高等财经院校“十二五”精品系列教材

JINGPIN XILIE JIAOCAI

线性代数

（第三版）

郝秀梅　姜庆华　主编

Linear Algebra

经济科学出版社
Economic Science Press

高等财经院校"十二五"精品系列教材

JINGPIN XILIE JIAOCAI

线性代数

（第三版）

郝秀梅 姜庆华 主编 孟宪萌 王继强 宋浩 谭香 副主编

Linear Algebra

经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/郝秀梅，姜庆华主编．—3 版．—北京：经济科学出版社，2015.12

高等财经院校"十二五"精品系列教材

ISBN 978－7－5141－6341－4

Ⅰ．①线… Ⅱ．①郝…②姜… Ⅲ．①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 293014 号

责任编辑：柳 敏 李晓杰
责任校对：靳玉环
责任印制：李 鹏

线性代数
（第三版）
郝秀梅 姜庆华 主 编
孟宪萌 王继强 宋 浩 谭 香 副主编
经济科学出版社出版、发行 新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮编：100142
总编部电话：010－88191217 发行部电话：010－88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京汉德鼎印刷有限公司印刷
三河市华玉装订厂装订
710×1000 16 开 18.5 印张 330000 字
2016 年 1 月第 3 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
印数：0001—8000 册
ISBN 978－7－5141－6341－4 定价：35.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010－88191502）

总　序

大学是研究和传授科学的殿堂，是教育新人成长的世界，是个体之间富有生命的交往，是学术勃发的世界。* 大学的本质在于把一群优秀的年轻人聚集一起，让他们的创新得以实现、才智得以施展、心灵得以涤荡，产生使他们终身受益的智慧。

大学要以人才培养和科学研究为己任，大学教育的意义在于它能够给人们一种精神资源，这一资源可以帮助学子们应对各种挑战，并发展和完善学子们的人格与才智，使他们经过大学的熏陶，学会思考、学会反省、学会做人。一所大学要培养出具有健全人格、自我发展能力、国际视野和竞争意识的人才，教材是实现培养目标的关键环节。没有优秀的教材，不可能有高质量的人才培养，不可能产生一流或特色鲜明的大学。大学教材应该是对学生学习的引领、探索的导向、心智的启迪。一本好的教材，既是教师的得力助手，又是学生的良师益友。

目前，中国的大学教育已从“精英型教育”走向“平民化教育”，上大学不再是少数人的专利。在这种情况下，如何保证教学质量的稳定与提升？教材建设的功能愈显重要。

为了全面提高教育教学质量，培养社会需要的、具有人文精神和科学素养的本科人才，山东财经大学启动了“十二五”精品教材建设工程。本工程以重点学科（专业）为基础，以精品课程教材建设为目标，集中全校优秀师资力量，编撰了高等财经院校“十二五”精品系

---

* 雅斯贝尔斯著，邹进译：《什么是教育》，生活·读书·新知三联书店 1991 年版，第 150 页。

列教材。

本系列教材在编写中体现了以下特点：

1. 质量与特色并行。本系列教材从选题、立项，到编写、出版，每个环节都坚持“精品为先、质量第一、特色鲜明”的原则。严把质量关口，突出财经特色，树立品牌意识，建设精品教材。

2. 教学与科研相长。教材建设要充分体现科学研究的成果，科学研究要为教学实践服务，两者相得益彰，互为补充，共同提高。本系列教材汇集各领域最新教学与科研成果，对其进行提炼、吸收，体现了教学、科研相结合，有助于培养具有创新精神的大学生。

3. 借鉴与创新并举。任何一门学科都会随着时代的进步而不断发展。因此，本系列教材编写中始终坚持“借鉴与创新结合”的理念，舍其糟粕，取其精华。在中国经济改革实践基础上进行创新与探索，充分展示当今社会发展的新理论、新方法、新成果。

本系列教材是山东财经大学教学质量与教学改革建设的重要内容之一，适用于经济学、管理学及相关学科的本科教学。它凝聚了众多教授、专家多年教学的经验和心血，是大家共同合作的结晶。我们期望摆在读者面前的是一套优秀的精品教材。当然，由于我们的经验存在欠缺，教材中难免有不足之处，衷心期盼专家、学者及广大读者给予批评指正，以便再版时修改、完善。

山东财经大学教材建设委员会

2012 年 6 月

前　言

任何一门课程的内容都不是一成不变的；但是，在一般情况下，一门课程的内容又是相对稳定的．《线性代数》是高等财经院校的重要学科共同基础课之一，它的内容也是这样，既不是固定不变的，又是相对稳定的．《线性代数》从总的内容来说，虽然大同小异，但对教材的不同处理，还是有着较大的差异．一本较适用的《线性代数》教材，一方面，应当具有足够的理论深度，以满足现代经济理论研究发展的需要；另一方面，又应尽可能由浅入深，使初学者感到入门并不难，从而提高深入掌握其理论和基本方法的信心．基于此，根据国家教委《高等学校经济管理学科数学基础教学大纲》的基本要求，结合教学中发现的问题，认真听取教师、学生以及同行专家反馈的信息，我们重新编写了《线性代数》（第二版）教材．在第二版教材编写中，我们确定的目标是，在保留第一版教材特色的基础上，力求内容充实、结构优化、体系创新，以反映当今高等学校财经类专业线性代数的教学内容和课程体系改革总体目标要求及建设发展的需要．

本书是山东省精品课程《线性代数》的建设成果之一．在修订编写过程中，除注意线性代数本身的科学性、系统性和严密性外，还特别注意了可接受性、条理性、通俗性和前后的连贯性．与第一版相比，本版的改进如下：

1. 章节体系优化．本版教材对第一版教材体系进行了优化，各章内容均进行了不同程度的重新修订、编写，增加、调整后的章节之间衔接自然，加强了教材内容体系的系统完整性．

2. 内容丰富完善，加强内容与实际要求的协调统一．适度地将近年来的考研数学新知识新方法充实到教材内容中，以使学生在学习基本知识的过程中接触到最新的综合性的知识考查形式，提高了教材的适应性．特别地．为适应部分专业课程学习的需要，增加了“线性空间与线性变换”一章，强化了内容体系的完善性和系统性．

3. 充实习题，突出重点．为每小节配备了不同难度及数量的习题，加强了习题与正文内容的高度协调和统一，注意了考研大纲的新要求和专业后续课程的需要，将近年来的考研试题补充到教材各章的习题中．各章中打有“*”号的内容是为对数学基础要求较高的专业或学生编写的，可以作为选学内容或学生自学用.

本教材是山东财经大学“十二五”重点精品教材建设项目，也是山东省教学改革课题《经济数学课程建设与实践教学的改革与探索》的研究成果之一，由郝秀梅、姜庆华任主编，孟宪萌、王继强、宋浩、谭香任副主编，由郝秀梅、姜庆华负责总体框架结构、全书统稿及审定．

在本书的编写过程中，我们参阅并借鉴了大量相关的文献资料，并得到了同行专家的指导与帮助，在此表示衷心的感谢，特别要感谢经济科学出版社和山东财经大学教务处给予的大力支持与帮助．

由于编者水平所限，书中错误和疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

2013 年 5 月

目　录

第1章　行　列　式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算，以及用 n 阶行列式求解含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组的克莱姆（Cramer）法则．通过本章的学习，让学生理解行列式的定义、熟练掌握行列式的性质以及几种常见行列式的计算方法，会用 Cramer 法则求解特殊的线性方程组．

§1.1　n 阶行列式

1.1.1　二阶、三阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组的问题中产生的．所谓线性方程组是指未知量的最高次数是一次的方程组．在中学代数中我们已学过解二元、三元线性方程组，对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用加减消元法，消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

用同样方法消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

因此，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有惟一解，即

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

为了便于记忆，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1-3}$$

这样，规定的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**，它含有两行两列，横写的称为行，竖写的称为列．行列式中，数 $a_{ij}(i, j=1, 2)$ 称为行列式的**元素**，第一个下标 i 表示这个元素位于第 i 行，称为**行标**；第二个下标 j 表示此元素位于第 j 列，称为**列标**．如 a_{21} 就是第二行第一列上的元素．

从上述讨论得知，二阶行列式是这样两项的代数和：从左上角到右下角的对角线（称为**行列式的主对角线**）上两元素的乘积，取正号；从右上角到左下角的对角线（称为**行列式的次对角线**）上两元素的乘积，取负号．为了方便记忆，我们用画线的方法，即实线（主对角线）上元素的乘积减去虚线（次对角线）上元素的乘积（见图 1－1）．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1－1

例 1.1.1　设 $D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$，问：当 λ 为何值时，$D \neq 0$？

解　因为 $D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\lambda - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$，当 $(\lambda-2)(\lambda+1) \neq 0$ 时，$D \neq 0$. 即当 $\lambda \neq -1$ 且 $\lambda \neq 2$ 时，$D \neq 0$.

根据二阶行列式定义，式（1－2）中两个分子、分母可分别写成

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

如果我们记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时方程组（1－1）的惟一解（1－2）可以写成：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例 1.1.2 解线性方程组$\begin{cases}2x+5y=1\\3x+7y=2\end{cases}$.

解 因为 $D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=-1\neq 0$，$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=-3$，$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1$，所以，方程组的惟一解为：

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-3}{-1}=3,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{-1}=-1.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1-4}$$

同前面一样，为便于记忆，我们引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\tag{1-5}$$

称为**三阶行列式**. 它含有三行三列，是六项的代数和. 这六项我们可用对角线法则来记忆，如图 1-2 所示，实线上三个元素的乘积组成的三项取正号，虚线上三个元素的乘积组成的三项取负号，这种方法称为三阶行列式的**对角线展开法**.

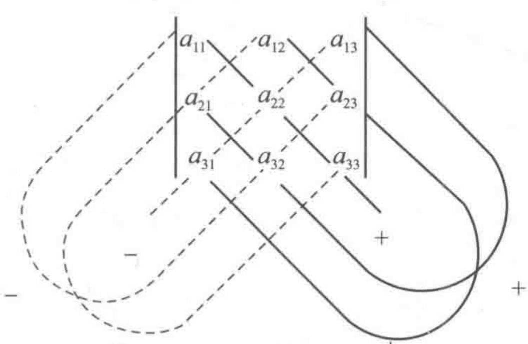

图 1-2

注　上述对角线展开法仅适用于三阶及三阶以下的行列式计算，对于三阶以上的行列式计算，不能使用此对角线展开法.

例 1.1.3　当 λ 为何值时，

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 1 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0?$$

解　$D=\lambda\times\lambda\times 1+1\times 1\times 0+0\times 1\times 0-0\times\lambda\times 0-\lambda\times 0\times 1-1\times 1\times 1=\lambda^2-1=(\lambda+1)(\lambda-1)$，由 $D=0$，得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=1$. 因此，当 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=1$ 时，$D=0$.

用消元法解方程组（1－4），可以得到与方程组（1－1）类似的结论，记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

将 D 中第 1、2、3 列分别换成常数项列 b_1，b_2，b_3 得到的行列式记为 D_1，D_2，D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

当 $D\neq 0$ 时，方程组（1－4）有惟一解，这个解可写成如下的表达式

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.1.4　解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-3\\ 5x_1-2x_2+7x_3=22\\ 2x_1-5x_2+4x_3=4\end{cases}.$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 5 & -2 & 7\\ 2 & -5 & 4\end{vmatrix}=63\neq 0,\ D_1=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -2\\ 22 & -2 & 7\\ 4 & -5 & 4\end{vmatrix}=63,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & -3 & -2\\ 5 & 22 & 7\\ 2 & 4 & 4\end{vmatrix}=126,\ D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 5 & -2 & 22\\ 2 & -5 & 4\end{vmatrix}=189.$$

所以，方程组的惟一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

有了二阶与三阶行列式，我们可以把 $D\neq 0$ 时的方程组（1-1）及（1-4）的解很简单地用公式表达出来．但在实际问题中往往遇到未知量个数不止三个的线性方程组，那么在解这类线性方程组时，自然会想到它的解是否也能有类似的表达式？为此我们需要将二阶、三阶行列式加以推广，引入 n 阶行列式的概念．

1.1.2　排列与逆序

定义 1.1.1　由 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 ***n* 级排列**．

例如，132 是一个 3 级排列，4132，2143，1234 都是 4 级排列．

在中学代数中已知，由 1，2，…，n 所组成的 n 级排列共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 21=n!$ 个．

定义 1.1.2　在一个 n 级排列中，如果较大的数排在较小的数前面，则称它们构成一个**逆序**，一个 n 级排列中逆序的总数称为它的**逆序数**．

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**．

例如，排列 4132 中，4 与 1，4 与 3，4 与 2 和 3 与 2 各构成一个逆序，共有 4 个逆序，即 $N(4132)=4$，这是一个偶排列．排列 $12\cdots n$ 的逆序数为 0，是一个偶排列，通常称其为 n 级**标准排列**．

例 1.1.5　求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数．

解　因为在这个排列中，n 后面比它小的数有 $n-1$ 个，$n-1$ 后面比它小的数有 $n-2$ 个，…，3 后面比它小的数有 2 个，2 后面比它小的数有 1 个，所以

$$N(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

在一个 n 级排列中，互换某两个数码的位置，其余数码不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一个**对换**．例如，对排列 4132 经过 1、3 对换后，得到一个新排列 4312，原来的偶排列变为奇排列．一般地说，对换具有下列性质：

定理 1.1.1　一个排列经过一个对换后，奇偶性改变．

这就是说，经过一个对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列．

证明从略．

利用定理 1.1.1 可以证明下面一个重要结论.

定理 1.1.2 在全部 n 级排列中，偶排列和奇排列各占一半，都是$\frac{n!}{2}$个 $(n\geqslant 2)$.

证 设在 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 若对每一个奇排列都施以相同的对换，则由定理 1.1.1 知，p 个奇排列全部变成了偶排列，于是 $p\leqslant q$；同理，如果将全部偶排列也施以同一的对换，则 q 个偶排列全部变成奇排列，于是 $q\leqslant p$，所以只有 $p=q=\frac{n!}{2}$.

1.1.3 n 阶行列式

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，我们首先分析二阶、三阶行列式的特点：

由（1－3）式和（1－5）式可以看出：

（1）二阶行列式有 2! 项，每一项是两个元素的乘积，且这两个元素既位于不同行又位于不同列，一般项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}$，其中 j_1j_2 是两个数码 1 与 2 的排列. 当行标按标准顺序 12 排列时，列标取尽了 1，2 数码的所有排列；同样，三阶行列式共有 3! 项，每一项是三个元素的乘积，且这三个元素既位于不同行又位于不同列，一般项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 是三个数码 1，2，3 的排列. 当行标按标准顺序 123 排列时，列标取尽了 1，2，3 数码的所有排列.

（2）每一项前面所带符号（正号或负号）与该项列标所成排列的奇偶性有关.（1－5）式中第一、二、三项的列标所成排列分别是 123，231，312，它们都是偶排列，这三项前面都带正号；第四、五、六项的列标所成排列分别是 321，213，132，它们都是奇排列，这三项前面都带负号. 二阶行列式显然也符合这个原则.

上面对二阶和三阶行列式的分析对于我们理解一般行列式的定义是有帮助的，下面给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1.3 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-6}$$

的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列，每一项式（1-6）都按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时式（1-6）带有正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时式（1-6）带有负号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-7}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和．

由定义看出，n 阶行列式是由 n! 项组成的．由定理 1.1.2 可知，冠以正号的项和冠以负号的项（不计元素本身所带符号）各占一半．

n 阶行列式（1-7）有时简记为 $D=|a_{ij}|$，并将元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}所在斜线（从左上角到右下角的对角线），称为该 n 阶行列式的**主对角线**，把元素 a_{1n}，$a_{2,n-1}$，…，a_{n1}所在斜线（从右上角到左下角的对角线），称为该 n 阶行列式的**次对角线**．

特别地，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

例 1.1.6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 四阶行列式展开项的一般形式为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

第一行非零元素只有 $a_{12}=2$，第二行非零元素只有 $a_{23}=3$，第三行非零元素只有 $a_{34}=4$，第四行非零元素只有 $a_{41}=1$. 而这 4 个非零元素又在不同列，因此上述四阶行列式展开式中只有一项非零项，其余项都等于零，即

$$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}=2\times3\times4\times1=24.$$

该项列标所成排列 2341 是奇排列，因此这一项前面冠以负号．所以

$$D=-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}=-24.$$

例 1.1.7 计算下三角形行列式