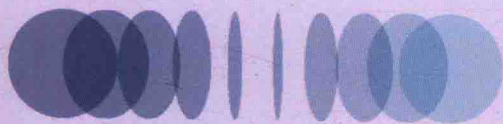


叠层制备结构 热应力分析

Thermal Stresses
on Laminated Object Manufacturing

舒小平 著

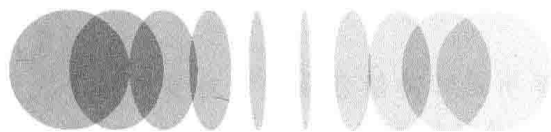


南京大学出版社

叠层制备结构 热应力分析

———— Thermal Stresses ————
on Laminated Object Manufacturing

舒小平 著



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

叠层制备结构热应力分析 / 舒小平著. —南京:

南京大学出版社, 2015.12

ISBN 978 - 7 - 305 - 16292 - 3

I. ①叠… II. ①舒… III. ①叠层结构—结构力学—
热应力—热力学模型 IV. ①O343.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 294007 号

出版发行 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

出 版 人 金鑫荣

书 名 叠层制备结构热应力分析

著 者 舒小平

责任编辑 惠 雪 苗庆松 编辑热线 025 - 83596923

照 排 南京紫藤制版印务中心

印 刷 江苏凤凰数码印务有限公司

开 本 880×1230 1/32 印张 6.5 字数 163 千

版 次 2015 年 12 月第 1 版 2015 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 305 - 16292 - 3

定 价 50.00 元

网址: <http://www.njupco.com>

官方微博: <http://weibo.com/njupco>

官方微信号: njupress

销售咨询热线: (025)83594756

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换

前 言

传统工件是由某种材料的坯料经过各种切削加工成形的,加工余量大。现代增材制备技术将材料制备和结构成形融为一体,极大地减少了加工余量;同时因成形过程的可设计性,使得成品工件具有功能性。叠层制备技术作为一类典型的增材制备技术,包括狭义的叠层制备、涂层、梯度功能材料、三维打印等工艺,在工艺上表现为逐层制备,在几何上表现为多材料多层结构。这类结构大多在高温下制备,会出现典型的热残余问题,影响工艺的成熟和工件的质量。

作者长期致力于纤维复合材料层合结构和压电智能层合结构的板壳理论和数值方法的研究。因上述两种结构相似性,可以比较方便地进行理论和方法的移植,作者近年来在叠层制备结构的热应力分析上取得进展。尤其在研究高温制备叠层结构热残余问题时,将传统的理想化的各层同步降温假设扩展到更切合实际的梯度降温假设。且将狭义的叠层制备、涂层、梯度功能材料、三维打印等工艺统一为广义的叠层制备工艺,建立起统一的热应力解析方法和数值方法。研究涉及梁、板、壳等各种叠层结构形式,包括各向同性、各向异性和压电等多种材料,具有系统性。

工件制备是材料工程师和机械工程师的专长,而强度分析则是力学工作者的擅长,将其两者的结合有助于新工艺的研发,大幅缩短研发时间,降低研发成本,优化产品质量。据作者查阅,目前国内尚缺系统阐述叠层制备技术热应力的图书,相关的研究人员和工程师只能参考分散的论文。拙著可望填补空白,为工程师提供理论指导,给同行研究者以参考。为便于读者理解,书中数学物理方法和表达前后一致;各种理论统一在一个理论框架内。

书中学术观点或为一家之见,表述也未必精确,敬望指正。

本书的研究成果惠承多项省级专项的资助,本书的出版惠承江苏省重点学科基金的资助;作者的研究和写作过程感念家人的悉心照顾;本书的出版过程得到南京大学出版社和编辑左明星女士的热忱帮助,在此一并表示诚挚的感谢。

舒小平

二〇一五年十一月

目 录

1 热弹性力学基础	1
1.1 叠层制造的定义及其结构力学模型	1
1.2 直角坐标系下的基本关系和基本方程	5
1.3 柱坐标系和球坐标系下的基本关系和基本方程	11
2 叠层梁	15
2.1 经典理论热弹性解	15
2.2 一阶理论热弹性解	19
2.3 高阶理论热弹性解	23
2.4 叠层梁热残余显式解	34
2.5 涂层热残余显式解	38
2.6 基于梯度降温的叠层梁热残余解	46
2.7 叠层梁热残余有限元解	55
3 叠层板	66
3.1 经典理论热弹性解	66
3.2 一阶理论热弹性解	69
3.3 高阶理论热弹性解	72
3.4 简支矩形板的热弹性解	76
3.5 叠层板热残余显式解	81
3.6 叠层板热残余有限元解	85
4 叠层圆柱壳和球壳	96
4.1 叠层圆柱壳和球壳热弹性解	96

4.2	叠层圆柱壳和球壳热残余解	107
4.3	长圆柱壳热残余解	114
4.4	基于梯度降温的圆柱壳和球壳热残余解	116
5	叠层扁壳和深壳	127
5.1	叠层扁壳热弹性解	127
5.2	叠层深壳热弹性解	139
6	压电材料叠层结构	152
6.1	圆柱壳和球壳热弹性解	154
6.2	圆柱壳和球壳热残余解	166
6.3	压电叠层梁热弹性解	176
6.4	压电叠层板热弹性解	184
	参考文献	194

1 热弹性力学基础

1.1 叠层制造的定义及其结构力学模型

“叠层制造”为广义的工件逐层制备技术的总称,既包括传统的狭义上的分层实体成形技术,又包括表面改性在基体上制备涂层的技术,以三维打印为代表的增材制造技术,以及按功能性要求使性能不同的组分材料逐层制备的梯度功能材料多层结构。这些技术和工艺之所以归类为广义的叠层制造,在于它们有一个共同的工艺特征——工件逐层制备而成。就结构特征而言,叠层制造表现为单一材料或多种材料的多层结构;就制备环境而言,叠层制造大多都是在高温下成形,有的也可能在高温下使用。因此,在温变状态下,需要考虑其热弹性响应。另一方面,高温成形后工件需冷却至室温,因为各层材料性能的差异和制备过程产生的温度梯度,致使工件冷却后可能出现一定的热残余变形和应力,这样既是影响产品质量的关键因素,又是影响叠层制造技术的成熟度的关键。

虽然上述工艺制备的工件在工艺上均表现为逐层制备,在几何上均表现为多材料多层结构,但因具体制备工艺的差异,在做多层结构处理时各有其差异,具体举例如下。

1. 三维打印结构

20世纪80年代查尔斯·赫尔(3D Systems公司的创始人)研发出一系列3D打印技术;1993年麻省理工大学教授 Emanuel Sachs发明了 Three-Dimensional Printing(3DP)技术;1995年,Z Corporation利用3DP技术生产出三维打印机。三维打印技术改变了传统的零件设计模式,真正实现了由概念设计向模型设计的转变。三维打印是以数字模型文件为基础,运用粉末状金属或塑料等可黏

合材料,按一定的路径逐层堆积成形的快速成形技术。其成形原理类似于激光打印机,将零件数字化模型进行空间网格化,通过像素分解成为一个个空间点阵,喷头在计算机的控制下,按照截面轮廓的信息,在铺好的粉末材料上喷射出液态微滴,将零件一层层堆积而成。经过近三十年的发展,无论是工艺还是三维打印机研发,均取得积极进展,技术日臻成熟。在三维打印发展过程中,形成了多种工艺形式:

(1) 分层实体成形(laminated object manufacturing, LOM),又称为狭义的叠层制备技术,该技术是利用薄片材料、激光、热熔胶来制作叠层结构。该系统主要包括计算机、数控系统、原材料存储与运送部件、热黏压部件、激光切系统、可升降工作台等部分。激光切割器将沿着工件截面轮廓线对薄膜进行切割,热黏压部件将逐层地把成形区域的薄膜黏合在一起,直至工件完全成形。

(2) 直接金属激光烧结(direct metal laser sintering, DMLS)和选区激光烧结(selective laser sintering, SLS),其中后者最早由美国德克萨斯大学奥斯汀分校的 C.R.Dechard 于 1989 年提出。激光烧结技术是将激光打印和粉末冶金技术相结合,在基底铺设金属粉末,由激光扫描烧结。这两者所不同的是,直接金属激光烧结是边铺粉边烧,而选区激光烧结是先铺整层粉末,然后激光扫描烧结,每次沉积厚度 $20\sim 100\ \mu\text{m}$,成形点阵可以小于 $0.01\ \text{mm}$,甚至可以得到免加工的工件。

(3) 熔融沉积成形工艺(FDM),是由 Scott Crump 于 1988 年发明。其工艺是将丝状的热熔性材料进行加热融化,通过带有微细喷嘴的挤出机把材料挤出来,熔融的丝材被挤出后随即会和前一层材料黏合在一起。一层材料沉积后工作台将按预定的增量下降一个厚度,然后重复以上的步骤直到工件完全成形。

上述工艺中,接近熔点的高温成形,冷却后易出现热残余现象。尤其是一些细长体或薄壁体工件,热应力处理和残余变形则成为技术瓶颈。

2. 涂层结构

涂层技术发展时间长,被广泛地应用于重要零部件的表面改性。涂层可以是多层、多材料的,也可以是单层的,它们与基体构成多层结构;其功能有防腐蚀涂层、耐磨损涂层、热阻涂层及各种特种功能涂层^[1];其制备工艺繁多,包括电镀、热喷涂、等离子喷涂、激光熔覆等,涂层材料涵盖金属、非金属及其化合物、陶瓷等;其主要特点是基体与涂层的厚度相差大,材料的物理性能迥异。

3. 功能梯度材料结构

早期的功能梯度材料(functionally gradient materials, FGMs)是作为高热阻材料用以满足航天等高温极端工作环境的要求。随着多组分材料制备技术的日益发展,越来越多先进的功能梯度材料广泛应用于航空航天等工业装备和器件。作为一种功能复合材料,功能梯度材料表现为材料组分和性能变化,可设计出性能优越的内外表面或涂层,以满足复杂环境的需要。譬如金属-陶瓷功能梯度材料,即利用金属的高强度、高韧性以及陶瓷的抗高温、抗腐蚀的性能,其成形工艺多样化,许多工艺与前两种结构相同。

功能梯度材料的材料性能沿厚度变化,有的各层梯次变化(多层功能梯度结构),有的近似于连续变化(连续功能梯度结构)。前者自然分层,本质上就是多层结构,较易获得解析解;后者则因材料性能为坐标的连续函数,因此,一般情况下求闭合解几乎不可能,而为了求闭合解,绝大部分研究是假设材料性能为厚度坐标的特殊函数(多为指数)。为求解一般问题,可借鉴研究复合材料层合结构的经验,采用沿板厚分层,以多层层合板代替连续梯度功能板,将每层材料性能视为常数,当层数足够大时,近似解将收敛于精确解^[2]。将这种分层近似处理非均匀材料的方法用于本书连续功能梯度结构的热弹性分析,本书将统一多层功能梯度和连续功能梯度结构的热弹性分析方法。对于多层功能梯度结构,其解为精确解;对于连续功能梯度结构,层数人为选取,其解为近似解,当所取层数足够多时,近似解将收敛于精确解。分层近似方法方便地克服和简化了因

材料非均匀而带来的求解困难,因此,对非均匀材料结构的设计和分析将具有借鉴作用。

不论材料沿板厚是多层功能梯度还是连续功能梯度,均作为多层结构处理。对于前者,结构是自然分层;对于后者,将结构人为地分层,每层的材料性能取该层的中值,如第 i 层的弹性模量和热膨胀系数分别记为 E_i 和 α_i 。本书不再区分是多层功能梯度还是连续功能梯度结构,一律作为多层结构处理,以期建立统一的多层功能梯度和连续功能梯度结构热弹性分析方法,而且进行算例验证其合理性和精度。

综上所述,不论何种制备工艺,其工艺特点均为高温下的叠层(逐层)成形。本书将其统称为广义的“叠层制造”技术,进而形象地反映逐层制备的工艺共性和力学共性。因此,本书所有内容分析对象均为多层结构,各层可以有不同的材料和厚度。就几何形体而言,涉及多层梁、板、壳结构;就研究内容而言,有的结构在高温环境下的热弹性响应,有的结构高温制备后的热残余问题,本书将分章节予以讨论。

图 1.1 为一叠层板几何图形。层板由 n 层薄层叠层而成,板厚为 h 。为方便起见,取板的中面 Ω 为参考面($x-y$ 面), z 轴垂直于

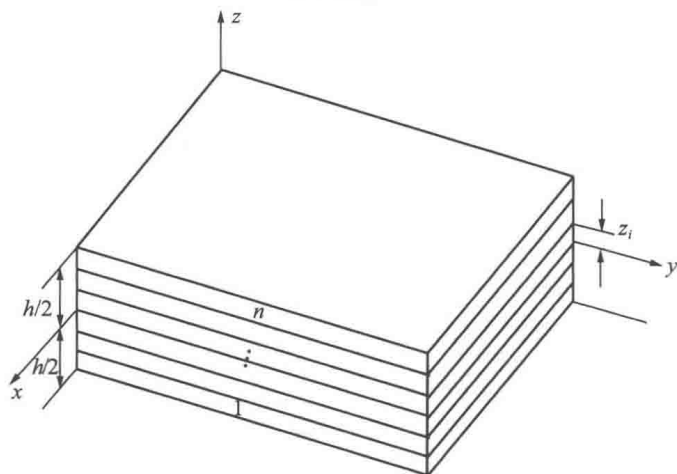


图 1.1 叠层板几何图形

板面。第 i 个材料界面的 z 坐标由 $z = z_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 表示, h_i 为第 i 层的厚度, $E_i, G_i, \nu_i, \alpha_i$ 分别为第 i 层材料的弹性模量、剪切模量、泊松比和热膨胀系数。

1.2 直角坐标系下的基本关系和基本方程

直角坐标系如图 1.1 所示。以 u, v, w 分别表示沿坐标 x, y, z 的位移。应力 σ 和应变 ϵ 各为 6 个, 以向量记为

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}]^T \quad (1.1)$$

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (1.2)$$

小变形时应变和位移满足以下关系:

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad \epsilon_y = v_{,y} \quad \epsilon_z = w_{,z} \quad (1.3)$$

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \quad \gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$$

本书约定: 字母下的逗号表示对坐标的求导, 如 $u_{,x}$ 表示位移 u 对坐标 x 的导数; 字母上方的点表示对时间的求导, 如 \dot{u} 表示位移 u 对时间 t 的导数。

由微元体的动力学关系可得到三维弹性体的运动微分方程

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + p_x &= \rho \ddot{u} \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + p_y &= \rho \ddot{v} \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + p_z &= \rho \ddot{w} \end{aligned} \quad (1.4)$$

式中, p_x, p_y 和 p_z 为单位体积上体力分量; ρ 为质量密度。

若式(1.4)等号右边取零, 则得三维弹性平衡方程

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + p_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + p_y &= 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + p_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

以 T 表示温度, 则热传导方程为

$$\rho c \dot{T} = (k_1 T_{,x})_{,x} + (k_2 T_{,y})_{,y} + (k_3 T_{,z})_{,z} + F(t, x, y, z) \quad (1.6)$$

式中, c, k 分别表示热容量、热传导系数; F 表示单位时间内单位体

积中所产生的热量。

本书讨论仅限于材料的线弹性范围,考虑叠层构件制作和使用时的温度变化,由此产生热应力问题,因此,考虑温度变化的线性应力-应变关系(物理方程)可以表示为

$$\{\sigma\} = [C](\{\epsilon\} - \{\epsilon_T\}) \quad (1.7)$$

或
$$\{\epsilon\} = [S]\{\sigma\} + \{\epsilon_T\} \quad (1.8)$$

材料的刚度系数矩阵 $[C]$ 或柔度系数矩阵 $[S]$ 是一个对称矩阵,最多涉及 21 个独立的材料常数,涉及工程上广泛使用的各向同性材料和正交各向异性材料。

因温差 ΔT 引起的热应变 $\{\epsilon_T\}$ 为

$$\{\epsilon_T\} = \{\alpha\}\Delta T \quad (1.9)$$

式中, $\Delta T = T - T_0$, T_0 为参考温度,不失一般性,通常可取零值。在分析叠层结构制备产生的热残余现象时, ΔT 为制备温度与室温的差值。

1) 各向同性材料

各向同性材料刚度系数矩阵 $[C]$ 仅涉及 2 个独立的材料系数,通常在弹性模量 E 、剪切模量 G 和泊松比 ν 中给定两个材料常数即可。其物理方程可以显式地表达为

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha\Delta T \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta T \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \quad (1.10)$$

或者

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \\
 \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z)] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \\
 \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \\
 \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = G\gamma_{yz} \\
 \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} = G\gamma_{xz} \\
 \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G\gamma_{xy}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

2) 正交各向异性材料

正交各向异性材料是指具有三个相互正交对称平面的材料。常见的有一些天然材料(如木材)、功能材料(如压电材料)或纤维增强复合材料,都具备这样的特征,材料的各向异性带来了比各向同性材料结构复杂得多的物理关系。正交各向异性材料刚度系数矩阵 $[C]$ 涉及9个独立的材料系数。当材料的主轴与坐标轴重合时,刚度系数矩阵 $[C]$ 为

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

刚度系数 C_{ij} 与材料的弹性模量、剪切模量和泊松比有关,9个独立的材料常数常取为 E_{11} 、 E_{22} 、 E_{33} 、 G_{12} 、 G_{13} 、 G_{23} 、 ν_{12} 、 ν_{13} 、 ν_{23} 。刚度系数 C_{ij} 与它们的关系为

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= VE_{11}(1 - \nu_{23}\nu_{32}); & C_{22} &= VE_{22}(1 - \nu_{13}\nu_{31}); \\
 C_{33} &= VE_{33}(1 - \nu_{12}\nu_{21}); & C_{44} &= G_{23}; \\
 C_{55} &= G_{13}; & C_{66} &= G_{12}; \\
 C_{12} &= VE_{11}(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) = VE_{22}(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}); & (1.13) \\
 C_{13} &= VE_{11}(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}) = VE_{33}(\nu_{13} + \nu_{23}\nu_{12}); \\
 C_{23} &= VE_{22}(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}) = VE_{33}(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}); \\
 V &= [1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}]^{-1}
 \end{aligned}$$

式中 6 个泊松比有下列关系

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}; \quad \frac{\nu_{13}}{E_{11}} = \frac{\nu_{31}}{E_{33}}; \quad \frac{\nu_{23}}{E_{22}} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}} \quad (1.14)$$

当材料的主轴与坐标轴重合时,热膨胀系数列阵 $\{\alpha\}$ 和热热传导系数列阵 $\{k\}$ 均有三个独立的系数,表示为

$$\begin{aligned}
 \{\alpha\} &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\
 \{k\} &= [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T
 \end{aligned} \quad (1.15)$$

若材料的自然弹性轴与坐标轴不重合,系数矩阵 $[C]$ 、 $\{\alpha\}$ 、 $\{k\}$ 需作坐标变换。设铺层绕其中某一材料主轴(如 z 轴)旋转 θ 角,变换后的系数矩阵 $[C']$ 、 $\{\alpha'\}$ 、 $\{k'\}$ 表示为

$$[C'] = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\{\alpha'\} = [\alpha'_1 \quad \alpha'_2 \quad \alpha'_3 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha'_6]^T$$

$$\{k'\} = [k'_1 \quad k'_2 \quad k'_3 \quad 0 \quad 0 \quad k'_6]^T$$

刚度系数的变换服从下列关系

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= m^4 C_{11} + 2m^2 n^2 C_{12} + n^4 C_{22} + 4m^2 n^2 C_{66} \\
C'_{12} &= m^2 n^2 C_{11} + (m^4 + n^4) C_{12} + m^2 n^2 C_{22} - 4m^2 n^2 C_{66} \\
C'_{13} &= m^2 C_{13} + n^2 C_{23} \\
C'_{16} &= -m^3 n C_{11} + mn(m^2 - n^2) C_{12} + mn^3 C_{22} + 2mn(m^2 - n^2) C_{66} \\
C'_{22} &= n^4 C_{11} + 2m^2 n^2 C_{12} + m^4 C_{22} + 4m^2 n^2 C_{66} \\
C'_{23} &= n^2 C_{13} + m^2 C_{23} \\
C'_{26} &= -mn^3 C_{11} + mn(n^2 - m^2) C_{12} + m^3 n C_{22} + 2mn(n^2 - m^2) C_{66} \\
C'_{33} &= C_{33} \\
C'_{36} &= -mn C_{13} + mn C_{23} \\
C'_{44} &= m^2 C_{44} + n^2 C_{55} \\
C'_{45} &= mn C_{44} - mn C_{55} \\
C'_{55} &= n^2 C_{44} + m^2 C_{55} \\
C'_{66} &= m^2 n^2 C_{11} - 2m^2 n^2 C_{12} + m^2 n^2 C_{22} + (m^2 - n^2)^2 C_{66}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

式中, $m = \cos \theta$; $n = \sin \theta$ 。

热膨胀系数 α_i 和热传导系数 k_i 的变换关系为

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &= \alpha_1 m^2 + \alpha_2 n^2 \\
\alpha'_2 &= \alpha_1 n^2 + \alpha_2 m^2 \\
\alpha'_3 &= \alpha_3 \\
\alpha'_6 &= (\alpha_1 - \alpha_2) mn \\
k'_1 &= k_1 m^2 + k_2 n^2 \\
k'_2 &= k_1 n^2 + k_2 m^2 \\
k'_3 &= k_3 \\
k'_6 &= (k_1 - k_2) mn
\end{aligned} \tag{1.18}$$

在大多数考虑板的弯曲的二维板壳理论中, 挠度沿厚度变化被忽略, 取 $\epsilon_z = 0$, 而 σ_z 相对其他应力很小也被忽略。在此情况下, 应

力-应变关系简化为

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} - \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{cases} \Delta T \quad (1.19)$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{cases}$$

或简写为

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [Q_1](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}) \\ \{\tau\} &= [Q_2]\{\gamma\} \end{aligned} \quad (1.20)$$

与式(1.7)比较,面内物理方程和横向物理方程被分开表达。 Q_{ij} 称为简化的刚度系数, $[Q_1]$ 和 $[Q_2]$ 分别称为面内刚度矩阵和横向剪切刚度矩阵。按下式计算:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= V'E_{11} \\ Q_{12} &= \nu_{12}V'E_{22} = \nu_{21}V'E_{11} \\ Q_{22} &= V'E_{22} \\ Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13} \\ Q_{66} &= G_{12} \\ V' &= [1 - \nu_{12}\nu_{21}]^{-1} \end{aligned} \quad (1.21)$$

若材料的自然弹性轴与坐标轴不重合,变换后的刚度系数矩阵 $[Q'_1]$ 和 $[Q'_2]$ 表示为

$$\begin{aligned} [Q'_1] &= \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \\ [Q'_2] &= \begin{bmatrix} Q'_{55} & Q'_{45} \\ Q'_{45} & Q'_{44} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.22)$$

刚度系数的变换服从下列关系