全新升级版

全国十二大考研辅导机构指定用书

2013 李永乐·王式安考研数学系列

数学历年真题权威解析

数学一

SHUXUE LINIAN ZHENTI QUANWEI JIEXI (SHUXUEYI)

主编 李永乐 王式安

编委 "高数"：武忠祥 刘喜波
"线代"：李永乐 "概率论"：王式安

权威名师与命题专家联手打造 考试知识复习与能力培养并重
多角度讲解试题开拓解题思路 分析解答透彻易懂更有针对性
详尽地归纳总结典型解题方法 综合提高运用知识的分析能力

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
中国国际出版集团

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题权威解析.数学.1/李永乐,王式安主编.—北京:
海豚出版社,2011.12
ISBN 978-7-5110-0701-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料 ②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①021

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第256624号

敬告读者

本书封面贴有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

书　　名:数学历年真题权威解析(数学一)
主　　编:李永乐　王式安
责任编辑:董锋　徐婵媛
出　　版:海豚出版社
网　　址:http://www.dolphin-books.com.cn
地　　址:北京市百万庄大街24号
邮　　编:100037
电　　话:010-68997480(销售)
　　　　　010-68998879(总编室)
传　　真:010-68994018
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:19
字　　数:300千字
版　　次:2012年3月第1版
印　　次:2012年3月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5110-0701-8
定　　价:38.00元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　　电话:(010)51906740

	2011 年	2010 年	2009 年	2008 年	2007 年	2006 年	2005 年
1	P53,6	P38,5	P43,9	P68,6	P44,10	P36,3	P55,9
2	P113,4	P80,5	P88,1	P87,15	P55,10	P121,2	P120,1
3	P84,12	P74,11	P69,8	P122,6	P64,1	P105,11	P86,14
4	P65,2	P88,2	P110,2	P35,1	P47,1	P77,1	P105,10
5	P180,3	P185,8	P193,5	P181,4	P54,8	P177,3	P176,2
6	P196,2	P210,5	P182,5	P213,2	P98,2	P258,3	P256,1
7	P259,6	P254,2	P268,2	P258,5	P191,4	P53,7	P49,2
8	P269,4	P255,3	P264,11	P272,7	P216,6	P93,6	P68,7
9	P75,12	P50,3	P80,4	P121,3	P252,2	P110,1	P79,1
10	P121,4	P66,4	P123,7	P51,4	P258,4	P82,8	P80,2
11	P81,6	P99,4	P97,1	P112,3	P66,3	P190,3	P190,2
12	P99,5	P95,8	P94,7	P107,13	P80,3	P180,2	P179,1
13	P215,5	P193,6	P206,2	P205,1	P122,5	P251,1	P257,2
14	P269,5	P269,3	P281,6	P268,1	P103,8	P254,1	P275,1
15	P39,6	P123,8	P84,11	P37,4	P184,6	P91,4	P92,5
16	P81,7	P51,5	P115,7	P99,3	P252,3	P40,7	P114,5
17	P58,12	P72,10	P78,2	P83,10	P83,9	P117,9	P67,5
18	P35,2	P115,8	P60,15	P70,9	P106,12	P85,13	P60,14
19	P90,3	P104,9	P107,14	P118,10	P59,13	P102,7	P101,6
20	P188,1	P201,6	P200,5	P184,7	P114,6	P197,3	P212,1
21	P210,6	P214,4	P214,3	P198,4	P202,7	P208,3	P195,1
22	P272,8	P266,13	P265,12	P263,10	P209,4	P261,8	P260,7
23	P279,4	P281,7	P278,3	P280,5	P261,9	P277,1	P270,6
24					P278,2		

前言

从真题中你能够了解一个真实的考研数学,寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶,题目经典,又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律,全面提高解题能力,进而更好地驾驭考试,本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验,并结合近10年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

历年来,研究生入学考试数学各学科知识点没有太大变化,而且各学科考查的重难点比较稳定,都是往年考试反复考查的内容,依据往年考题把握了这些重难点,我们就等于成功了一半。练真题,反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题,如何与没有考过的知识点结合起来考查,进而复习没有考过的知识点,这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了,也因此,真题能够最有效的暴露我们的不足和复习误区,提供更有效的复习思路和策略,甚至可以说,真题就是最好的"辅导老师",它告诉我们考试会考什么,怎么考,反过来又指导我们思考如何应对,也只有真题准确体现了考试所要求的能力、方法。

真题对大部分考生来说都是"陌生"的。真题命制科学,经过命题人的反复推敲,是市面上的练习题所无法比拟的,市面上的练习题,难易适中,命制科学,贴近考试要求的很少,做真题,反复揣摩,这能节省我们宝贵的复习时间,达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题,在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书将真题按考点所属内容分类并进行解析,各章编排如下:

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点,从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此章的历年考试出题规律,分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误,给出相应的注意事项,对每一道真题都给出解题思路的分析,以便考生真正的理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题,只有适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者精心选取历年真题其他卷别的试题作为练习题,供考生练习,以

便使考生在熟练掌握基本知识的基础上，达到轻松解答真题的水平。同时，练习题都配备了详细的参考答案和解析，以便考生遇到解答疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要多动脑，通过对题目的练习、比较、思考，总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中，时刻想到将各个方面的知识融会贯通，做好知识的串联和总结，从而检验自己对问题的把握程度，真正掌握应试解题的金钥匙，从而迅速提高知识水平和应试能力，取得理想分数。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，"李永乐考研数学辅导团队"特在网络上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。详情见"金榜教育网"首页(www.jinbangjiaoyu.com)。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2012 年 3 月

目录

第一篇

第二篇

第三篇

◆第一篇◆

绝密★启用前

2012年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B)$(-1)^n(n-1)!$.

(C)$(-1)^{n-1}n!$. (D)$(-1)^n n!$.

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在(0, 0)处连续，那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在(0, 0)处可微.

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在(0, 0)处可微.

(C) 若 $f(x,y)$ 在(0, 0)处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x,y)$ 在(0, 0)处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx\,(k=1,2,3)$，则有

(A)$I_1<I_2<I_3$. (B)$I_3<I_2<I_1$.

(C)$I_2<I_3<I_1$. (D)$I_2<I_1<I_3$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ (B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ (C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ (D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为3阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$

(A)$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为1与参数为4的指数分布，则 $P\{X<Y\}$

(A) $\dfrac{1}{5}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{4}{5}$.

(8) 将长度为1m的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为

(A)1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $-\dfrac{1}{2}$. (D) -1.

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$ ________.

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$ ________.

(11) $\mathrm{grad}(xy+\frac{z}{y})\Big|_{(2,1,1)}=$ ________.

(12) 设 $\sum=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$,则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2\,\mathrm{d}s=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$ 的秩为________.

(14) 设 A,B,C 是随机事件,A 与 C 互不相容,$P(AB)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{1}{3}$,则

$P(AB\mid\overline{C})=$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

证明:$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18)(本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t,\end{cases}\quad(0\leqslant t<\frac{\pi}{2})$,其中函数 $f(t)$ 具有连续导数,且 $f(0)=0$,

$f'(t)>0(0<t<\frac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1,求函数 $f(t)$ 的表达式,并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19)(本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$,再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\,\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$

(Ⅰ)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$,

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(21)(本题满分 11 分)已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将二次型 f 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求 $P\{X = 2Y\}$；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$. 记 $Z = X - Y$.

（Ⅰ）求 Z 的概率 $f(z;\sigma^2)$；

（Ⅱ）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；

（Ⅲ）证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

2012年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)参考答案

一、选择题

(1)**【答案】** (C).

【分析】 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1} = 1 = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$

得 $y=1$ 是曲线的一条渐近线且曲线没有斜渐近线

由$\lim\limits_{x\to1} y = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1} = \infty$ 得 $x=1$ 是曲线的一条渐近线

由 $\lim\limits_{x\to-1} y = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$ 得 $x=-1$ 不是曲线的渐近线

所以曲线有两条渐近线,故应选(C).

(2)**【答案】** (A).

【分析】 由 $f(0)=0$ 得 $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(e^{\Delta x}-1)(e^{2\Delta x}-2)\cdots(e^{n\Delta x}-n)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to0}(e^{2\Delta x}-2)\cdots(e^{n\Delta x}-n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

故应选(A).

(3)**【答案】** (B).

【分析】 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则有 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0$,

又由 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处连续,可知 $f(0,0)=0$.

$f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)}{x^2+0^2}\cdot x = 0$,类似 $f'_y(0,0)=0$.

于是
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f'_x(0,0)+f'_y(0,0)]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

由微分定义知 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处可微, 故应选(B).

【评注】 1. 本题主要考查二元函数连续、偏导数、可微的定义.

2. 可采用举反例排除错误答案,取 $f(x,y)=|x|+|y|$ 排除(A),$f(x,y)=x+y$ 排除(C)、(D).

(4)**【答案】** (D).

【分析】 $I_1 = \int_0^{\pi} e^{x^2}\sin x\,dx$

$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = \int_0^{\pi} e^{x^2}\sin dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx$

因为在$[\pi,2\pi)$ 上 $e^{x^2}\sin x<0$,所以$\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx<0$ 所以 $I_2<I_1$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x = I_2 + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$$

因在$(2\pi,3\pi)$上$e^{x^2}\sin x > 0$所以$I_2 < I_3$　又因为$\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x > 0$所以$I_3 > I_1$，所以$I_2 < I_1 < I_3$　故应选(D).

(5)**【答案】** (C)

【分析】 n个n维向量相关$\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n| = 0$

显然
$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$必线性相关.

(6)**【答案】** (B)

【分析】 本题考查初等矩阵，由于$\boldsymbol{P}$经列变换（把第2列加至第1列）为$\boldsymbol{Q}$，有$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{PE}_{21}(1)$

那么
$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} &= [\boldsymbol{PE}_{21}(1)]^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{PE}_{21}(1)] \\ &= \boldsymbol{E}_{21}^{-1}(1)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APE}_{21}(1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(7)**【答案】** (A).

【分析】 (X,Y)的联合概率密度为$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-4y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

则$P\{X < Y\} = \iint\limits_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^y e^{-x-4y}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-5y}\mathrm{d}y = \frac{1}{5}$，所以应选(A).

(8)**【答案】** (D).

【分析】 令两段的长度分别为X,Y显然$X+Y=1$，即$Y=-X+1$，所以两者是线性关系，是负相关，所以相关系数为-1，所以应选(D).

二、填空题

(9)**【答案】** e^x.

【分析】 齐次线性微分方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$的特征方程为：$r^2+r-2=0$，特征根为：$r_1=1$，$r_2=-2$，因此齐次微分方程的通解为：$f(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

于是　$f'(x) = C_1e^x - 2C_2e^{-2x}$，$f''(x) = C_1e^x + 4C_2e^{-2x}$，

代入　$f''(x)+f(x) = 2e^x$　得$2C_1e^x + 5C_2e^{-2x} = 2e^x$，从而$C_1 = 1$，$C_2 = 0$，

故　$f(x) = e^x$. 应填e^x.

(10)**【答案】** $\frac{\pi}{2}$

【分析】 令$t = x-1$得
$$\begin{aligned} \int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x &= \int_{-}^{1} 1(t+1)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-}^{1} 1t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t + \int_{-}^{1} 1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(11)【答案】 (1,1,1).

【分析】 根据梯度定义 $\mathrm{grad}f(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$，于是

$\mathrm{grad}(xy+\frac{z}{y})\Big|_{(2,1,1)}=(y,x-\frac{z}{y^2},\frac{1}{y})\Big|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$. 故应填(1, 1, 1).

(12)【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

【分析】 由第一类曲面积分的计算公式得 ($z=1-x-y$)

$$\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}s=\iint_{D_{xy}}y^2\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}y^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{12},$$

其中平面区域 $D_{xy}:x+y<1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$.

(13)【答案】 2

【分析】 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$，又

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[a_1,a_2,a_3]=\begin{bmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_2a_1&a_2^2&a_2a_3\\a_3a_1&a_3a_2&a_3^2\end{bmatrix}$$

由于秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$. 那么

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\lambda^2=\lambda^3-\lambda^2$$

所以，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,0,0.

从而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,1,1.

又 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$

因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=2$.

(14)【答案】 $\frac{3}{4}$

【分析】 $P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}$，$P(\overline{C})=1$，$P(C)=\frac{2}{3}$ $\quad P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)$

因为 A 与 C 互不相容，即 $AC=\varnothing$，即 $P(AC)=0$，又 $ABC\subset AC$，所以 $P(ABC)=0$，代入原式得 $P(AB\overline{C})=\frac{1}{2}$，故 $P(AB\mid\overline{C})=\frac{3}{4}$.

三、解答题

(15)【证】 记 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-\frac{x^2}{2}-1$，则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

$$f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)}-1-\cos x.$$

当 $-1<x<1$ 时，由于 $\frac{4}{(1-x^2)^2}\geqslant 4$，$1+\cos x\leqslant 2$，所以 $f''(x)\geqslant 2>0$，从而 $f'(x)$ 单调增加.

又因为 $f'(0)=0$，所以，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $0<x<1$，$f'(x)>0$，于是 $f(0)=0$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值.

从而当 $-1<x<1$ 时，$f(x)\geqslant f(0)=0$，即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}.$$

(16)**【分析】** 此题为常规题型，只需用二元函数取得极值的充分条件即可.

【详解】 令
$$f'_x(x,y)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0,$$
$$f'_y(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0.$$
解得函数驻点，即可能极值点为 $(1,0)$ 或 $(-1,0)$.

$$f''_{xx}(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+(1-x^2)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(x^2-3)x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$
易得
$$f''_{xy}(x,y)=(x^2-1)y\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$
$$f''_{yy}(x,y)=-x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-xy\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)=(y^2-1)x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

(1) 在驻点 $(1,0)$，

$A=f''_{xx}(1,0)=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，$B=f''_{xy}(1,0)=0$，$C=f''_{yy}(1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

由 $B^2-AC=-2\mathrm{e}^{-1}<0$，且 $A<0$，知 $(1,0)$ 为极大值点，极大值 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(2) 在驻点为 $(-1,0)$，$A=f''_{xx}(-1,0)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，$B=f''_{xy}(-1,0)=0$，

$C=f''_{yy}(-1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. 由 $B^2-AC=-2\mathrm{e}^{-1}<0$，且 $A>0$，知 $(-1,0)$ 为极小值点，极小值 $f(1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(17)**【分析】** 由此幂级数的构成知，其和函数可以通过几何级数求导和求积分得到，因此可以先求和函数，再由幂级数的性质得收敛半径，然后讨论端点的处的收敛性，得幂级数的收敛域.

【详解】
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n},$$

因为
$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\Big)'=\Big(\frac{x}{1-x^2}\Big)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},\qquad -1<x<1,$$

当 $x\neq 0$ 时，
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},$$
$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\qquad -1<x<1,$$

因为 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=2$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

当 $x=\pm1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}=+\infty\neq 0$ 知级数发散.

当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=3$，

因此，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛域为$-1<x<1$，

和函数 $S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 3, & x=0.\end{cases}$

(18)【分析】 先求切线方程，然后根据两点间的距离恒为 1 得到微分方程.

【详解】 (1) 由参数方程的求导公式有：$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\sin t}{f'(t)}$，于是 L 上任意一点 $(x,y)=(f(t),\cos t)$ 处的切线方程为

$$Y-\cos t=-\frac{\sin t}{f'(t)}[X-f(t)].$$

令 $Y=0$，得此切线与 x 轴的交点为$(\cot t f'(t)+f(t),0)$.

由$(\cot t f'(t)+f(t),0)$到切点$(f(t),\cos t)$的距离恒为 1，有

$$(\cot t f'(t)+f(t)-f(t))^2+(0-\cos t)^2=1,$$

解得 $f'(t)=\pm\frac{\sin^2 t}{\cos t}$. 由 $f'(t)>0(0<t<\frac{\pi}{2})$，且 $f(0)=0$ 知 $f(t)>0(0<t<\frac{\pi}{2})$.

所以 $$f'(t)=\frac{\sin^2 t}{\cos t},\quad (0\leqslant t<\frac{\pi}{2}).$$

于是 $$f(t)=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t+C.$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$，故

$$f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t.$$

(2) 以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

(19)【分析】 通过补线段后利用 Green 公式计算即可.

【详解】 设点 $O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(0,2)$，补充线段 $\overline{BO}$，且设由曲线弧$\overset{\frown}{OA}$，$\overset{\frown}{AB}$，$\overline{BO}$ 围成的平面区域为 D，则由 Green 公式有

$$I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{L+\overline{BO}}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y-\int_{\overline{BO}}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(3x^2-3x^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_2^0(-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2+y^2\Big|_2^0=\frac{\pi}{2}-4.$$

(20)【解】 (Ⅰ) 按第一列展开，

$$|\boldsymbol{A}|=1\cdot\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$$

(Ⅱ) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有可能有无穷多解，由(Ⅰ)知 $a=1$ 或 -1

(1) 如 $a=1$

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&\vdots&1\\0&1&1&0&\vdots&-1\\0&0&1&1&\vdots&0\\1&0&0&1&\vdots&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&\vdots&1\\0&1&1&0&\vdots&-1\\0&0&1&1&\vdots&0\\1&-1&0&1&\vdots&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&\vdots&1\\0&1&1&0&\vdots&-1\\0&0&1&1&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&-2\end{bmatrix}$$

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3,\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=4$　方程组无解，舍去.

(2) 当 $a=-1$ 时

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0&\vdots&1\\0&1&-1&0&\vdots&-1\\0&0&1&-1&\vdots&0\\-1&0&0&1&\vdots&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&0&\vdots&1\\0&1&-1&0&\vdots&-1\\0&0&1&-1&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1&\vdots&0\\0&1&0&-1&\vdots&-1\\0&0&1&-1&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$. 方程组有 ∞ 解，取 x_4 为自由变量，得方程组通解为

$$(0,-1,0,0)^T+k(1,1,1,1)^T,(k\text{ 为任意常数.})$$

(21)【解】(Ⅰ) 因为 $r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变称

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以，当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$.

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 知　$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$

那么 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,2,6.

对 $\lambda=0$，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $(-1,-1,1)^T$；

对 $\lambda=2$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $(-1,1,0)^T$；

对 $\lambda=6$，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $(1,1,2)^T$.

因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交，故只需单位化

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

那么令　$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

有 $\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=2y_2^2+6y_3^2$.