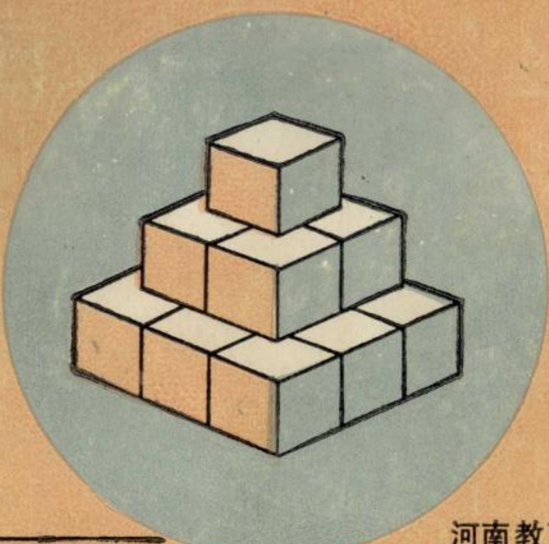
怎样寻求 $P(k+1)$ 的证明

中学数学专题丛书

徐会方　董振平　崔耀文
景煜璋



河南教育出版社

怎样寻求$P(k+1)$的证明

徐会方　董振平
崔耀文　景煜璋　编著

河南教育出版社

中学数学专题丛书

怎样寻求 $P(k+1)$ 的证明

徐会方　董振平
　　　　　　　编著
崔耀文　景煜璋

责任编辑　张国旺

河南教育出版社出版

河南渑池县印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米　32开本　9.5印张　181千字

1990年12月第1版　　1990年12月第1次印刷

印数 1—4,951册

ISBN7—5347—0808—7/G·676

定价　　3.00元

前　言

《中学数学专题丛书》是一套大型中学数学教学的资料性工具书。顾名思义，这套丛书是按中学数学的专题分册，每个专题揉合成一个系统进行详赡撰述，形成它的独自的全、深、透的特色。对于每一个专题囊括的资料全，理论探索和实际应用力争达到当代应有的深度，所涉及的数学知识浸透到具有内在联系的各数学学科。例题典型,涉足面广。因此，是中学数学教学的必备参考书。

这套丛书即将和广大读者见面的第一批著作是五部。它们是：《活跃在数学中的参数》、《怎样寻求$P(k+1)$的证明》、《数列·递推·递归》、《截面·折叠·展平》和《选排·取并·填格》。

《怎样寻求$P(k+1)$的证明》是该丛书之一种．该书是较为详细地系统介绍数学归纳法的内容。本书的前两章，是全面介绍第一数学归纳法，方法本身、运用泛例、方法的可靠性的依据、运用中的禁忌以及在证明命题中的择用和取代,在全部了解第一数学归纳法的基础上,对运用中的难点：怎样通过归纳假设当$n=k$时命题为真，去论证当$n=k+1$时，命题亦真．针对常见题型进行了归类，较为详细地剖析了寻求证明的思路、方法和技巧．

本书的第三章，介绍了第二数学归纳法以及数学归纳法的各种变形和发展，这些内容散见于各种已出版的有关读物

和数学刊物之中。但较为系统整理归纳在一起，本书还是第一次。

第四章介绍了数学归纳法在解综合题中的应用。其中包括一般综合题、高考命题以及数学竞赛中的命题。

第五章和第六章介绍了与此法有关的一些问题，如归纳与猜想以及此法的形成和发展。

最后，附有参考文献，这些著作和论文都是对数学归纳法研究的成果，也是本书的主要参考。在此，对这些成果的作者们表示衷心的感谢。

由于我们的水平所限，不一定能达到该书的编写要求，仅此抛砖引玉，敬希广大志士人仁在这一专题上创作出更好的作品来。

编　者

1989年8月

引　言

赵慈庚教授在回顾《我是这样学数学归纳法的》一文中，记述了如下的内容：

“有些人说数学归纳法难懂，真的难懂吗？我的老师讲数学归纳法时，让人听起来很轻松，现在看来他的讲法好象治病的偏方。偏方也罢，能治病就好，现在讲给大家，也许多少有一点启发。

按照社会的姓氏传统，如果阿强是姓王的男人，那么他的任何一个后代一定也姓王，进而断定阿强的无穷多代子孙都姓王。一个男子姓王，那么他的后代子孙代代都姓王，这是一条定理。平常人们只是把这当作一件理所当然的事情，从经验上承认它正确，我们不妨把其中的道理分析一下，首先是要

(1) 阿强姓王

其次是中国的姓氏在父系亲属里有遗传性

(2) 只要有一代姓王，下一代一定也姓王

现在把这两条结合起来用于阿强的家族，第一从假设的(1)知道

阿强姓王，

根据条件(2)知道

阿强的儿子姓王，

再根据条件(2)

阿强的孙子姓王，

……

这样一代一代地传下去，不论哪一代总有传到的时候；那么一传到谁，谁就姓王。所以我们知道阿强的后代子孙都姓王。

这就是数学归纳法的推理。

现在把上面的话说得规格一些。阿强的任何一个后代W_n总能从阿强W_1开始，父子相连地排成一串

$$W_1, W_2, \cdots, W_n.$$

从W_1挨个儿地数下去，总有数到W_n的时候，由于姓氏的遗传性，一数到W_n就知道W_n姓王。阿强的后代无穷无尽，我们只能说对于任何自然数n，W_n都姓王。这种情况在数学里就用一句行话说“无穷多的一串人

$$W_1, W_2, \cdots, W_n, \cdots \tag{①}$$

都姓王”。注意这是说①是无穷多个有限串

$$\left.\begin{array}{l} W_1; \\ W_1, W_2; \\ W_1, W_2, W_3; \\ W_1, W_2, W_3, W_4; \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{②}$$

的简写。即是说①里的W们都能数得到。

数学归纳法是证明无穷多个东西都具有某种性质的一种方法。这方法的模式是

如果无穷多事物按某种关系排成一串

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \tag{③}$$

（1）假设A_1有某种性质P；

(2) 假若P在这串事物中有遗传性——即"当某项A_k有性质P时，下一项A_{k+1}一定也有性质P。"

那么，从A_1以后的一切事物A_2，A_3，…一定都有性质P。

例 1 试证n边形的内角和等于$(n-2)$平角。

先分析问题的意义。n代表任意自然数，"n边形"三字就代表无穷多的一串图形(如图0-1)：

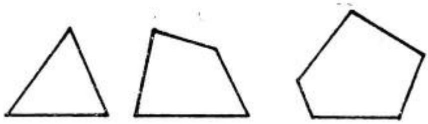


图 0-1

三边形，四边形，五边形，… ④

——按边数排列起来的封闭凸直线形。问题是要证明这一串图形有一个共同的性质：内角和等于$(n-2)$平角。证明分两步：

(1) 证明：三边形符合题意。

这是因为三边形内角和$=1$平角

$$=(3-2)\text{平角}。$$

(2) 证明：假定k边形符合题意，那么，$k+1$边形也符合题意。

假设$A_1A_2\cdots A_{k-1}A_kA_{k+1}$是任意$k+1$边形（图0-2）。线段$A_1A_k$把它分成一个三角形$A_1A_kA_{k+1}$和一个$k$边形$A_1A_2\cdots A_k$。那么，根据(1)知道

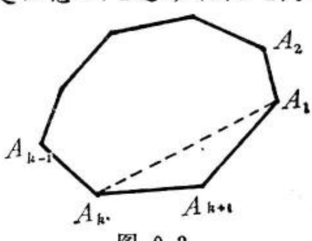


图 0-2

$\angle A_1A_kA_{k+1}+\angle A_kA_{k+1}A_1+\angle A_{k+1}A_1A_k$

$=1$平角.

又根据(2)的假设，知道

$\angle A_kA_1A_2+\angle A_2+\cdots+\angle A_{k-1}+\angle A_{k-1}A_kA_1=(k-2)$平角，两式相加，得

$\angle A_1+\angle A_2+\cdots+\angle A_{k-1}+\angle A_k+\angle A_{k+1}=[(k+1)-2]$平角.

从(1)，(2)两步证明知道，任意n边形的内角和是$(n-2)$平角.

从这例题知道数学归纳法所涉及的自然数n不一定从1开始.

例 2 如果多角星形的角尖数是奇数，每个顶角内部没有其他顶点，试证顶角的和是180°.

这是要证明无穷多的一串多角星形(图0-3)

三角星，五角星，七角星，…$(2n+1)$角星， ⑤

【注】画这种多角星的方法是：先在平面上画$2n+1$(如9)个点，使它们大致排成一个环. 随便取一点作为A_1，从这点开始按固定方向数n(如4)个点，把这点记作A_2，连

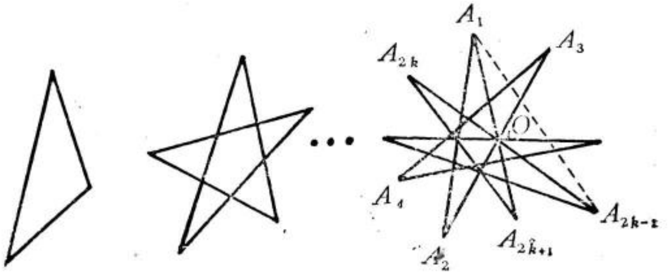


图 0-3

A_1A_2，再从A_2继续向前数n（如4）个点记作A_3，连A_2A_3。如此继续作图，直到回于A_1止，星形就画成了。

有共同性质：内角和＝180°。

(1) 证明：三角星各角和是180°。

三角星就是三角形（图0-3(1)），内角和等于180°。

(2) 证明：假设$(2k-1)$角星顶角和是180°，那么，$(2k+1)$角星顶角和是180°。

设$A_1\cdots A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}$是$(2k+1)$角星形（如图($n$)）。连$A_1A_{2k-1}$，去掉$A_1A_{2k+1}$，$A_{2k+1}A_{2k}$及$A_{2k}A_{2k-1}$就成了一个$(2k-1)$角星形$A_1\cdots A_{2k-1}$。这时减少了$\angle A_{2k}$及$\angle A_{2k+1}$两个顶角，但是，原来的$\angle A_1$及$\angle A_{2k-1}$分别扩大了$\angle A_{2k+1}A_1A_{2k-1}$及$\angle A_1A_{2k-1}A_{2k}$。假设$A_1A_{2k+1}$及$A_{2k}A_{2k-1}$的交点是0，从三角形的外角定理知道

$$\begin{aligned}\angle A_{2k}+\angle A_{2k+1}&=\angle A_1OA_{2k}\\&=\angle A_{2k+1}A_1A_{2k-1}+\angle A_1A_{2k-1}A_{2k}\end{aligned}$$

所以$(2k+1)$角星形$A_1A_2\cdots A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1}$各顶角的和等于$(2k-1)$角星形$A_1A_2\cdots A_{2k-1}$各顶角的和。根据(2)的假设，这是180°。

从(1)、(2)两步证明，知道原命题成立。

这里应该说一下，数学归纳法究竟有多大功能。序列①是②中无穷多个有限序列的简写，用②分开来写就明显地看出来，对于①里的每一项都能从A_1挨着个儿地数到它。能数到哪一项，性质P（娃王）就能传到哪一项。所以用数学归纳法证明的定理只能达到人们能够数得到的那样多事物。也就是证明的结论只能对一切自然数成立。

例 3 用任何自然数n乘3，乘积$3n$的各位数码的和一

定是 3 的倍数。

这是说无穷数列

$$3，6，9，12，15，\cdots，3n，\cdots \qquad ⑥$$

中每个数的数码加在一起一定是 3 的倍数。

（1）证明：当$n=1$时，命题成立。这是很明显的。

（2）证明：假设$n=k$时，命题成立，那么 $n=k+1$ 时，命题也成立。

这时要作一点准备工作：任何整数N加 3 以后各数码之和如何改变。n 的个位小于 7 时，各数码的和增加 3；N 的个位是7，8，9时，加 3 要进位。如果只进一次，数码的和减少 6，这是 3 的倍数。如果进位两次，十位原来必是 9，后两位98变成了101，$1+1=2$，比$9+8=17$少了15，也是少了 3 的倍数。不难想到不论进位几次，数码和总是减少 3 的倍数。所以，

$$N+3\text{的数码和}=N\text{的数码和}\pm 3\text{的倍数}。\qquad ⑦$$

现在来看，$3(k+1)=3k+3$的数码和，这里已知

$$3k\text{的数码和}=3\text{的倍数}。$$

根据⑦，知

$$\begin{aligned}3k+3\text{的数码和}&=3k\text{的数码和}\pm 3\text{的倍数}\\&=3\text{的倍数}\pm 3\text{的倍数}\\&=3\text{的倍数}。\end{aligned}$$

从以上两步证明知道，⑥中每数的数码和是 3 的倍数。

这例题证明“遗传性”时，不象前两个那样利索。尽管如此，耐心地分析下去，总能达到目的。用数学归纳法证明定理时，要注意所要证的结论可能表面上仅是一句话，而实际是无穷多相似的结论。证明以前，能象②，③，④，⑤，

⑥那样把求证的一串对象写一下，会有助于思考。然而，并不是每题都能顺利地写出来。

例 4 b 是大于1的固定的正整数。对于每个自然数 n 一定有非负整数 q 与 r，满足

$$n=qb+r \qquad (0\leqslant r<b).$$

b 不是具体数字，要证明的一串等式写起来很不方便。这时可以这样分析：

$0<n<b$时，$n=0\cdot b+n$，$q=0$，$r=n$；

$b\leqslant n<2b$时，$n=1\cdot b+(n-b)$，$q=1$，$r=n-b$；

$2b\leqslant n<3b$时，$n=2b+(n-2b)$，$q=2$，$r=n-2b$；

……

这情形和进位法相似。试想$b=10$时，上边这些等式不就是数数的过程吗？从这些关系可以发现 q 与 r 的变化规律，是

q 在$n=b$的倍数时进1，别时不变；

r 在0，1，…，$b-1$（共 b 个数）上循环，$n=b$ 的倍数时，$r=0$。

从此，知道 $k=q_1b+r_1$与$k+1=q_2b+r_2$的关系是

$k+1\neq b$的倍数时，$q_2=q_1$，$r_2=r_1+1$；

$k+1=b$的倍数时，$q_2=q_1+1$，$r_2=0$。

知道了这些，证明工作就不难了。

使用数学归纳法，必须注意(1)、(2)两步缺一不可。没有(2)便只知道“1有某性质P”，自然不能说每个自然数有性质P。没有(1)也不行。这好比只知道姓氏在父系亲属有遗传性，而不知道阿强姓王，就不能说阿强的后代姓王。

例 5 假若 $1+2+\cdots+k=\frac{1}{8}(2k+1)^2$，很容易由此证明 $1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{8}[2(k+1)+1]^2$。但是，$1+2+\cdots+n=\frac{1}{8}(2n+1)^2$ ⑧对于任何正整数 n 不成立，原因是不具备数学归纳法的(1)条。如果将⑧改作不等式

$$1+2+\cdots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$$

就是正确公式了，读者可以自己证明。

验证首项一般都很容易，麻烦或错误多半发生在“遗传性”的证明”。

上述短文形象、生动、深入浅出的描述了数学归纳法的全貌。通过具体事例形象地说明数学归纳法的实质；通过一组五个例题，详述了数学归纳法证题的全部过程，指出了证明过程中的要点，难点和应注意事项。同时，仅观以上五例的证题过程，就足以察知用数学归纳法证题中第二步“遗传性”证明的难度。

当然，上述例证还仅限于中学数学教学大纲范围之内。还有很多命题用上述形式去证明它的遗传性是行不通的。因此，这就要求我们去寻求、去探索新的形式。数世纪以来，通过科学家的实践，摸索出了第一数学归纳法和第二数学归纳法以及数学归纳法的各种变形形式。如下我们将分章详细加以介绍。

第一章　第一数学归纳法

第一节　证明有关命题的一种科学方法

众所周知，思维方法不外有二：由特殊到一般，谓之归纳；或由一般到特殊，谓之演绎．由此而产生的推理方法有三：

Ⅰ．演绎：三段论式，结论必然．

Ⅱ．归纳：不完全归纳法，结论或然；
　　　　完全归纳法（或枚举归纳法），
　　　　结论必然．

Ⅲ．类比：特殊到特殊，结论或然．

数学归纳法则不然，它是证明与自然数有关的命题的一种证明方法．

数学归纳法有多种形式，中学数学里介绍的是第一数学归纳法．即

对于一个与自然数 n 有关的命题 $P(n)$，用第一数学归纳法证明的步骤是：

（1）证明当 $n=1$ 时，命题 $P(1)$ 成立，（称奠基步）

（2）假设当 $n=k$ 时，命题 $P(k)$ 成立，能推出当 $n=k+1$ 时，命题 $P(k+1)$ 也成立．（称递推步）

由(1)、(2)，则命题 $P(n)$ 对一切自然数 n 都成立．

其中(1)是通过具体的验证，得到递推的基础；(2)是以一次性的演绎论证代替无穷次的逐一验证，获得递推的依据。因此，此证明方法从总体上看是归纳；而其手段是演绎的。所以，此法也可视为演绎法的一种变态。更确切的说，此法实为“递归推理原理”。

在具体运用第一数学归纳法证明命题时，奠基步不一定从$n=1$开始，而是从某一自然数$n=n_0$开始，甚至从某一负整数或零开始。证明的步骤是：

（1）证明当$n=n_0$时，命题$P(n_0)$成立；（奠基步）

（2）假设$n=k(k\geqslant n_0)$时，命题$P(k)$成立，能推得$n=k+1$时，命题$P(k+1)$成立。

由(1)、(2)，则命题$P(n)$当$n\geqslant n_0$时都成立。

例如，设n为大于-4的整数，则

$$2^{n+4}-n-4>\left(\frac{n}{4}\right)^2.$$

证：当$n=-3$时，左边$=1$，右边$=\frac{9}{16}$，显然左边大于右边，不等式成立。

设$n=k$时，不等式成立，即有

$$2^{k+4}-k-4>\left(\frac{k}{4}\right)^2.$$

当$n=k+1$时，有

$$2^{(k+1)+4}-(k+1)-4=2(2^{k+1}-k-4)+k+3$$

$$>2\cdot\left(\frac{k}{4}\right)^2+k+3=\left(\frac{k+1}{4}\right)^2+\frac{(k+7)^2-2}{16},$$

$\because\ k>-4$, $\therefore (k+7)^2-2>0$.

从而，有

$$2^{k+5}-k-5>\left(\frac{k+1}{4}\right)^2.$$

即$n=k+1$时，不等式仍成立。

故对于任何整数$n>-4$，不等式都成立。

数学归纳法的这两个步骤有联系、有区别、又不可分．步骤(1)是验证．虽然简单易作，但并非自然成立，不是走过场，它是以实践为标准，经过具体的验证，得到递推的基础．步骤(2)的实质是利用归纳假设，通过推理，证明归纳结论。

对于步骤(1)的验证，初学者往往不了解为什么将n的第一个值分别代入等式两边，分别计算，再肯定结论真假，而不是代入全式验证，这是因为要验证等式而事先又没有肯定式子成立，通过验证，才能下结论，构成归纳基础。

有的初学者对命题中时而$n=1$，时而$n=k$，时而$n=k+1$感到不解，认为这与等量公理矛盾，其原因是不理解n的实质意义，在这里，n代表取自然数的变量，是概括性的标号，而不是特定标号$n=1$或$n=k$或$n=k+1$，不要把n，k理解为常量或等量，而应看作是“当n取值为1时”或“当n取值为k时”或“当n取值为$k+1$时”，k虽然可以是任意自然数，但一经取定，就成特定数了。

应用数学归纳法步骤(2)是关键，也是难点，解决好这一步是至关重要的．如何实现第二步证明，首先应该区分总命题与第二步命题的关系以及第二步的“假设”和“求证”两部分才会有证题可循的方向．第二步命题同原来要证的总命题有密切的关系，但又有根本的区别：总命题回答了$n\geqslant n_0$

的任意值时命题的真确性，第二步骤命题则回答n从k到$k+1$ 命题真确性的传递性，所以第二步骤命题是同总命题不同的另一命题，我们完全可以把它当作独立的证明题来研究．这样，在处理第二步骤时就有了明确的目标，而不致因总命题而模糊了第二步的目标．

归纳假设不是无根据的臆断，而是以步骤（1）验证过的事实为基础的科学猜想，它又为归纳结论准备了前提，也为最后的归纳准备了前提，步骤(2)实质上是能否递推下去的问题，因为对于一个有无限多个特殊情形的命题，想一一验证是不可能穷尽的，但只要能够递推，又有步骤（1）为基础，勿须一一验证，命题的正确性就能无限地延续下去，这正是数学归纳法的真意和妙处．

我们很容易联想到证明题的格式：已知、求证、证明，现在的问题是：在数学归纳法的第二步里，“假设$n=k$时，$P(k)$成立”中的“假设”一般不称为“已知”，那么我们自然会感疑这个“归纳假设”是真是假？是否可以作为“已知”条件进行正确推理呢？这个问题应当这样看：归纳假设真实与否，当然同总命题的真实与否有关系，然而对第二步骤要证明的命题来说，毫无关系．因为第二步要解决的问题，并不是归纳假设正确与否，而是在归纳假设正确的假设之下，能否推出归纳结论来，也就是说，是解决“真确性的传递性”问题，而不是解决“真确性”问题，所以对归纳假设可以放心地把它当成已知条件予以应用，那么为什么不把“假设”说成“已知”呢？这是因为，已知与假设虽然都是一种题设，但习惯上一般只把比较确凿无疑的客观事实称为“已知”，而这里的假设实际是经过归纳的一种“猜想”，因而，归纳