

高维数据的 流形学习分析方法

李波 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高维数据的 流形学习分析方法

李波 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高维数据的流形学习分析方法/李波著. —武汉: 武汉大学出版社, 2016. 5

ISBN 978-7-307-17839-7

I. 高… II. 李… III. 流形分析 IV. O192

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 103601 号

责任编辑:王智梅

责任校对:汪欣怡

版式设计:马 佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: cbs22@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷:虎彩印艺股份有限公司

开本: 720 × 1000 1/16 印张: 14.25 字数: 287 千字 插页: 2

版次: 2016 年 5 月第 1 版 2016 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-17839-7 定价: 36.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。



李波，男，武汉科技大学副教授，中国科学院自动化研究所博士后，国际INNS协会会员。主要从事模式识别、机器学习和大数据分析等方面的研究，是多个国际SCI期刊的审稿人，担任多个国际会议的PC member。目前已经发表30多篇SCI/EI检索论文，申请和授权发明专利多项。

前 言

流形学习作为近十年来发展起来的一种维数约减方法，融合了计算机科学、数学、智能科学和认知科学等相关知识，已经成为当前机器学习研究的一个重点和热点领域。随着科学技术的发展，当前采集的数据以几何级数形式增长，进入大数据发展时代，迫切需要通过机器学习方法从海量高维数据中去探索和挖掘蕴含在其中的规律。流形学习方法的出现，为探索海量高维数据提供了一种可能。流形学习方法通过对高维数据的局部几何结构学习，获得高维数据在低维空间的投影结果。因此，流形学习可以应用于高维数据的可视化。流形学习通过维数约减，也可以实现高维数据的分类判别特征的提取，从而为高维数据的模式分类提供支撑。同时，通过流形学习进行维数约减，也有利于降低高维数据模式分类的计算复杂度，提高模式分类的效率。因此，流形学习方法无论是在高维数据可视化，还是在高维数据的模式分类方面都具有重要的意义。本书结合流形学习自身的特点，介绍了多种基于流形学习的高维数据分析方法，包含理论、方法、步骤、实验结果与分析，以及多种方法的结果比较，同时采用各种标准数据集进行仿真实验验证，并以图形和表格的形式给出大量的实验结果，很多方法具有通用性。作者从 2005 年以来一直从事基于流形学习的维数约减方法研究，本书大部分内容是作者前期研究积累的研究成果，凝聚了作者十年的心血和才智。与同类书相比，本书大部分章节的内容都是作者已经发表的论文的归类和整理，且理论与方法相结合，循序渐进，图文并茂，通俗易懂。因此，本书特别适合机器学习和模式识别领域的高年级本科生、研究生以及科技工作者参考。

全书在编写过程中得到了智能信息处理、机器学习团队和相关人员的大力支持。另外，李俊博士对本书第 7 章的部分内容进行了编著，硕士研究生胡洋、杜静、雷蕾、王运庆、雷晓辉、廖四洋、张华锋、范章涛、郑萍萍、李炜和邹丰明对全书进行了校对和整理。另外，笔者与曹莲莲、张进、熊娟、何紫若、汪冲、罗阳坤、廖雄鹰、黄育、王平、闵婕、蒋川、张文平等同学进行的讨论，也为本书的撰写提供了思路，在此一并致谢。

在本书的编著过程中，笔者也参考了国内外有关研究成果，在此对所涉及的专家和研究人员表示衷心的感谢。武汉大学出版社的编辑也为本书的出版付出了大量的心血，在此一并致谢。此外，本书的出版得到了国家自然科学基金项目(编号：

61273303, 61572381)的支持,在此也表示感谢!

经过多年的研究,我们发现基于流形学习的维数约减方法发展迅速、应用日趋广泛。但是在流形学习研究领域,需要解决的问题仍有很多,我们在本书中的工作仅仅是流形学习方法中的一小部分。希望本书的出版,能够起到抛砖引玉的作用,给读者带来启迪,并成为我们继续研究的新起点。由于作者水平有限,书中一定存在某些错误和不足之处,敬请广大专家和读者批评指正。

李 波

2016年2月27日

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 流形学习的研究背景及发展	1
1.2 流形学习方法应用高维数据原因探析	5
1.3 流形学习方法的应用	6
1.4 本书内容安排	11
第 2 章 经典流形学习方法	14
2.1 引言	14
2.2 流形学习的有关数学定义	14
2.3 流形学习方法的分类	16
2.4 经典流形学习方法	18
2.5 本章小结	35
第 3 章 面向分类的流形学习方法缺陷分析	36
3.1 本征维数估计	36
3.2 数据采样问题	40
3.3 近邻点的选择	41
3.4 噪声流形学习	43
3.5 样本外点(Out-of-Sample)学习	44
3.6 监督(半监督)流形学习	47
3.7 多流形学习	48
3.8 小样本(Small Sample Size, SSS)问题	48
3.9 本章小结	50
第 4 章 基于 ISOMAP 的鲁棒流形学习方法	51
4.1 噪声对流形学习的影响	51
4.2 流形学习中的噪声处理	55
4.3 基于 ISOMAP 的噪声流形学习算法	55

4.4	实验	60
4.5	本章小结	64
第 5 章	判别图拉普拉斯谱嵌入方法	65
5.1	引言	65
5.2	基于图拉普拉斯特征谱嵌入的常用方法	67
5.3	正交判别分析方法(ODP)	68
5.4	特征空间距离度量学习的判别图嵌入(FSDML)	78
5.5	本章小结	85
第 6 章	局部线性判别嵌入方法	87
6.1	引言	87
6.2	局部线性判别嵌入	91
6.3	实验结果	98
6.4	LLDE 算法结论	108
6.5	本章小结	110
第 7 章	多流形相似度度量学习方法	111
7.1	引言	111
7.2	最大差异伸展算法分析	114
7.3	约束最大差异映射(CMVM)	118
7.4	最大差异稀疏映射方法(MVSM)	129
7.5	非参判别多流形学习方法(NDML)	136
7.6	本章小结	143
第 8 章	多流形间距度量学习方法	145
8.1	引言	145
8.2	最大间距标准(MMC)算法	148
8.3	最大非参类间距投影(MNMP)	150
8.4	局部线性表示的流形间距(LLRMM)	158
8.5	约束判别近邻嵌入方法(CDNE)	169
8.6	本章小结	178
第 9 章	基于广义 Fisher 的维数约减框架方法	180
9.1	引言	180

9.2 流形学习相关框架	183
9.3 广义 Fisher 框架算法	187
9.4 LDA、PCA、ISOMAP、LLE、LPP、UDP、MVU 和 GFF 关系	191
9.5 实验	196
9.6 本章小结	201
 第 10 章 流形学习未来研究展望	 202
 参考文献	 205

第1章 绪 论

1.1 流形学习的研究背景及发展

随着信息技术的飞速发展，人们从国民经济各行业所获得的数据正在以指数级的形式快速增长，其中大量不确定性数据和海量模糊数据体现了高维小样本的特点。例如，在计算机视觉、图像分析、网络数据检索、基因微阵列数据分析、生物特征识别以及视频检索中获取的数据都具有高维的特点。目前人们对这些高维数据的处理还没有一种通用有效的方法，在处理这些数据时，传统的数据分析方法往往收效不大，甚至没有效果，蕴含在数据中的信息或规律无法被探索和理解，导致“数据资源”变成“数据灾难”。然而，信息技术的发展又迫切需要去探索和揭示存在于这些数据之间的奥秘。因而，如何有效地从高维数据中获取信息或规律，已经成为当今信息科学与技术所面临的基本问题。将现代计算机的高性能与人的高智能相结合是处理这些数据最有希望的选择，也是处理高维数据最有效、最核心的技术与途径，其中数据挖掘和机器学习已经被证明是行之有效的数据分析和处理方法。在数据挖掘和机器学习的许多应用领域如模式识别和生物信息学，常常需要对这些数据建立一个分类器模型和学习算法，成功探索和挖掘存在于高维数据中一些未知的规律。计算机对高维数据进行处理和识别过程通常包含以下四个方面：

(1) 信息获取

通过传感器或其他的信息获取装置采集语音、图像、字符、视频、基因和蛋白质等原始数据。

(2) 数据预处理

对上一步获得的原始数据进行一些必要的处理，从中获得需要的数据。例如，原始收集的数据在收集过程中由于气候、温度和人工因素等影响往往伴随着很多噪声，由于这些噪声的干扰，原始数据不能被正确地认识。另外，通过数据获取装置获得的数据也可能包含着一些无用的信息，比如对植物叶片进行识别过程中所获得的叶片图像可能存在于很复杂的背景中，从这些复杂背景中分割出叶片图像或者去掉与叶片识别无关的背景图像也是一个必需的数据预处理过程。

(3)数据的特征提取与选择

在一个比较完善的模式识别系统中，特征提取与选择技术是一个重要环节，处于对象数据采集和分类识别两个环节之间，特征提取与选择方法的优劣极大地影响着分类器的性能，它是模式识别的核心问题之一。特征提取与选择的基本任务是研究如何从众多特征中挖掘出那些对分类识别最有效的特征，从而实现特征空间维数的压缩。数据的特征提取常常是通过维数约减实现的，在满足某种约束条件的基础上，实现目标优化，通过相应的变换将高维数据映射到低维空间中，获得所需要的特征。

(4)分类器设计和分类决策

模式识别的目的就是通过已知数据的相关信息来建立一种分类器模型和分类决策学习算法，并且能够利用这种模型和学习算法，有效地探索存在于数据中的未知规律，实现样本数据的正确分类。

图 1-1 是数据处理和模式识别的流程图。在模式识别的整个过程中，特征提取或维数约减和分类器设计是模式识别研究的重点。多年来，通过数学、信息学和计算机科学等领域有关专家学者的不懈努力，模式识别研究特别是对数据的特征提取或维数约简研究已经取得很大的进展，提出了很多特征提取方法。依据是否利用了样本的类别信息，这些方法可划分为有监督(或称为外监督)和无监督两种类型的特征抽取方法。近年来，有些特征提取方法中只是部分数据用到样本的类别信息，因此半监督特征提取方法也越来越受到人们的关注。根据特征提取方法的变换方式是否是线性的，这些方法也可以分为线性和非线性的。表 1-1 是一些常用特征提取方法的分类。

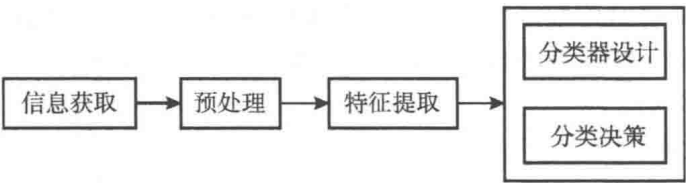


图 1-1 数据模式识别的流程图

长期以来，线性模型的研究一直是机器学习发展的主流方向。基于数据是全局线性分布的假设，传统线性模型中各观测变量是相互独立的，因此欧几里得距离(欧氏距离)常常被用来作为一种相似性度量。以这种假设为基础的众多线性方法，例如线性判别分析(Linear Dicriminant Analysis, LDA)和主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)等在很多应用领域都取得了较好的应用效果。

表 1-1 常用特征提取方法分类

	线性方法	非线性方法		
		基于循环迭代	基于特征分解	
			基于核	流形学习
监督学习方法	LDA MMC		KLDA	
无监督学习方法	PCA ICA MDS PLS	Perceptron MLP Hopfield network SOM BM Auto-encoder NN	KPCA MVU	ISOMAP Diff. Maps MVU Manifold Charting LLE LE LTSA RML

对于全局线性数据，线性特征提取方法已经被证明是有效的。然而在现实生活和实际应用中，很多数据并不完全是全局线性的。在数据的采样过程中，人们常常发现，现实世界的一些模式往往服从一定形式的非线性分布规律。这些分布规律使数据之间互相影响、互相制约，即使是同一种模式的数据，在不同外界环境作用下，也可能表现出多种形态。例如，同一个人的不同人脸图像可以由，光照、姿态和表情等关键因素决定，这些关键因素中的每一种发生变化时都会引起人脸图像中的像素发生变化，而且这些关键因素同时变化所引起的像素的共同变化，也不是由每一种关键因素变化所引起的像素变化的简单线性叠加，也就是说，光照、姿态和表情条件变化下的人脸数据是高度非线性的。从几何角度来看，这样的人脸图像数据是位于一个嵌入高维空间的低维流形上的。在现实世界中，除了人脸数据，还存在大量的服从低维流形分布的数据，包括手写体数字、植物叶片图像、步态以及手势变化等图像，这些数据常常具有内在低维流形结构。然而，传统线性维数约减方法并不能有效地探索存在于非线性数据中的内在规律。因此，对于大量的非线性分布数据，需要建立非线性学习模型，发展非线性维数约减方法，探索蕴含在数据中的非线性分布规律。

为了研究大量的非线性分布数据，很多研究者提出了许多非线性维数约减方法。这些方法按照其计算方式的不同，可分为基于循环迭代求解和基于特征值分解的方法。其中人工神经网络(Neural Network，NN)方法为非线性数据的处理提供了一种基于循环迭代求解的途径，其代表性的算法是自组织映射方法(Self-Organizing

Mapping, SOM)。人工神经网络方法的特点是输入信号能够通过神经网络映射到低维空间,在低维空间中仍然保持高维空间数据点之间的近邻关系。另一种通过循环迭代来求解的代表性非线性维数约减方法是主曲线方法(Principal Curves, PC),该方法本质是线性主成分方法的非线性扩展。近年来,随着深度学习的发展,一批基于深度学习的神经网络模型逐渐建立起来。其中典型深度神经网络模型包括 Auto-encoder 神经网络模型,深度信念网络模型和文本深度表示模型等。但是无论传统的神经网络模型还是基于深度学习的神经网络模型,都是通过不断地循环迭代来求解最优值。这些方法能够比较有效地解决非线性数据的处理需求,但是由于它们毫无例外地采用循环迭代的思想,不可避免地产生下列缺陷:一是使得在循环求优的过程中容易产生局部极值而不是全局极值;二是不断进行的循环迭代容易产生积累误差;三是求解过程需要付出昂贵的计算代价,特别是在训练样本集很大的情况下。

目前,一些基于特征值或广义特征值分解的方法已经被有效地应用到数据处理过程中,其中代表性的方法是核变换方法和流形学习方法。核变换方法通过核变换将具有非线性结构的数据投影到一个核空间,使其线性可分。因此,在原有的线性特征提取方法的基础上,通过核变换就变成一种非线性方法,这也为非线性数据的处理提供了一种有效的途径。代表性方法有核主成分分析(Kernel Principal Component Analysis, KPCA)和核 Fisher 判别分析(Kernel Fisher Discriminant Analysis, KFDA)。但是由于核变换过程中引进了核函数,在提高算法性能的同时,也在一定程度上升高了样本的维数,而且算法的性能与核函数的选择及参数的设定密切相关。对于不同的数据,如何选择核函数和设定理想的核参数,是迫切需要解决的问题。但是到目前为止,还没有发现一种可遵循的准则,多数情况下核模型和核参数的选取仍然需要经验指导。

流形学习方法是近年来才发展起来的一类新的非线性维数约简方法,也有研究者将前面提到的线性方法、人工神经网络方法、主曲线方法和核变换方法等统称为流形学习方法。在本书中,我们所提到的流形学习方法特指基于局部线性的流形学习方法。流形学习方法的应用对象是嵌入在高维空间的非线性低维流形数据。在认知过程中,人类往往是通过这种非线性低维流形来识别事物的。正如前面所述,高维空间中的人脸图像可以看做分布在以姿态、表情和光照条件为本征特征或自由度的低维流形上的。人们之所以能够很快地识别这些图像,正是因为他们能够识别这些本征特征。流形学习方法能够自动地探测出低维流形的本征维度,这说明应用流形学习方法进行数据处理是合理和可行的。但是,流形分布数据的非线性给流形维数约简方法的建模带来了很大的困难。为了解决这个问题,Tenenbaum 和 Roweis 提出了一种基于局部线性、全局非线性的解决方案,在此基础上构建了两类流形学习算法:等度规映射算法(Isometric Mapping, ISOMAP)和局部线性嵌入算法

(Locally Linear Embedding, LLE)。这两种方法的提出,开创了机器学习领域中流形学习的新流派。随后一批代表性的流形学习算法纷纷涌现出来。Belkin 等提出了一种拉普拉斯特征谱方法(Laplacian Eigenmaps, LE)。为了解决数据不均匀采样或者数据样本点存在孔洞的问题,Donoho 等提出了海森特征谱方法(Hessian Locally Linear Embedding, HLLE),Zhang 等提出了局部切空间排列算法(Local Tangent Space Alignment, LTSA)。随后,又有研究者提出了半正定嵌入算法(Semi-Definite Embedding, SDE),并且将该算法发展成为最大差异伸展算法(Maximum Variance Unfolding, MVU),该算法的一个很大的特点就是引入核矩阵,通过对核矩阵的半正定约束来实现数据的凸优化(Convex Optimization, CO),因此 MVU 在一定程度上也可以看做一种基于核变换的学习算法。另外, Lin 等成功地提出了基于局部切空间的 Riemann 流形学习方法(Riemann Manifold Learning, RML)。随着研究的不断深入和推广,流形学习方法也从原来的无监督学习推广到了有监督学习和半监督学习,从非线性化扩展到线性化、张量化和核化,在机器学习领域受到了研究者越来越多的关注和重视。

流形学习方法为探索非线性分布数据的内在流形结构提供了一种可能途径。但是在实际应用中,流形学习方法仍然存在一些缺点,比如对噪声敏感、要求稠密均匀取样和泛化能力差等。为了解决这些问题,相关的算法也在不断涌现。Chang 等提出了一种鲁棒局部线性嵌入算法(Robust Locally Linear Embedding, RLLE)来消除原始的局部线性嵌入算法对噪声敏感。海森特征谱方法和局切空间阵列方法的提出解决数据不均匀采样甚至存在孔洞的问题。Choi 等成功地将 Mercer 核引入 ISOMAP 算法中,提高了原算法的泛化学习能力,同时还发现新算法能够有效地抑制噪声的影响。这些方法的提出在一定程度上解决了目前流形学习方法中存在的一些问题,但是还需要进一步充实和完善。

1.2 流形学习方法应用高维数据原因探析

现有的流形学习方法都假定观测数据分布或近似分布在嵌入高维空间的低维流形上。实际上,这个低维嵌入流形的假设,把我们处理高维复杂非线性数据的方式从高维空间推广到低维流形上。对于高维数据的分析和处理之所以要进行流形建模,主要源于以下两个方面的原因:

(1) 高维数据全局线性结构的假设不易获得内在的几何结构,流形学习能利用局部几何学习获得数据的所蕴含的规律

面对呈指数级增长的各种海量数据,寻找数据集中蕴含的内部几何结构及其规律,是人们一直渴望和追求的目标。传统的方法把数据的观测空间看做高维的欧氏空间,所要分析和处理的数据看做分布在高维欧氏空间中的点,点与点之间的距离

自然地就采用了基于欧氏几何的直线距离。然而众所周知，欧氏空间是全局线性空间，存在着定义在整个空间上的笛卡儿直角坐标系。如果数据分布确实是全局线性的，这些传统方法将能够有效地学习出数据的线性结构。但是如果数据分布呈现高度的非线性或属性强相关，那么欧氏空间的全局线性结构假设很难获得这些非线性数据集内在的几何结构及规律。面对大量具有低维潜在的连续变化和非线性结构的真实数据，没有任何理由假设它们必须处在欧氏空间，实际上可以把它放到更加普遍和一般的空间中进行研究。流形是欧氏空间的非线性推广，由流形的定义可知，流形在局部上与欧氏空间存在着同胚映射，从局部看，流形与欧氏空间几乎是一样的，因而线性的欧氏空间可以看做流形最简单的实例；然而从全局上看，流形可以描述复杂的非线性结构。高维数据分析中从欧氏空间到流形的转变，要求从数据的内蕴几何来分析和处理数据，从而获取与数据内蕴几何相一致的低维本征结构。因此流形可以作为描述这些高维复杂非线性数据潜在结构的最佳工具。

(2) 人类的视觉感知神经系统具有捕获非线性流形结构的能力

Seung 等人于 2000 年在 *Science* 上发表的《感知的流形方式》研究报告指出，感知可能以流形方式存在，视觉记忆也可能是以稳态的流形（或连续吸引）形式存储的，人类的视觉感知神经系统具有捕获非线性流形结构的能力。他们认为，流形是感知的基础，经过自然界长期进化的人脑一定拥有某种表达流形的方式。探索这种表达方式本质的线索可能会来自大量神经元群体是如何编码的研究工作中。神经生理学家的研究发现：神经元群体的行为是通过神经元激活率集合所描述，而各个神经元的激活率可以表示成一个由少数变量控制的光滑函数，因此，整个神经元群体的激活率实际上可以由少数变量组成的函数描述，如眼的角度和头的方向，这表明神经元的群体活动性是由外界刺激的内在低维流形结构所控制。在视觉感知中，视网膜的图像是来自于感光器细胞信号的集合。如果把这些感光器细胞信号数据看成抽象图像空间中的坐标，那么一个图像就可以看成维度由感光器细胞数目确定的抽象图像空间上的一个点，而实际上这些感知输入之间可能会有较强的相关性，它们本质上也可能是嵌入在高维图像空间的一个低维流形。例如，在不同光照强度和不同姿态下，同一个人的人脸图像集合可以看做一个嵌入在高维空间的以光照和姿态为参数的低维流形，人们能快速识别这些图像正是取决于这些少数的参数。这说明低维流形表示在人的认知过程中具有重要意义，流形建模正是通过模拟人对自然事物的认知过程来实现高维数据的分析和处理。

1.3 流形学习方法的应用

流形学习是基于局部线性假设来进行数学建模，通过相应的规则，实现全局结构的非线性映射，并从中学习和发现数据集的内在规律与性质，完成数据挖掘、机

器学习、模式识别等任务。随着数学理论的迅速发展,微分几何等知识大大夯实了流形学习方法的研究基础,成功地解决了存在于各相关领域中的一些非线性数据处理难题,推动了流形学习在各个领域中的应用。目前,流形学习方法的应用主要包括以下几个方面:

1.3.1 数据可视化

流形学习方法的研究目的是为了探索数据的内部结构或内在规律。一方面,通过流形学习方法可以从高维非线性数据中探测出其本征特征;另一方面,通过流形学习的局部结构学习,可以将高维数据的局部几何结构信息在低维空间尽可能地保留下来。因此将高维数据映射到低维空间,原始数据的结构信息将最大限度地保留。而且因为原始数据的本征特征是比较少的,所以可以利用原始高维数据的本征维数来展现高维数据之间的几何结构信息,实现高维数据的可视化。利用流形学习方法探测高维,例如手写数字“2”的本征特征就只有两个,图 1-2 显示了该数据应用 ISOMAP 投影后的二维可视化结果,从中可以发现数字“2”的底部弯曲和顶部弯曲是其两个本征特征。图 1-3 是对姿态和光照变化的人脸图像经过 ISOMAP 映射后的结果,从图 1-3 可以发现,上下姿态变化、左右姿态变化和光照变化是其三个本征维数。

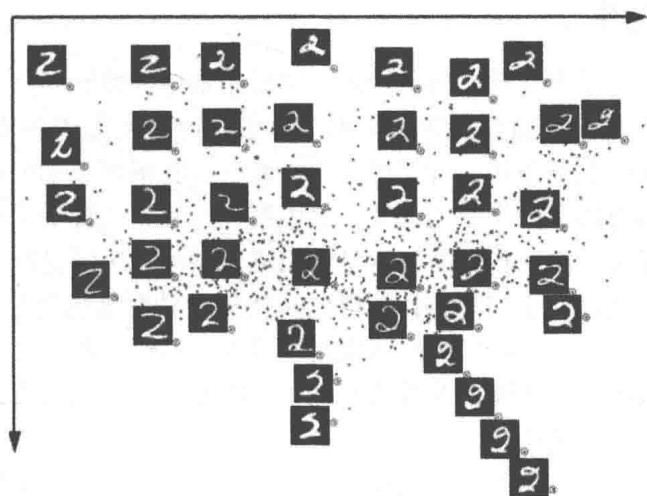


图 1-2 手写数字“2”图像经过 ISOMAP 投影后的可视化结果

因此,通过流形学习方法进行维数约简,一个比较有效的途径就是将原始高维数据投影到低维本征特征空间,不仅可以实现高维数据的可视化,克服人类感觉器官无法直接感知高维数据的先天缺陷,而且还能够结合人和计算机处理数据中所具

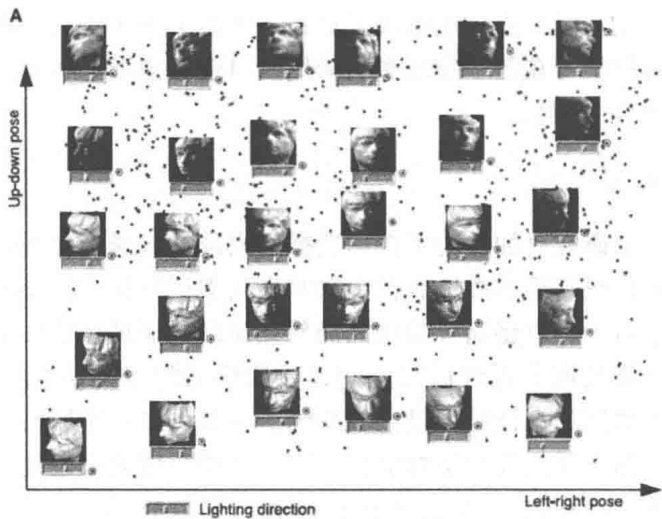


图 1-3 姿态和光照变化的人脸图像经过 ISOMAP 投影后的可视化结果

有的各自优势，便于对数据做出进一步的处理和操作，特别是在低维空间对数据进行模式分类。

1.3.2 图像处理

流形学习另一个重要应用是图像处理。图像中物体的轮廓以及骨架均可以看做嵌入在二维平面中的一维流形，即线流形。流形学习方法有着强大的流形逼近能力，在图像处理中的轮廓描述、骨架提取等方面已经有很多成功的应用。图 1-4 显示了应用流形学习算法提取字符的骨架，其中第一行和第三行是采用传统图像骨架提取算法获得的结果，第二行和第四行是应用流形学习算法所提取的骨架。从图中可以看出，传统的通过基于细化的骨架提取算法提取的骨架包含许多毛刺与小圈，不符合人们对骨架的认知，给后续的图像处理带来了不便。而流形学习算法能够比较有效地消除这些毛刺与小圈，并成功找到了一组光滑的曲线来表达字符流形的骨架，比较符合人类的直观认知。

流形学习算法还可应用于图像去噪。一个人的脸图像或一个建筑物在不同光照、姿态和表情下的图像是分布在一个嵌入高维空间的低维流形上的，如果其中的一幅或多幅图像被噪声干扰，被污染的图像将被看做位于流形外的点。因此通过流形学习算法找出这些不是分布在流形上的点，并以局部投影方法将其映射到流形上，就可以得到消除噪声后的图像。Shi 等提出了一种基于流形学习的图像去噪算法，图 1-5 展示对包含噪声的图像应用该流形学习算法去掉噪声后的结果。