考研数学名师系列丛书

2013年考研数学
辅导讲义

（数学一、数学二适用）

主　编：蔡燧林　胡金德　张　宇
副主编：李　擂　张　伟　朱长龙　费允杰

命题组组长与考研一线辅导专家强强联手，十年磨一剑的经验积累，打造史上最经典的辅导教程！

（理工类）

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

2013年考研数学辅导讲义

——理工类

（数学一、数学二适用）

主　编　蔡燧林　胡金德　张　宇
副主编　李　擂　张　伟　朱长龙　费允杰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学辅导讲义．理工类/蔡燧林，胡金德，张宇主编．—北京：北京理工大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-5640-5559-2

Ⅰ．①2…　Ⅱ．①蔡…②胡…③张…　Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 009918 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址 / http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 39
字　　数 / 747 千字
版　　次 / 2012 年 1 月第 1 版　2012 年 1 月第 1 次印刷　　责任校对 / 周瑞红
定　　价 / 56.80 元　　责任印制 / 边心超

Preface 前言

久违了,《考研数学辅导讲义》! 由于种种原因,这本《考研数学辅导讲义》已停印多年,现在经精心修订,又和读者见面了.由网上得悉,本书深得读者喜爱,这是读者对作者的关怀与鼓舞,作者决不辜负读者的厚爱,决心将这本书打造得更适合近几年考研的发展趋势,修改得更好.

一、本书写些什么?

本书是为考研学子们写的.近年来,社会对研究生的需求增加,有志青年也希望自己在学历上登上一个台阶,国家也扩大招生名额,由此而来的是,考研成为一大热点.

本书严格按照考研大纲编写.大纲上没有的不写,大纲上有的一定会写.但也不是主次不分,而是突出重点,热点,常考点.本书是为数学一、二的考生编写的.全书的大部分内容和例题都具有普适性,只适用于某类考生的少量内容或例题,在标题或题号上均注明.例如标题或题号右上角注"①"的,表明仅数学一适用.无任何记号的,数学一、二均适用.

本书每节分三部分:**内容精要;考查要点,解题方法、技巧及例题分析;综合杂例.**在"**内容精要**"这部分,列举了大纲中要求的有关概念、定理、性质、关系、公式、法则.读者可根据自己的情况,**详读或略读.**"**考查要点,解题方法、技巧与例题分析**",指出考查内容的命题方式,重点在哪里,常以何种面貌出现,尽可能多地指出各种题型以及解题方法.通过例题分析,指出解题技巧及注意事项,有时还指出常见的错误做法,这些大都是阅卷中发现的典型错误.熟悉各种题型和熟练掌握解题方法,对考生来讲是至关重要的.有许多考生,常由于题目面孔陌生,临阵而不知所措.尽可能多地介绍题型,指出多种解法,是本书一大特点.例如,在数列极限这一标题下,列出的题型有:极限概念的理解,运算性质以及无穷大、无穷小之间关系的正确运用,u_n 为 n 项和的数列的极限,u_n 为 n 个因式连乘积的数列的极限,以迭代形式给出的数列的极限,等等.并不以方法,例如"用积分和式求极限""用夹逼定理求极限"等作为标题来区分,而以按照题目的形式来讨论采用什么方法为宜.读者学了之后,容易对号入座掌握方法.考研试题中,有很多综合题."**综合题解析**"就是为此而选讲的.其中有的是考试真题,有的是作者精心设计的.读者会发现,本书中有不少例题和习题,是在别的书上见不到的.

本书有例题和习题各约 700 个.题号右上角有 * 的是往届的考研真题.习题中除少数简单的计算题只给出答案外,其他计算题,选择题和证明题,都给出较为详细的解法,

而不仅仅是一句话的提示.没有提示的是比较简单的题.不过作者不希望读者一开始就看解法,而是自己先做,做不出或做完后再核查对照,以便总结、对比、提高.

二、怎么考,如何复习迎考?

中国有句古话,叫做“知己知彼,百战不殆”.对立志考研的众多学子而言,“知己”,就是自己知道自己的状况;“知彼”,就是要弄清楚考些什么,怎么考.大纲中已明确规定考些什么,本书各章节中也都有说明,不再在此多说.现在要说的是,一张试卷从哪些方面来考查学生,考生应如何有的放矢去迎考.

(1)**选择题.**

数学选择题大致可分成三类:计算性的,概念性的与推理性的.这就要求考生在复习时重视概念、定理、性质,甚至运算法则的理解,而不是死背条文.不但从正面来理解,还要掌握一些反例.逻辑推理上,要弄清楚充分与必要的区别.条件是充分而未说是必要的,则往往可以举出一些例子说明并非必要;添上某些条件后能保证结论是正确的,则没有这些条件时,结论往往就可能是不正确的.做这类选择题时,切忌想当然,应多一个心眼.本书设计了不少选择题,作了较详尽的分析,读者应给予足够的重视.

(2)**填空题.**

填空题实际上是简单的计算题,是为扩大试卷的覆盖面而设计的.考生切勿因为它简单而掉以轻心.填空题的计算最少,但要求准确无误,做题的时间又不应花得多.为了将这部分的分数拿到手,应在复习时养成良好的计算习惯,切忌轻视基本题的训练.

(3)**证明题.**

以数学一为例,整张试卷中,一般有两道证明题:高等数学与线性代数各一道.高等数学证明题的范围大致有:极限存在性,单调性,奇偶性,不等式,零点的存在性及个数,定积分与变限积分的不等式及零点问题,级数敛散性的论证.线性代数有矩阵可逆与否的讨论,向量组线性相关与无关的论证,线性方程组无解、存在唯一解与存在无穷多解的论证,矩阵可否对角化的论证,两矩阵合同、相似、等价的论证,矩阵正定性的证明,关于秩的大小,并用它来论证有关的问题,等等.可以说,线性代数的证明题的范围相当广泛.至于概率统计,证明题通常集中于随机变量的不相关和独立性,估计的无偏性等.为了做好证明题,就必须熟悉上面所说的有关理论.例如矩阵对角化这一问题,不但要会对角化(这是计算),而且要掌握什么条件下可以对角化(这就涉及理论).这些条件中,有的是充分条件,有的是充要条件.复习时,就要熟悉这些条件并做必要的练习.又如证明不等式,本书中列举了许多题型和方法,其中有的是具体函数,有的为抽象函数,有的又以定积分或变限定积分形式出现.这就要求考生在复习时能很好地融会贯通,举一反三.

(4)**计算题与综合题.**

一份试卷,包括填空题在内,计算题或计算性质的题占 80% 以上.计算题中有一部分是综合题.所以在复习时,应切实加强计算训练.公式当然重要,但仅记公式是不够的.应掌握基本运算方法,熟悉典型步骤,并且要求有熟练的运算能力.有两类综合题.一是形式上的综合,采取的对策是“分解”,将一题拆成几段,各个击破.计算时要特别小心,一步

走错全盘皆输. 数学二中有许多这种题. 另一种是内在的综合,就要从条件去挖掘内涵或抽象出本质要点,然后去运算. 这类综合题,不仅计算题中有,选择题与证明题中都有.

(5)**应用题.**

一般说来,每一份试卷都有一道应用题,但近几年来应用题少了. 考生常常感到应用题较难对付. 实际上,应用题着重考查学生的建模能力,而不考查专业知识面. 不会出现对某一群体明显不利或明显有利的背景的题. 应用题大致有几何,物理(一般限于力学和运动学),变化率,或与日常生活有关的(例如微分方程,线性代数,概率统计中的一些应用题)等等. 所有这些本书均有详尽的介绍.

三、考研数学复习的几个原则

如何更好地使用本书并在考研中取得好成绩? 我们给读者指出数学复习的几个原则(注意,原则问题不能违反,一定要做到).

(1)**坚持不懈,细水长流**

老一辈的京剧表演艺术家常讲:"一天不练功,只有我知道;三天不练功,同行也知道;一月不练功,观众全知道." 复习数学,我们建议读者也一定要这样,捧着这本书,每天都要看内容,每天都要做题目,坚持不懈,细水长流,便可水到渠成.

(2)**不求初速,但求加速**

一开始读数学书,总会吃力一些,遇到的困难多一些,这很正常,我们不要畏难,应该扎扎实实地把每一处不懂的地方弄懂,把每一个难点攻克,这样,开始复习的速度就会慢一些. 但是,只要能够坚持,复习一定的内容之后,你便会发现,复习速度不断的提高,理解能力和解题能力都会显著增强. 这符合数学学习的规律,请读者把握住.

(3)**独立思考,定期检验**

复习一个知识,先要读基本的概念、定理和公式,然后看例题,再去做习题. 只有通过做题,才能知道自己是否真正掌握了这个知识. 前面已经指出,一定不要翻着答案做题,稍有不会就看答案,这样效果不好. 读者先不要看答案,自己独立地去做,调动起自己所有的知识储备,看能不能做出来,做出来了,自然很好,即使做不出,时间也没有白费,其他的知识在你脑子里过了一遍,也是一种复习,只是要注意,如果全力以赴也未做出题目,看完答案后要总结经验. 在复习完一节、一章和整个课程的不同阶段,都要定期地通过做题来检验自己的复习水平和效果.

(4)**吸取教训,善于总结**

人没有不犯错误的,尤其在学习数学的过程中,做错题,不会做题,是再平常不过的了. 人们常说:"失败是成功之母",就是这个意思. 我们常告诉学生:如果一位复习备考的学生遇到不会的题、做错的题,可能会有两种态度,一种态度是消极的,题目不会做,心情不好,自暴自弃,复习效率大打折扣;一种态度是积极的,题目做不出,正是找到了自己复习的薄弱环节,找到了自己的不足之处,正是遇到了自己提高、进步的机会,我们当然支持后面一种态度,这才是正确的态度. 所以,希望在考研复习的过程中,读者准备一个笔记本,通过不会做或者做错的题目,认真分析自己到底问题出在哪里,哪些知识还复习

不到位，吸取教训，多做总结，这样的笔记日积月累，对提高你的数学水平，是有极大帮助的.

本书答疑地址：http://weibo.com/zhangyumaths.

预祝广大考生复习顺利，金榜题名！

编　者

2012 年 2 月于北京

Contents 目录

高等数学

[注]记号①表示本章(节)内容仅对数学一考生要求，对数学二的考生无此要求.

线性代数

概率论与数理统计[①]

第 1 章 函数、极限、连续

§1.1 函 数

一、内容精要

(一)函数的定义

设在某个过程中,有两个变量 x 和 y,当变量 x 在它的变化范围 D(实数集)内每取一个值时,变量 y 按照一定的规律有唯一确定的实数值与它对应,则称 y 为 x 的函数,记作

$$y=f(x),x\in D.$$

x 称自变量,y 称因变量,f 称对应关系,也称 $f(x)$为 x 的函数. 当 x 在 D 内取值时,对应关系 f,y 取值的集合称为函数的值域,常记为 R_f. 以后如不作另外声明,x,y 均取实数.

两个函数相同,当且仅当定义域相同,并且对应关系 f 相同. 至于自变量与因变量用什么字母表示是无关紧要的.

(二)函数的一些特性的定义及判定

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$在对称于原点的某 D 上有定义,并且对于任意 $x\in D$,必有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$在 D 上为偶函数;如果对于任意 $x\in D$,必有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$在 D 上为奇函数.

在直角坐标 xOy 中,偶函数在 D 上的图像关于 y 轴对称;奇函数在 D 上的图像关于原点(0,0)对称.

判别函数的奇偶性的方法主要是靠定义,当然,如果函数的定义域不对称于原点,则该函数不可能是奇(偶)函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域是 D,如果存在常数 $T>0$,当 $x\in D$ 时,必有 $x\pm T\in D$,并且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,T 称为它的一个周期. 通常称的周期是指使 $f(x+T)=f(x)$成立的最小正数 T(如果存在的话).

判别函数 $f(x)$是否为周期函数,主要根据定义,有时也用别的办法.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 M，当 $x\in X$ 时 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界；如果存在常数 m，当 $x\in X$ 时 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 X 有下界；如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 即如果存在常数 $M>0$，当 $x\in X$ 时，$|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$ 在 X 上有界，若不论 M 多么大，总有 $x\in X$，使 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

判别函数 $f(x)$ 在 X 上有上（下）界，一般是将 $f(x)$ 在 X 上放大（缩小），直至明确它小于（大于）某常数.

判别函数在某 D 上有界的几个充分条件：

(1)函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 存在极限，则存在该点的一个去心邻域 $\mathring{U}$，在 $\mathring{U}$ 内 $f(x)$ 有界；

(2)如果 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界；

(3)若 $f(x)$ 在(a,b)内存在最大（小）值，则 $f(x)$ 在(a,b)内有上（下）界.

函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 去心邻域内无界与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是两个概念. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 去心邻域必无界，这是判别函数无界的一个充分条件，反之未必成立. 例如，$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 去心邻域内取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 时，$f(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，对于任意大的 M，当正整数 $n>\frac{M}{2\pi}-\frac{1}{4}$ 时，$f(x_n)>M$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界. 但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 并不为∞，而是振荡型，故极限不存在.

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果对于 X 上的任意两点，$x_1,x_2,x_1<x_2$，必有 $f(x_1)\leqslant(\geqslant)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上单调增加（减少）；如果必有 $f(x_1)<(>)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上严格单调增加（减少）. 有的教科书上将这里的单调增加（减少）称为单调不减（不增），将这里的严格单调增加（减少）称为单调增加（减少）.

常用的判别单调性的方法：简单的函数或未说明可导的抽象函数用定义判定；复杂一些的初等函数或可导的抽象函数，用微分学的方法判定，见第 2 章 § 2.3，2.4.

（三）反函数、复合函数、初等函数、分段函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f，若对于 R_f 中的每一个 y，由 $y=f(x)$ 都有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，则记为 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数. 与此相呼应，称 $y=f(x)$ 为直接函数. 反函数的定义域与值域分别是直接函数的值域与定义域.

例如函数 $y=x^2$，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，对于 R_f 中的每一个 y，由 $y=x^2$ 在 D 中对应的 x 不唯一，不合乎反函数定义，所以不存在反函数. 若将 D 限制为 $G=[0,+\infty)$，则对于 R_f 中的每一个 y，由 $y=x^2$ 在 G 内存在唯一的 x 与之对应，所

以存在反函数 $x=\sqrt{y}, y\in R_f, x\in G$.

有时,也将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$. 在同一直角坐标系中, $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

定理　若函数 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调,其值域记为 R_f,则在 R_f 上 $y=f(x)$ 存在严格单调(具有相同单调性)的反函数,其值域为 X;若又设 X 为区间,且 $y=f(x)$ 在 X 上连续,则值域 R_f 也是一个区间,且反函数在 R_f 也是连续的;若再设 $f'(x)$ 存在且不为零,则反函数在 R_f 亦可导,且 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$,其中 $x=f^{-1}(y)$.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是 D_φ,值域是 R_φ. 若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$,则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数,它的定义域是 $\{x\mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}$. 这里 $\varnothing$ 表示空集.

3. 初等函数

(1)**常值函数**　C(C 为常数), $x\in\mathbf{R}$;

(2)**幂函数**　x^α(α 为常数),定义域由 α 确定,但不论 α 如何,在 $(0,+\infty)$ 内总有定义;

(3)**指数函数**　a^x(常数 $a>0, a\neq1$), $x\in\mathbf{R}$;

(4)**对数函数**　$\log_a x$(常数 $a>0, a\neq1$), $x\in(0,+\infty)$;

(5)**三角函数**　$\sin x, x\in\mathbf{R}$; $\cos x, x\in\mathbf{R}$; $\tan x, x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right), k\in\mathbf{Z}$; $\cot x, x\in(k\pi,(k+1)\pi), k\in\mathbf{Z}$;

(6)**反三角函数**　$\arcsin x, x\in[-1,1]$; $\arccos x, x\in[-1,1]$; $\arctan x, x\in\mathbf{R}$; $\operatorname{arccot} x, x\in\mathbf{R}$.

以上(1)～(6)**类函数称为基本初等函数**.

由基本初等函数经有限次加、减、乘、除、复合而成的函数称**初等函数**.

4. 分段函数

一个函数在其定义域内的不同范围用不同的表达式表示,称用这种形式表示的函数为分段函数.

分段函数仅是说函数的表示形式,并不是说它是几个函数.

常见的分段函数有:

(1)**绝对值函数**　$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

(2)**符号函数**　$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(3)**取整函数**　$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数: $[x]=n$,当 $n\leqslant x<n+1$,其中 n 为整数.

例如：$[\pi]=3,[-\pi]=-4,[2]=2$.

(4) $\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$

分段函数也可能是初等函数. 例如 $|x|=\sqrt{x^2}$ 是初等函数.

二、考查要点，解题方法、技巧与例题分析

考研题中与本节有关的可以说比比皆是，例如若用单调有界准则求极限，就要检查数列的单调性与相应的有界性；利用导数可以证明单调性，利用单调性可以证明某些不等式；定积分，甚至二重、三重、曲线、曲面积分的某些计算，牵涉到函数的奇、偶性，可以用此来化简计算；将复合函数分解为一些基本初等函数的复合，是求导的重要一环；至于说建立函数关系以及使用基本初等函数的基本性质，则更为普遍.

但是单以本节内容命题的考题不多. 大致有：函数的表示；分段函数的复合；反函数.

(一) 求函数的表达式

1. 已知简单的函数方程，求函数的表达式

求未知函数 $f(x)$ 的题型很多，题中出现未知函数导数的，常用微分方程的办法解之；题中出现某极限者常用极限方法解之. 这里只限于仅给出函数方程求解 $f(x)$.

例 1 设对于任意 x，$f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$，则 $f(x)=$________.

解 应填 $\frac{1}{3}(x^2+2x-2)$. 由 $f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$，有 $f(1-t)+2f(t)=(1-t)^2-2(1-t)=t^2-1$，即

$$2f(x)+f(1-x)=x^2-1,$$
$$4f(x)+2f(1-x)=2x^2-2.$$

由此推知 $3f(x)=x^2+2x-2$，$f(x)$ 即为所填.

2. 已知函数的周期性、奇偶性及 $f(x)$ 在某一区间上的表达式，求它在另一指定区间上的表达式

例 2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且是以 2 为周期的奇函数，当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)=x^2+e^x+\ln x$，则当 $x\in[-4,-2]$ 时，$f(x)=$________.

分析 由奇函数，可由区间 $(0,1)$ 上的表达式得到区间 $(-1,0)$ 上的表达式；再由周期为 2，可得到区间 $(-3,-2)$ 上的表达式；再由区间 $(0,1)$ 上的表达式及周期 2，可得到区间 $(-4,-3)$ 上的表达式. 最后，由奇函数及周期性可计算出 $f(0)$，$f(-2)$，$f(-3)$ 及 $f(-4)$ 的值.

解 应填

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2+e^{x+4}+\ln(x+4), & 当\ x\in(-4,-3),\\ -[(x+2)^2+e^{-x-2}+\ln|x+2|], & 当\ x\in(-3,-2),\\ 0, & 当\ x=-4,-3,-2.\end{cases}$$

设 $x\in(-1,0)$，有 $-x\in(0,1)$. 由奇函数性质，有

$$f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2+e^{-x}+\ln(-x)]=-(x^2+e^{-x}+\ln|x|).$$

设 $x\in(-3,-2)$,有 $x+2\in(-1,0)$,由周期性,有

$$f(x)=f(x+2)=-[(x+2)^2+e^{-x-2}+\ln|x+2|].$$

设 $x\in(-4,-3)$,有 $x+4\in(0,1)$.由周期性,有

$$f(x)=f(x+4)=(x+4)^2+e^{x+4}+\ln(x+4).$$

又由题设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义且为奇函数,故 $f(0)=0$,再由周期性,有 $f(-2)=0$,$f(-3)=f(-1)=-f(1)=-f(-1)$,所以 $f(-1)=0$,从而 $f(-3)=0$,$f(-4)=f(-2)=0$.

3. 已知复合关系求复合函数或中间函数的表达式

例 3*[注] 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

解 $f(\varphi(x))=e^{(\varphi(x))^2}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,定义域 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 即 $x\leqslant 0$.

例 4 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))$,$n=2,3,\cdots$,求 $f_n(x)$的表达式.

解

$$f_2(x)=f_1(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

猜想

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

当 $n=1$ 时由定义知成立.设 $n=k$ 时成立,则

$$f_{k+1}(x)=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

所以 $n=k+1$ 时亦成立.由数学归纳法知,对一切正整数 n,猜想成立.

4. 求分段函数的复合函数

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

解 对于 $f(g(x))$,按 $f(x)$的定义,有

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|<1,\\ 0, & |g(x)|\geqslant 1.\end{cases} \tag{1.1}$$

再由$|g(x)|<1$,根据 $g(x)$的定义,其对应的 x 应$|x|\leqslant 1$;由$|g(x)|\geqslant 1$,对应的 x 应$|x|>1$.于是

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases} \tag{1.2}$$

【评析】 求 $f(g(x))$时,先由外层函数 $f(x)$写出复合函数的表达式并同时写出中间变量(即内层函数 $g(x)$)的取值范围,如(1.1)式,然后再由内层函数 $g(x)$的分段表达式过渡到自变量 x 的变化范围,如(1.2).

[注]加"*"的题目为往年考研真题.