重点问题详解

初中代数
下册

张家驹　王智勤　编

中国环境科学出版社

重点问题详解

初中代数 下册

中国环境科学出版社

1993

(京)新登字089号

内 容 简 介

本书包括初中三年级代数全部知识内容，对其中应知应会的知识点和重难点、或易混易错不好掌握的疑点，以及可能遇到的各种问题，逐一提出问题，并做了详尽的回答，有些问题还配有必要的小型练习，以求弄清知识、巩固概念，发展能力。

本书条目按课文顺序编排，易于查找。适合初中学生及自学青年阅读参考，也可供教师备课参考。

重点问题详解
初中代数 下册
张家驹 王智勤 编
*
中国环境科学出版社出版
北京崇文区北岗子街8号
北京昌平兴华印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售
*
1993年3月第一版 开本 787×1092 1/32
1993年3月第一次印刷 印张 6 1/2
印数 1—5 000 字数 150千字
ISBN 7-80093-285-0/G·317
定价：3.70元

前　言

"学则须疑"，有疑有解则能提高和进步。

学习是一个特殊的认识过程，是在教师帮助下加速对所学知识的认识过程。课堂学习时间是有限的，重要的是培养自学能力，以提高学习效果。自学时有了疑问和疑难怎么办！要靠无声的老师做辅导，这就是有益的——书。

为此，向大家奉献一套中小学课本中《重点问题详解》，一书在手，似教师陪坐身旁。

该书是以问题的形式出现的。因为一切科学都是从为什么开始的，且问题是启动思维的动力。所以，以问题的形式，贯穿全书是最有益的，它把学习中的重点、难点、疑点设计成问题，使读者一目了然，便于阅读和使用。

遇有疑难，请先思考，然后翻阅此书，认真阅读，即可生效。

本书的特点是：

一、源于课本，重点突出，解答详尽。

该丛书，随着课本进度，将所学内容的重难点和疑惑不解的问题，提出来做详尽的解答，并有例题，以帮助读者深刻理解，提高学习实效。

二、提出问题，文字精辟，促进思考。

该丛书，对所有重点问题，均以问题形式出现的。问题是思维的动力。你有问题可到该书中去找解；丛书中提出的问题，促你思考，然后阅读解答，使你从中得到提高。

三、应用知识，总结方法，提高能力。

提高能力，是学习的重要目的。该丛书根据课程的要求，及时总结学习方法和掌握应用知识的方法，以取得举一反三之效，促进读者学习能力的提高。

四、辞书性，题解性，兼而有之。

该丛书，具有辞书性和题解性。为了说明课本中的重点知识，在解答之中，则要博引例证，以丰富内容，可取辞书之效。遇有典型问题，解之详尽，故有题解功能。

编写这套丛书是一个大胆的尝试，虽然我们依据设想做了很多努力，但是不妥之处也还难免。欢迎广大读者批评指正。

目　　录

对数是如何产生与发展的

远在17世纪初期，由于生产的需要，推动了数学的发展。当时，航海人员要确定船只的航程和位置，天文学家要处理观察行星运动所得的数据，都不可避免地遇到大量的多位数的计算问题，如果只按常规方法进行计算，不仅极为繁杂，而且工作量也是相当大的。德国天文学家开普勒（1571～1630）在推算行星的运行轨道时，竟伏案达两年之久。这就迫切要求科学工作者能探索一种新的运算方法，解决在天文、航海等事业的研究中所遇到的大量的繁琐复杂的运算，对数就是适应这种需要而产生的。

人们在经过长期探索与实践的基础上，终于在17世纪20年代，由苏格兰著名数学家纳皮尔（Napier，1550～1617）总结出了历史上第一张对数表。当时是通过初等数学中的等比数列和等差数列之间的对应关系来制作的，因此，仅造表就花费了20年左右的时间，而且使用时也很难对这份对数表进行验算。

1624年英国数学家布里格斯（Briggs，1556～1631）出版了自己编写的14位常用对数表，他还用“首数”这个术语来表示对数的整数部分。

18世纪，瑞士数学家欧拉（Euler，1707～1783）指出“对数源于指数”，这一观点很快被普遍接受，欧拉用“尾数”这个术语来表示对数的小数部分，由于他的对数理论著作的影响，学校里开始讲授对数。

革命导师恩格斯把对数的产生看作17世纪数学上三大成就之一，曾给予高度评价，他在《自然辩证法》一书中评论

17世纪的自然科学和数学时写道："在这种情况上，占首要地位的，必然是最基本的自然科学，即关于地球上的物体和天体的力学，和它同时并且为它服务的，是数学方法的发现和完善化……最重要的数学方法基本上被确定了：主要由笛卡尔制定了解析几何；由纳皮尔制定了对数；由莱布尼兹，也许还有牛顿制定了微积分"。

17世纪中叶以后，对数与对数表传入我国，在 $\lg 2 = 0.3010$ 的算式里，2叫做"真数"，0.3010叫做"假数"，真数和假数对列成表，故名"对数表"，后来，"假数"一词渐渐不用，而把0.3010叫做对数。

如今计算技术虽然有了很大发展，但对数运算仍是数学运算中不可缺少的工具之一，特别是在机械加工、电网路、声和光的强度计算、农田水利建设等方面有着广泛的应用。

什么是对数及对数运算

对数是乘方运算的又一种逆运算的运算结果。

同学们在初中一年级已经学过有理数的乘方：b 个相同的因数 a 相乘，即：$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{b\text{个}}$ 记作 a^b。

这种求 b 个相同因数的积的运算，叫做乘方，乘方的结果叫做幂，在 $a^b = N$ 中，a 叫做底数，b 叫做指数，N 叫做幂。读作"a 的 b 次幂等于 N。"例如：$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{b\text{个}} = 2^b$，其中2叫做底数，$b$ 叫做指数，2^b 叫做幂。

如果已经知道一个数的 b 次幂等于 N，反过来求这个数，我们把这种运算定义为开方运算，运算的结果叫做方根，用 $\sqrt[b]{N}$ 表示。我们知道，在一个等式中，用相反的运算方法，从得数求出原式中某一个数的方法，称为原运算的逆运算，所以开方运算是乘方运算的逆运算。

在等式$a^b=N$中，能否用含有a和N的式子表示b呢？这就是我们现在所研究的对数运算．显然，对数运算是乘方运算的又一种逆运算形式，运算的结果叫做对数，用$\log_a N$表示。

一般地，对数的定义是：如果$a^b=N(a>0,\ a\neq1)$，那么b就叫做以a为底的N的对数，记作$\log_a N=b$．其中a叫做底数，N叫做真数。

例如：因为$2^3=8$，

所以 3 叫做以 2 为底的 8 的对数。

记作$\log_2 8=3$。

不难看出，对数是通过指数定义的．实质上是把一个数 8，表示成一个数 2 的若干次幂的形式，即由$2^3=8$改写为$2^{\log_2 8}=8$的形式。

对数运算是我们学过的加、减、乘、除、乘方、开方等六种运算方法后的又一种新的运算方法．由于我们非常熟悉$2^3=8$的关系，所以很容易得到$\log_2 8=3$，假如要问$2^{(?)}=31$，恐怕就不那么容易解决了．其实这也是一种运算，只是不同于已经学过的四则运算，我们把这种已知底数和幂，求幂指数是多少的运算方法叫做对数运算，而把要求的幂指数叫做对数。

a、b、N三者之间的关系列表如下

已　知	求	表 达 式	运算名称	运算结果
a，b	N	$N=a^b$	乘方运算	幂
b，N	a	$a=\sqrt[b]{N}$	开方运算	方根
a，N	b	$b=\log_a N$	对数运算	对数

为什么要学习对数

对数是从生产实际的需要中产生的，借助它，可以解决一些用加、减、乘、除、乘方和开方运算不易解决和不能解决的问题，而这些问题又往往是在研究生物繁殖，化学反映，物理蜕变以及工农业生产的增长等情况中经常出现的。

例如：确定2^{100}是多少位数，确定0.7^{100}在小数点后面连续有多少个零，求$\dfrac{7.25\times\sqrt[3]{14.28}}{\sqrt{8.936}}$的值等均属于用加、减、乘、除、乘方和开方等运算方法不易解决的问题，计算过程极为繁杂。由于在幂的性质和运算法则的基础上建立起来的对数运算，能把乘、除运算转化为加、减运算；把乘方、开方运算转化为乘、除运算，上述问题的解决便化难为易了。

又如：某钢铁厂去年的钢产量比前年增长26%，如果按这个增长率继续生产，大约经过多少年，可使钢产量比前年增长一倍？

设：经过x年钢产量比前年增长一倍

根据题意，$(1+26\%)^x=2$

这是一个已知底数和幂，反过来求指数的问题，属于利用加、减、乘、除、乘方和开方运算不能解决的问题，必须利用对数的性质和运算法则求解。

两边取对数。得　$\lg(1+26\%)^x=\lg 2$

即：$x\cdot\lg 1.26=\lg 2$

所以　$x=\dfrac{\lg 2}{\lg 1.26}=\dfrac{0.3010}{0.1004}\approx 3$

答：大约经过 3 年，钢产量比前年增长一倍。

正如恩格斯所指出的：“任何一个数都可以理解为和表示

为其他任何一个数的幂（对数，$y=a^x$）。而这种从一个形式到另一个相反形式的转变，并不是一种无聊的游戏，它是数学科学的最有力的杠杆之一，如果没有它，今天就几乎无法去进行一个比较困难的计算。"（《自然辩证法》）

思考题

1.估计某林场现有木材4500立方米，如果每年的平均增长率为1.2%，问10年后可以有木材多少立方米？

2.机器的价值是10万元，如果每年的折旧率是8.75%（每年减少它的8.75%），那么大约经过几年后，它的价值是原来的$\frac{2}{5}$？

引进对数定义时，为什么要规定$a>0$，$a\neq 1$

指数式$a^b=N$与对数式$\log_a N=b$，从不同的角度反映了相同的3个量a、N、b之间的相互关系，两种解析式是具有相同本质的两种不同的表现形式，因而可以互相转化。

在指数式$a^b=N$中，根据指数幂的概念，只有当$a>0$时，a^b才有意义。所以在对数式$\log_a N=b$中必须同样规定$a>0$。具体地说：

（1）若$a<0$，则N为某些值时，b不存在。如$a=-2$，$N=8$时，-2的任何次方也不会等于8。即$b=\log_{(-2)}8$不存在。

（2）若$a=0$，则有两种可能。如果N等于零，那么因为零的任何次幂永远等于零，所以b可为任何数值。即$b=\log_0 0$有无数个值；如果N不等于零，那么因为零的任何次幂永远等于零，所以b不存在。即$b=\log_0 N(N\neq 0)$不存在。

所以在对数式$\log_a N=b$中必须规定$a>0$。

为什么还要规定$a\neq 1$呢？应该考虑下述两种情况：若

$a=1$，N也等于1，那么因为1的任何次幂永远等于1，所以$b=\log_1 1$的值是不确定的；若$a=1$，而N不等于1，那么因为1的任何次幂永远等于1，所以$b=\log_1 N\ (N\neq 1)$不存在。因而我们还要规定$a\neq 1$。

总之，为了保证对数$\log_a N$的存在与唯一，在引进对数定义时必须规定$a>0$，$a\neq 1$。

至于在$\log_a N=b$中，必须$N>0$，是由于在实数范围内，正数的任何次幂都是正数，因而$a^b=N$中的N总是正数。同学们要特别重视对数的这个重要性质——零与负数没有对数。高中讲对数函数中自变量的取值范围，解对数方程时的验根等知识，都是以此为基础的。

思考题：

1.求下列各式中的x

(1) $\log_{0.5}x=-3$，　$\log_8 x=1$，　$\log_2 x=0$。

(2) $\log_x 125=3$，　$\log_x 16=2$，　$\log_x 3=-\frac{1}{2}$。

(3) $\log_3 9=x$，　$\log_2\frac{1}{4}=x$，　$\log_{\frac{1}{9}}\frac{1}{27}=x$。

2．求下列各式中x的取值范围

(1) $\log_2(2-3x)$，　(3) $\frac{1}{\log_3(x-1)}$，

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$，　(4) $\log_x(2x-1)$。

怎样利用等式$\lg 2+\lg 5=1$解题

利用对数的运算法则解题时，一是直接利用积、商、幂、方根的对数运算法则，通过把真数分解质因数的办法，把各对数化成若干个对数的代数和，使问题得到解决；二是逆向运用对数运算法则、把底数相同的各对数合并成一个对数，

然后对真数进行化简，这两种解题思路均应熟练掌握、灵活运用。

例1　计算：$\lg14-2\lg\frac{7}{3}+\lg7-\lg18$

解法一

$$\begin{aligned}原式&=\lg2+\lg7-2(\lg7-\lg3)+\lg7-(\lg2+2\lg3)\\&=\lg2+\lg7-2\lg7+2\lg3+\lg7-\lg2-2\lg3\\&=0\end{aligned}$$

解法二

$$原式=\lg\frac{14\times7}{\left(\frac{7}{3}\right)^2\times18}=\lg\frac{14\times7}{49\times2}=\lg1=0$$

两种解法体现了利用对数法则解题时的两种基本思想，在解题实践中应有意识地培养双向应用运算法则的能力。

$\lg2+\lg5=1$ 是对数的一个极简单的性质，如果运用得法，将会收到事半功倍的效果。

例2　计算：$\lg^25+\lg2\cdot\lg50$

解法一　$$\begin{aligned}原式&=\lg^25+\lg2(2\lg5+\lg2)\\&=\lg^25+2\lg5\cdot\lg2+\lg^22\\&=(\lg5+\lg2)^2\\&=1\end{aligned}$$

解法二　$$\begin{aligned}原式&=\lg^25+\lg2\cdot(\lg5+\lg10)\\&=\lg^25+\lg2\cdot\lg5+\lg2\\&=\lg5(\lg5+\lg2)+\lg2\\&=\lg5+\lg2\\&=1\end{aligned}$$

解法三　$$\begin{aligned}原式&=\lg^25+(1-\lg5)(1+\lg5)\\&=\lg^25+1-\lg^25\\&=1\end{aligned}$$

三种解法都应用了等式 $\lg2+\lg5=1$。特别是第三种解法，由于巧妙地使用了 $\lg2+\lg5=1$ 的变形——$\lg2=1-\lg5$，显得更简捷。

例 3　已知：$\log_{14}7=a$，$\log_{14}5=b$。

求　$\log_{35}28$ 的值

分析　设　$\log_{35}28=x$

则　$35^x=28$

两边取以14为底的对数

$$\log_{14}35^x=\log_{14}28$$

$$\therefore\quad x=\frac{\log_{14}28}{\log_{14}35}=\frac{2\log_{14}2+\log_{14}7}{\log_{14}5+\log_{14}7}$$

仿照例 2 的解题思路

因为 $\log_{14}2+\log_{14}7=1$

所以 $\log_{14}2=1-\log_{14}7$　代入上式

$$\text{得}\quad x=\frac{2(1-\log_{14}7)+\log_{14}7}{\log_{14}5+\log_{14}7}=\frac{2-a}{a+b}$$

思考题

1.计算：$3^{\lg1}-\lg2+\sqrt{(\lg5)^2-\lg25+1}$

2.计算：$\dfrac{2\lg2+\lg3}{2+\lg0.36+\dfrac{2}{3}\lg8}$

3.计算：$\lg5\cdot\lg20+\lg^22$

4.计算：$\lg25+\lg2\cdot\lg50+\lg^22$

如何应用对数基本恒等式 $a^{\log_aN}=N$

对数有 4 个重要性质应牢牢掌握。(1) 零与负数没有对数，即 $N>0$；(2) 底的对数等于1，即 $\log_aa=1$；(3) 1的对数等于0，即 $\log_a1=0$；(4) 对数基本恒等式，

$$a^{\log_aN}=N.$$