普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

上册

◎ 西南交通大学数学教研室　组编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

上册

西南交通大学数学教研室　组编

机械工业出版社

本书分为上、下两册，主要内容包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、空间解析几何、微分方程、级数和数学软件 Mathematica 的使用.

本书可作为高等院校工科学生和应用技术类学生的教材，也可作为其他学科学生学习“高等数学”的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/西南交通大学数学教研室组编. —北京：机械工业出版社，2013.6

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-42344-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①西… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 088766 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑：王玉鑫 责任编辑：李大国

责任校对：张 薇 封面设计：张 静

责任印制：乔 宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2013年7月第1版第1次印刷

184mm×260mm · 14.5印张 · 353千字

0001—3000册

标准书号：ISBN 978-7-111-42344-7

定价：29.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

“高等数学”是理工类和经济类学生必修的基础课程，也是现代科学技术和社会科学中应用最为广泛的一门学科．在现阶段，各高等院校采用的《高等数学》教材种类繁多、各有特色，但适应工科及应用技术类的并不多见，因此编写一本适合工科学生及应用技术类学科的《高等数学》教材是我们多年的愿望．

现在，我们集多年执教“高等数学”课程的实践经验，在参考国内外各优秀教材的基础上，共同努力，形成了此书．书中融入了我们在长期的教学和科研实践中所积累的心得和体会，以飨读者．

本书在结构体系、内容安排、习题选择等方面，努力体现应用技术型及工科教学的特点，本着“打好基础，够用为度，强调应用”的原则，把握内容的难易程度，注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养．在教材中，尽力做到引入基本概念自然、清晰，除学科中的基本定理外，其余理论证明淡化处理，强调应用．

为了适应现代化教学的需要和计算机发展的形势的要求，我们专门在下册附录中介绍了数学软件 Mathematica 的操作及其在“高等数学”课程中的应用，目的是使学生在掌握数学理论的同时，能够比较轻松地完成计算，这对学生以后的学习和工作都是非常有益的．

本书由张跃、曹思越教授主审，西南交通大学数学教研室全体老师编写，编委有徐昌贵、熊学、黄雪梅、张雁、张静、李宁娅、林红霞、卢鹏、何莎等．

本书虽经几次校对，但疏漏之处仍在所难免，尚祈读者不吝指正．

编　者

目　　录

第 1 章　函数的极限与连续

极限理论是微积分学的基础理论，函数则是其研究对象，微积分学所涉及的基本概念、理论、方法都是基于函数和极限而建立和展开的．本章介绍函数、极限和连续等基本概念以及它们的一些性质．

1.1　函数

1.1.1　邻域及其表示法

在高等数学中经常要用到两种特殊的数集——区间和邻域．在中学数学中，我们已经学习了区间的有关知识，下面只介绍邻域的概念．

设 $a\in\mathbf{R}$，以点 a 为中心的一个开区间称为点 a 的一个邻域，记为 $U(a)$．设 $\delta\in\mathbf{R}$，且 $\delta>0$，开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为**点 a 的 δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$，δ 称为邻域的半径（图 1-1）．在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a 所成的数集称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$．如 $U\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，$\mathring{U}\left(0,\dfrac{1}{5}\right)=\left(-\dfrac{1}{5},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{5}\right)$．两个邻域的中心分别是 -2 和 0，邻域半径分别是 $\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{5}$．邻域还可以表示为 $U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$，$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$．

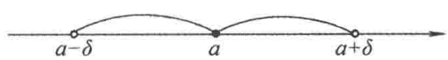


图 1-1

1.1.2　函数的概念

我们在观察各种自然现象、研究某些实际问题或从事生产的过程中，总会遇到两种量：一种是在过程进行中不断变化的量，即变量，如每天的气温、植物的生长等；一种是在过程进行中保持不变的量，即常量，如土地面积、直线长度等．

高等数学是以变量为基本研究对象，主要研究变量与变量间的关系，即函数．

定义 1　设 D 是给定的一个非空数集，若有两个变量 x，y，当变量 x 在 D 中取某个特定值时，变量 y 依确定的关系 f 也有一个确定的值，则称 y 是 x 的函数，f 称为 D 上的一个函数关系，记为 $y=f(x)$．x 称为**自变量**，y 称为**因变量**．当 x 取遍 D 中各数，对应的 y 构成一数集 R，D 称为函数的**定义域**，R 称为函数的**值域**．

在有些情况下，函数关系是用算式表达的，通常约定函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，而不必再用"$x\in D$"的形式指出函数的定义域．

例如，$y=\sin x$ 表示定义域为$(-\infty,+\infty)$的正弦函数；$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$表示定义域为$(-\infty,1)$的一个函数.

例 1 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0,\\ -1 & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图像如图 1-2 所示.

对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

例 2 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$. 例如，$\left[\dfrac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$. 将 x 看做自变量，则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 它的图像如图 1-3 所示，该图像为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图像发生跳跃，跃度为 1. 此函数称为**取整函数**.

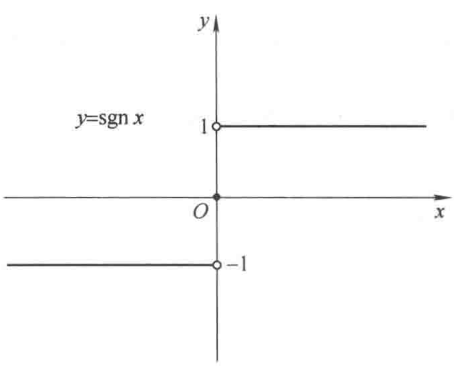


图 1-2

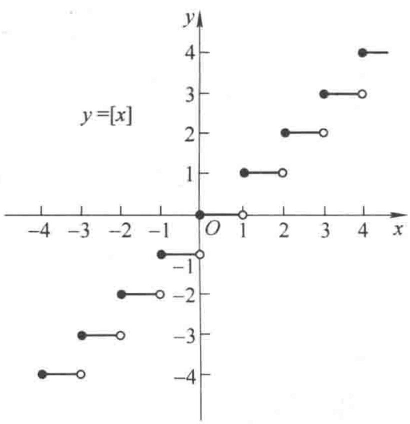


图 1-3

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 应是唯一的. 但有些时候按给定的对应法则，对每个 $x\in D$，有不只一个确定的 y 与之对应，这样的对应法则并不符合函数的定义. 习惯上，我们称这种法则确定了一个**多值函数**. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=1$ 给出. 显然，当 x 取$(-1,1)$内任一个值时，由方程 $x^2+y^2=1$ 可确定两个 y 与之对应. 所以这个方程确定了一个多值函数. 对于多值函数，如果附加一些条件，使得在附加条件下，按照这个对应法则，对于每个 $x\in D$，总有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这样得到的函数为多值函数的单值分支，也可称为**单值函数**. 例如，在由方程 $x^2+y^2=1$ 给出的对应法则中，附加“$y\leqslant 0$”的条件，即以“$x^2+y^2=1$ 且 $y\leqslant 0$”作为对应法则，就可得到一个单值函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

应该指出的是，函数反映的是自变量与因变量之间的确定的映射关系，这种关系与自变量采用什么符号表示是无关的．例如，若 $f(x)=x^2+x+1$，则显然有 $f(t)=t^2+t+1$.

例 3　设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(-\frac{1}{x}\right)=\sin x$，其中 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　令 $t=-\frac{1}{x}$，则 $af\left(-\frac{1}{t}\right)+bf(t)=-\sin\frac{1}{t}$，亦可写成：$bf(x)+af\left(-\frac{1}{x}\right)=-\sin\frac{1}{x}$，联立两方程

$$\begin{cases} af(x)+bf\left(-\frac{1}{x}\right)=\sin x \\ bf(x)+af\left(-\frac{1}{x}\right)=-\sin\frac{1}{x} \end{cases}$$

求解得
$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(a\sin x+b\sin\frac{1}{x}\right).$$

为了今后叙述的方便，本书采用数学中一些常用记号．记号“$P\Leftrightarrow Q$”表示命题 P 的充要条件是 Q；记号“$\forall$”表示“任意的”或“所有的”；记号“$\exists$”表示“存在”.

1.1.3　函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，若对任意的 x_1、$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内为一单调增加（或减少）的函数.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

从函数图形上看，在区间 I 上单调增加（或单调减少）的函数图像在区间 I 内从左至右总是上升的（或下降的）.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域是关于原点对称的区间 I，若对 $\forall x\in I$，$f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$）恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**偶（或奇）函数**.

奇函数的图像关于原点对称．偶函数的图像关于 y 轴对称.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为区间 I，若 $\exists l>0$，使得对 $\forall x\in I$，有 $(x\pm l)\in I$，且 $f(x\pm l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的周期.

4. 函数的有界性

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的函数值总介于 -1 与 1 之间，即有

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

它们的图像限定在 $y=-1$ 和 $y=1$ 这两条直线之间．而有些函数的图像却不能限定在与 x 轴平行的两条直线之间．为区分函数的这两种性态，我们给出下面的定义.

定义 2　设 I 为某一区间，若 $\exists M>0$，使得对 $\forall x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**有界**．否则，称 $f(x)$ 在区间 I 内**无界**.

这时也称 M 为其上界，$-M$ 为其下界．需注意的是，上、下界若存在是不唯一的，例如 $M+1$ 也是它的一个上界，$-M-1$ 也是它的一个下界．根据上、下界的含义易得下面的

结论：

$$f(x)\text{在区间}I\text{上有界}\Leftrightarrow f(x)\text{在区间}I\text{上既有上界也有下界}.$$

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，可取 $M=1$；$y=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，可取 $M=\frac{\pi}{2}$；$y=\frac{1}{x}$在其定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内无界.

函数是否有界不仅与函数有关，还与自变量的取值范围有关.

例 4 设$f(x)=\frac{1}{x}$，证明：(1)$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界$(a>0)$；(2)$f(x)$在$(0,+\infty)$内无界.

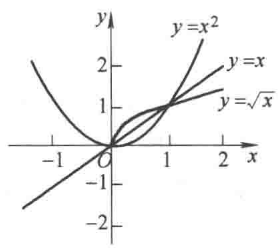
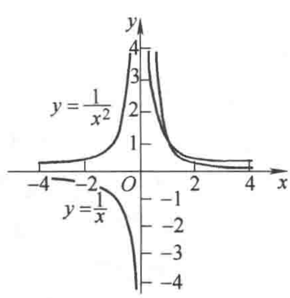
证 (1) 对任意 $x\in[a,+\infty)$，因为 $a\leqslant x$，所以$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{a}$，即$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

(2) 对任一正数 M，当$0<x<\frac{1}{M}$时，有$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|>M$，所以$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无界.

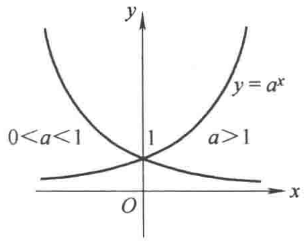
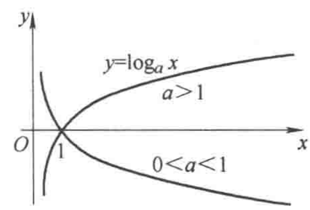
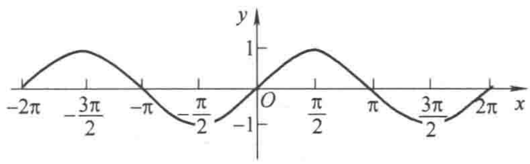
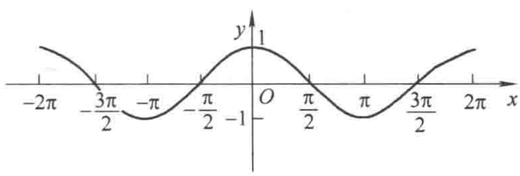
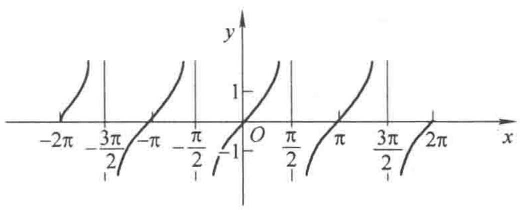
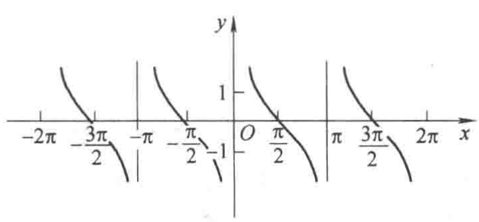
1.1.4 基本初等函数

中学学过的五类函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为**基本初等函数**. 为了便于复习，我们将五类基本初等函数的表达式、图像和简单性质列表，见表 1-1.

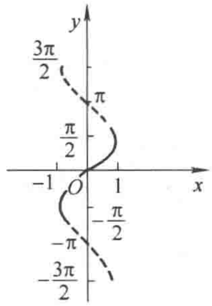
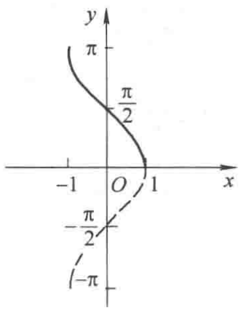
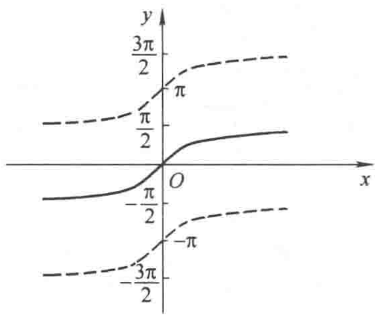
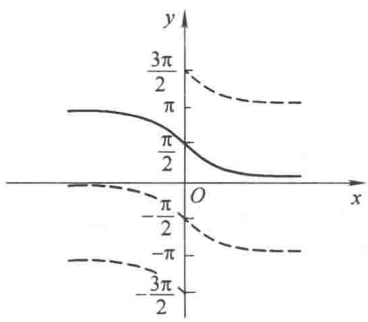
表 1-1 基本初等函数的表达式、图像和简单性质

名称	表达式	图 像	简 单 性 质
幂函数	$y=x^{\alpha}$ $(\alpha>0)$		若 α 为正数，则函数在$(0,+\infty)$内单调增加，且图像都过$(1,1)$点；若 α 为偶数，函数为偶函数；若 α 为奇数，函数为奇函数
	$y=x^{\alpha}$ $(\alpha<0)$		若 α 为负数，则函数在 $x=0$ 处断开，在$(0,+\infty)$内单调减少

（续）

名称	表达式	图　像	简单性质
指数函数	$y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$		图像都过$(0,1)$点．若$a>1$，则函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加；若$0<a<1$，则函数在$(-\infty,+\infty)$内单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$		图像都过$(1,0)$点．若$a>1$，则函数在$(0,+\infty)$内单调增加；若$0<a<1$，则函数在$(0,+\infty)$内单调减少
三角函数	$y=\sin x$		以2π为周期的周期函数，奇函数，有界
	$y=\cos x$		以2π为周期的周期函数，偶函数，有界
	$y=\tan x$		以π为周期的周期函数，奇函数，无界，在$x=\frac{2k-1}{2}\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$处无定义
	$y=\cot x$		以π为周期的周期函数，奇函数，无界，在$x=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$处无定义

（续）

名称	表达式	图　像	简单性质
反三角函数	$y=\arcsin x$		主值 $y=\arcsin x$ $\left(-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，函数在$[-1,1]$上单调增加
	$y=\arccos x$		主值 $y=\arccos x$（$-1\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant\pi$），函数在$[-1,1]$上单调减少
	$y=\arctan x$		主值 $y=\arctan x\left(-\infty<x<+\infty,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$，函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加
	$y=\operatorname{arccot} x$		主值 $y=\operatorname{arccot} x$（$-\infty<x<+\infty$，$0<y<\pi$），函数在$(-\infty,+\infty)$内单调减少

1.1.5 反函数

在一个函数关系中，将哪个变量看成自变量、哪个变量看成因变量是人为认定的. 例如，在 $y=f(x)$ 中，是将 x 作为自变量，用含有 x 的代数式来表达 y. 如果将 $y=f(x)$ 恒等变形为 $x=\varphi(y)$，用含有 y 的代数式来表达 x，将 y 作为自变量，x 看成是自变量 y 的函数，则

称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的**反函数**. 当然这要求 $y=f(x)$ 在定义区间 I_x 上是单调的，只有这样才能在其值域 I_y 上定义其反函数 $x=\varphi(y)$.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是非单调的，将函数变形为 $x=\pm\sqrt{y}$，当 $y\in(0,+\infty)$ 时，对应的 x 有两个值，不能定义其反函数. 但对 $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$，函数在定义域上是单调增加的，可在其值域 $[0,+\infty)$ 上定义其反函数 $x=\sqrt{y}$，此函数在 $[0,+\infty)$ 上也是单调增加的.

从以上讨论可知，$y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 在 xOy 平面内是同一条曲线，只是表示自变量与因变量的数轴不同. 由于人们习惯上总是用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以用 $y=\varphi(x)$ 替代 $x=\varphi(y)$，仍称 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $y=f^{-1}(x)$. 事实上，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

若定义在 I_1 上的函数 $y=f(x)$ 是单调增加(或减少)的，其值域为 I_2，则它一定具有反函数，且它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 I_2 上也是单调增加(或减少)的.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像有什么样的关系呢?

若 (x_0,y_0) 是曲线 $y=f(x)$ 上一点，那么 (x_0,y_0) 也是曲线 $x=\varphi(y)$ 上一点，而当用 $y=\varphi(x)$ 替代 $x=\varphi(y)$ 时，(y_0,x_0) 便是曲线 $y=\varphi(x)$ 上一点，也即是 $y=f^{-1}(x)$ 上一点. 可知曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=f^{-1}(x)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的.

例5　求 $y=\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 的反函数.

解　因为 $y=\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上是单调减少的函数，所以其反函数存在. 由 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$，当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$\pi-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，故 $\pi-x=\arcsin y$，$y\in[0,1]$，所以所求反函数为 $y=\pi-\arcsin x$，$x\in[0,1]$.

例6　求 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解　$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，先讨论它的单调性.

设 x_1，$x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，$y_1=\dfrac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}$，$y_2=\dfrac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2}$，

$$y_1-y_2=\frac{1}{2}(e^{x_1}-e^{x_2})+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{x_2}-\left(\frac{1}{e}\right)^{x_1}\right],$$

因为 $e>1$，由指数函数的性质可得

$$e^{x_1}-e^{x_2}>0,\ \left(\frac{1}{e}\right)^{x_2}-\left(\frac{1}{e}\right)^{x_1}>0,$$

所以，$y_1-y_2>0$，可知 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

下面求 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

由 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$，又由于 $e^x>0$，故 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$，即 $x=\ln(y+$

$\sqrt{y^2+1}$)，所以所求反函数为

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),\ y\in(-\infty,+\infty),$$

或记为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ x\in(-\infty,+\infty)$$

1.1.6 复合函数

在实际问题中，我们遇到的许多函数都是由五类基本初等函数和常值函数经过有限次的四则运算和“叠置”后构成的. 如函数 $y=\ln(x^2+1)$ 可看成是由两个函数 $y=\ln u$，$u=x^2+1$“叠置”而构成的. 通常称两个函数的这种“叠置”为两个函数的“复合”，所构成的函数称为**复合函数**. 在复合函数 $y=\ln(x^2+1)$ 中，变量 u 在 $y=\ln u$ 中是自变量，在 $u=x^2+1$ 中是因变量，称具有这种“双重身份”的变量 u 为**中间变量**，x 是(最终)自变量，y 是(最终)因变量.

一般地，设有函数 $y=f(u)$，$u\in D_1$ 和函数 $u=\varphi(x)$，$x\in D_2$，则 $y=f[\varphi(x)]$ 是关于 x 的函数，称此函数是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，称 u 为中间变量. $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $D=\{x\mid x\in D_2 且 \varphi(x)\in D_1\}$. 一般地，$D$ 是 D_2 的子集，D 的元素是使 $\varphi(x)\in D_1$ 的全体实数.

注意，并不是任意两个函数都可以构成复合函数的. 若设 $u=\varphi(x)$ 的值域为 E，必须有 $D_1\cap E\neq\varnothing$ 时才能复合. 例如，$y=\ln u$，$u=\sin x-2$，$D_1=(0,+\infty)$，$E=[-3,-1]$，$D_1\cap E=\varnothing$，这两个函数不能构成复合函数，即表达式 $y=\ln(\sin x-2)$ 不表示函数.

另外，两个以上的函数也可以构成一个复合函数.

例 7 指出函数 $y=\mathrm{e}^{\sin^2 x}$ 的复合函数关系.

解 $y=\mathrm{e}^{\sin^2 x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成的.

由上例可知，在分析一个函数的复合关系时，我们往往从“外层”函数开始逐层分解，一般地，分解过程中各中间变量通常是基本初等函数或是它们经过有限次四则运算后所成的函数.

1.1.7 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤而构成的并只可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\sqrt[3]{x-1}$，$y=\cos^4 x$，$y=\arctan^2 x$ 等都是初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

应用上常遇到以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 所产生的**双曲函数**以及它们的反函数——**反双曲函数**. 它们定义如下：

双曲正弦 $\operatorname{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，图像通过原点且关于原点对称，在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的(图 1-4).

双曲余弦 $\operatorname{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，是偶函数，图像通过点(0,1)且

关于 y 轴对称. 在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的. $\mathrm{ch}0=1$ 是这个函数的最小值(图 1-4).

双曲正切　$\mathrm{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是奇函数，图像通过原点且关于原点对称，在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的(图 1-5).

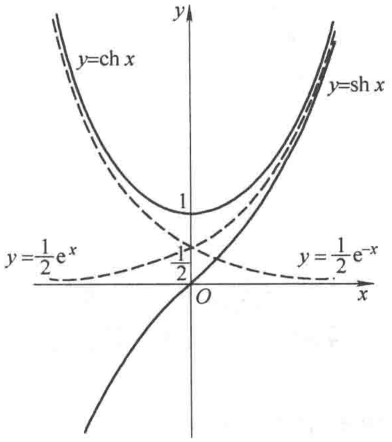


图 1-4

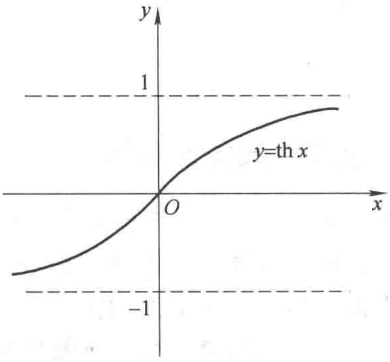


图 1-5

根据双曲函数的定义，可证下列四个公式：(读者自行证明)

$$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}y\,\mathrm{ch}x \tag{1}$$

$$\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y-\mathrm{sh}y\,\mathrm{ch}x \tag{2}$$

$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y \tag{3}$$

$$\mathrm{ch}(x-y)=\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y-\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y \tag{4}$$

由上述公式还可导出其他一些公式，例如：在公式(1)中令 $y=x$，得

$$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x \tag{5}$$

在公式(3)中令 $y=x$，得

$$\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x \tag{6}$$

在公式(4)中令 $y=x$，并注意到 $\mathrm{ch}0=1$，得

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1 \tag{7}$$

双曲函数 $y=\mathrm{sh}x$，$y=\mathrm{ch}x\,(x\geqslant0)$，$y=\mathrm{th}x$ 的反函数依次记为

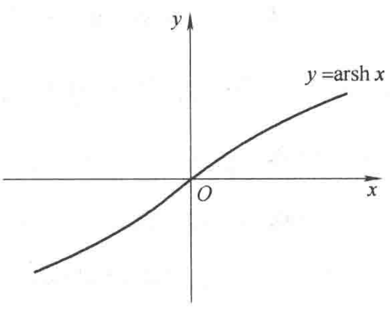


图 1-6

反双曲正弦　$\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是奇函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的(图 1-6).

反双曲余弦　$\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，定义域为 $[1,+\infty)$，在 $[1,+\infty)$ 上是单调增加的(图 1-7).

反双曲正切　$\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，定义域为 $(-1,1)$，是奇函数，在 $(-1,1)$ 内是单调增加的(图 1-8).

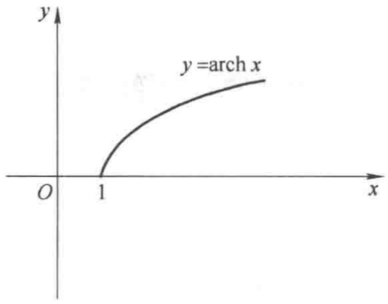


图 1-7

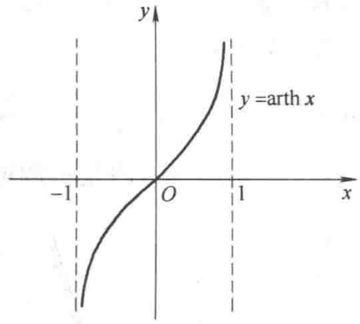


图 1-8

1.1.8 建立函数关系举例

例 8 根据中华人民共和国个人所得税法规定：个人工资、薪金所得应纳个人所得税. 应纳税所得额的计算为：工资、薪金所得，以每月收入额减除费用 3500 元后的余额，为应纳税所得额. 最后列出下面的税率表，见表 1-2.

表 1-2 个人所得税率表(工资、薪金所得,适用 0 到 12500 元部分)

级数	含税级距	税率(%)	说　明
1	不超过 1500 元的	3	本表含税级距指以每月收入额减除费用 3500 元后的余额，即现行的个人所得税的起征点是 3500 元
2	超过 1500 元至 4500 元的部分	10	
3	超过 4500 元至 9000 元的部分	20	

若某人的月工资、薪金所得为 $x(\leqslant 12500)$ 元，请列出他应缴纳的税款 y 与其工资、薪金所得 x 之间的关系.

解 按税法规定当 $x\leqslant 3500$ 时，不必缴税，这时 $y=0$；

当 $3500<x\leqslant 5000$ 时，纳税部分是 $x-3500$，税率为 3%，这时 $y=\frac{3}{100}(x-3500)$；当 $5000<x\leqslant 8000$ 时，其中 3500 元不用纳税，1500 元应纳 3% 的税，即 $1500\times\frac{3}{100}$元 $=45$ 元，再多的部分，即 $x-5000$ 按 10% 纳税，这时 $y=45+\frac{10}{100}(x-5000)$；

当 $8000<x\leqslant 12500$ 时，其中 3500 元不用纳税，1500 元应纳 3% 的税，即 45 元，3000 元应纳 10% 的税，即 $3000\times\frac{10}{100}$元 $=300$ 元，再多的部分，即 $x-8000$ 按 20% 纳税，这时 $y=45+300+\frac{20}{100}(x-8000)$. 于是有下面的函数关系：

$$y=\begin{cases} 0 & x\leqslant 3500 \\ \frac{3}{100}(x-3500) & 3500<x\leqslant 5000 \\ 45+\frac{10}{100}(x-5000) & 5000<x\leqslant 8000 \\ 345+\frac{20}{100}(x-8000) & 8000<x\leqslant 12500 \end{cases}$$

例 9　倒圆锥形蓄水器(图 1-9)，口径与深度都是 10m，如果以 $6\text{m}^3/\text{min}$ 的速度往容器里注水，求容器水深与时间的函数关系.

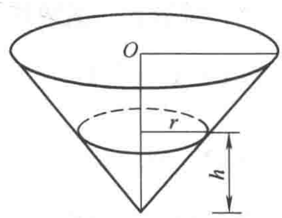


图 1-9

解　设 t 分钟时容器内水深为 h，水面半径为 r. 由几何关系，t 时刻容器内水的体积 V 为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

已知 t 时刻注入水为 $6t$，又圆锥口径与深度相等，故 $r=\frac{h}{2}$，于是有

$$6t=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h \quad 即 \quad h=\sqrt[3]{\frac{72t}{\pi}}$$

此为水深 h 与时间 t 的函数关系.

容器注满水所需时间 T 为

$$6T=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{10}{2}\right)^2\times 10$$

所以

$$T=\frac{125}{9}\pi$$

故所求函数的定义域为

$$0\leqslant t\leqslant\frac{125}{9}\pi$$

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　(3) $y=\ln(3x+1)$；

(4) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；　(5) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$；　(6) $y=\arctan(x+1)$.

2. 求下列各函数的定义域，并表示在数轴上.

(1) $F(x)=\log_2(\log_2 x)$；　(2) $g(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$ $(a>0,a\neq 1)$.

3. 下列各题中的两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=\frac{x^2-1}{x+1}$，$y=x-1$；　(2) $y=\sqrt{x^2}$，$y=x$；

(3) $y=3^{2x}$，$y=9^x$；　(4) $y=\lg x^2$，$y=2\lg x$.

4. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=(0,1)$，求：(1) $f(\sin 2x)$；(2) $f(x+a)+f(x-a)$，$(a>0)$ 的定义域.

5. 求下列函数所指定的函数值：

(1) $f(x)=x^3-1$，求 $f(1)$，$f(\sqrt[3]{2})$，$f(x_0+1)$；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，求 $f(-\pi)$，$f(0)$，$f(1)$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.