平行和垂直 .....	441
§ 9.5 空间距离的计算 .....	449
§ 9.6 空间角的计算 .....	461
<b>第十章</b> .....	474
<b>高考综述</b> .....	474
§ 10.1 棱柱、棱锥、棱台 .....	476
§ 10.2 圆柱、圆锥、圆台 .....	488
§ 10.3 几何体中的线面关系 .....	500
§ 10.4 多面体和旋转体的体积 .....	512
<b>第十一章</b> .....	527
<b>高考综述</b> .....	527



§ 11.1	有向线段、定比分点 .....	528
§ 11.2	直线方程 .....	538
§ 11.3	两条直线的位置关系 .....	546
<b>第十二章</b>	.....	556
<b>高考综述</b>	.....	556
§ 12.1	曲线与方程 .....	558
§ 12.2	圆 .....	567
§ 12.3	椭圆 .....	577
§ 12.4	双曲线 .....	585
§ 12.5	抛物线 .....	595
§ 12.6	坐标轴平移 .....	606
§ 12.7	直线与圆锥曲线的位置关系 .....	615
§ 12.8	“基本量法”与轨迹问题 .....	625





# 第一章

## 高考综述



1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念。了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义。能掌握有关术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合。

2. 理解  $|ax+b| < C$   $|ax+b| > C (C > 0)$  型不等式的概念,并掌握它们的解法,了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系,掌握一元二次不等式的解法。

3. 了解映射的概念,在此基础上理解函数及其有关的概念,掌握互为反函数的函数图像间的关系。


4. 理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性,能利用函数的奇偶性与图像的对称性的关系描绘函数图像。

5. 理解分数指数幂、根式的概念,掌握分数指数幂的运算法则。


6. 理解对数的概念,掌握对数的性质和运算法则。

7. 掌握幂函数的概念及其图像和性质,在考查掌握函数性质和运用性质解决问题时,所涉及的幂函数  $f(x) = x^a$  中  $a$  限于在集合  $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$  中取值。


8. 掌握指数函数、对数函数的概念及其图像和性质,并会解简单的指数方程和对数方程。

  
近年高考  
分值统计

年份 题 型 \ 分 值	2000 年	2001 年	2002 年
选择题	12 分	12 分	10 分
填空题			
解答题	11 分	14 分	18 分
总计	23 分	26 分	28 分

  
高考分析

本章内容在高考中既有容易题,中档题又有难度较大的压轴题,约占总分的 20% 左右,在高考试题中所占比例远大于课时和知识点中的比例,其命题分布为:选择题和填空题 2 至 3 道,一般涉及集合的有关运算,函数的图像和性质等内容。解答题有些年份有一道大题,有些年份有两道大题,一般都是中高档题,由于将函数、方程、不等式等知识融为一体,体现了较强的综合性,因此与生产实际、生活实际相结合的应用性和开放性的问题,函数与解析几何、数列等知识的跨学科综合是本章高考的命题特点。

  
高考预测

认真分析高考试题,近几年的试题中,集合概念及纯粹函数内容(即单调性、奇偶性、定义域、值域、反函数)的考查常以选择题、填空题出现,其能力要求比较低;二次函数、指数函数、对数函数与方程、不等式等内容相结合的综合题,常以中、高档题目出现,此类题目重在考查综合应用知识分析解决问题的能力,但随着对实际应用问题的重视,以函数为主线的联系实际的应用题成为近年高考命题



的新趋向,以函数为主体的应用数学知识解决问题的能力要求将逐年上升。因此,可以预测,函数与最值、不等式、数列、三角、几何等知识的综合题还将以主观题的形式出现,并且将作为中、高档试题或压轴题。因此,这部分的复习重点是:一要加深对函数及其概念、性质的理解与应用;二要抓住含参变量的函数问题,掌握处理含参变量的分离、集中、代换、化归、分类等解题方法与技巧;三要沟通相关学科知识的内在联系,掌握综合题的解题通法与巧法,从而提高综合题的解题能力。

## § 1.1 集合



理解集合、子集、交集、并集、补集的概念,了解空集、全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,掌握有关的术语和符号,能正确地表达一些较简单的集合。



1. 集合的概念:由一些确定对象的全体形成一个集合,集合里的各个对象叫做这个集合的元素;含有有限个元素的集合叫做有限集,含有无限个元素的集合叫做无限集。

如果  $a$  是集合  $A$  的元素,就说  $a$  属于集合  $A$ ,记作  $a \in A$ ;如果  $a$  不是集合  $A$  的元素,就说  $a$  不属于  $A$ ,记作  $a \notin A$  (或  $a \bar{\in} A$ )。

2. 集合的表示法

列举法:如方程  $x^2 - 1 = 0$  的解集表示为  $\{-1, 1\}$ 。

描述法:如方程  $x^2 - 1 = 0$  的解集表示为  $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ 。

3. 集合的特性

(1) 确定性 对于集合  $A$  和某一对象  $x$ ,有一个明确的判断标准是  $x \in A$ ,还是  $x \notin A$ ,二者必居其一,不会模棱两可。

(2) 互异性 集合中的相同元素只算是一个,如方程  $x^2 - 2x + 1$



$=0$  的两个等根  $x_1 = x_2 = 1$ , 用集合记为  $\{1\}$ , 而不写为  $\{1, 1\}$ 。

(3) 无序性 集合中的元素是不排顺序的, 如集合  $\{1, 2\}$  与  $\{2, 1\}$  是同一个集合, 但实际上书写时还是按一定顺序写, 如  $\{-1, 0, 1, 2\}$  而不写成  $\{0, 1, -1, 2\}$ , 这样写不方便, 其更深刻的含义是揭示了集合元素的“平等地位”。

思考:  $\{(1, 2)\}$  与  $\{(2, 1)\}$  表示同一集合吗?

#### 4. 子集、交集、并集和补集

① 子集: 对于两个集合  $A$  与  $B$ , 如果集合  $A$  的任何一个元素都是集合  $B$  的元素, 那么集合  $A$  叫做集合  $B$  的子集, 记作  $A \subseteq B$  (或  $B \supseteq A$ ), 显然  $A \subseteq A$ 。

规定空集是任何集合的子集, 即  $\emptyset \subseteq A$ 。

如果  $A$  是  $B$  的子集, 并且  $B$  中至少有一个元素不属于  $A$ , 那么集合  $A$  叫做集合  $B$  的真子集, 记作  $A \subset B$  (或  $B \supset A$ )。

② 集合相等: 若  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ , 则  $A = B$ 。

③ 交集: 由所有属于集合  $A$ , 且属于集合  $B$  的元素组成的集合, 叫做  $A, B$  的交集, 记作  $A \cap B$ , 即  $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$ 。

④ 并集: 由所有属于集合  $A$  或属于集合  $B$  的元素组成的集合, 叫做  $A, B$  的并集, 记作  $A \cup B$ 。

#### 5. 集合的运算规律

① 交集的运算性质

$$A \cap B = B \cap A, A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$

$$A \cap I = A, A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset$$

② 并集的运算性质

$$A \cup B = B \cup A, A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B$$

$$A \cup I = I, A \cup A = A, A \cup \emptyset = A$$

③ 补集的运算性质

$$\overline{\overline{A}} = A, \overline{\emptyset} = I, \overline{I} = \emptyset, A \cap \overline{A} = \emptyset, A \cup \overline{A} = I$$

④ 反演律

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

⑤ 传递性



若  $A \subseteq B, B \subseteq C$ , 则  $A \subseteq C$

若  $A \subset B, B \subset C$ , 则  $A \subset C$



1. 本节复习的重点是:(1)集合中元素的确定性、互异性和无序性;(2)表示集合的列举法、描述法和图示法;(3)集合语言与集合思想的运用。

2. 解答集合问题,要正确理解集合的有关概念,对于用描述法给出的集体  $\{x | x \in P\}$ ,要紧紧抓住竖线前面的代表元素  $x$  以及它所具有的性质  $P$ 。

3. 熟练掌握集合的图形表示(即韦恩图或称文氏图)、数轴表示等基本方法,并树立借助韦恩图、数轴解决集合问题的意识——属于“画图意识”或“数形结合意识”这一大意识。

4. 明确集合元素的确定性、互异性和无序性,并注意此性质在解题中的应用。


5. 对求解含有参数的集合运算问题,对能化简的集合先化简,以便使问题进一步明朗化,然后往往借助数形结合解决。另外,集合元素的互异性也是需要特别注意的一个方面,并且往往需要分类讨论。

6. 集合问题多与函数、方程、不等式、解析几何有关,要注意知识的联系。

## § 1.2 映射与函数



了解映射的概念,在此基础上加深对函数有关概念(记号、定义域、值域)的理解。



知识概要

1. 对于映射  $f: A \rightarrow B$  允许  $B$  中的元素没有原象, 但  $A$  中的每一元素在  $B$  中必须有惟一的象, 于是  $A$  中不同的元素, 在  $B$  中可以有相同的象。

2. 函数是一种特殊的映射  $f: A \rightarrow B$ , 需满足:  $A, B$  都是非空的数集, 其象的集合  $C$  是  $B$  的子集。

3. 构成函数的三要素中, 最重要的是定义域和对应法则, 值域则由定义域和对应法则确定。

4. 求函数  $f(x)$  的解析式常用的方法如下:

(1) 如果已知函数式较简单时, 可用直接法求解;

(2) 如果已知复合函数  $f[g(x)]$  的表达式时, 可用换元法求解, 但要注意在换元时引起的定义域的变化, 最后结果要注明所求函数的定义域;

(3) 如果已知函数的一般形式时, 可用待定系数法求解。

除此之外, 还有消去法、递推法等。



巧思妙解

1. 对应、映射、函数三个概念既有共性又有区别, 在了解映射概念的基础上, 深刻理解函数是一种特殊的映射, 而映射又是一种特殊的对应。

2. 掌握构成函数的三要素——对应法则、定义域和值域, 其中对应法则是核心, 定义域是函数的灵魂。

3. 掌握函数的三种表示方法——列表法、解析法和图像法, 若函数在其定义域的不同子集上, 因对应法则分别不同或用几个不同式子来表示, 这种表示形式的函数叫做分段函数。

4. 如果  $y=f(u)$ ,  $u=g(x)$ , 那么  $y=f[g(x)]$  叫做  $f$  和  $g$  的复合函数, 其中  $g(x)$  为内函数,  $f(u)$  为外函数。

5. 研究函数必须树立“定义域优先”的原则。





例 1 已知  $A=N, B=\{\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \dots\}$ ,  $f$  是从集合  $A$  到集合  $B$  的映射, 且

$$f: x \rightarrow y = \frac{2x-1}{2x+1} (x \in A, y \in B)$$

求在  $f$  作用下象是  $\frac{15}{17}$  的原象.

分析 按映射的定义, 列出原象的方法.

解  $\because \frac{15}{17} \in B, \therefore$  可设它在  $A$  中对应的原象是  $x_0$ , 则

$$\frac{2x_0-1}{2x_0+1} = \frac{15}{17}, \text{解出 } x_0 = 8.$$

故在  $f$  作用下  $\frac{15}{17}$  的原象是 8.

评注 集合  $B$  中的每一元素, 对映射:  $f: A \rightarrow B$  而言, 是否都一定存在原象?

例 2 下列三组函数中,  $f(x)$  与  $g(x)$  是否为同一函数?

$$(1) f(x) = \lg x, g(x) = \frac{1}{2} \lg x^2$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 < x < 0) \\ x-1 & (0 < x < 1) \end{cases}$$

分析 判断两个函数是否为同一函数, 关键是判断它们的对应法则、定义域和值域是否分别相同. 如果有一个不同, 它们便不是同一函数.

解 (1)  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $g(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 定义域不同, 故  $f(x)$  与  $g(x)$  不是同一函数.

(2)  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, +\infty)$ ,  $g(x)$  的值域为  $[0, +\infty)$ , 值域不同, 故  $f(x)$  与  $g(x)$  也不是同一函数.