高等院校网络教育精品教材
——基础类

工程数学（I）
——线性代数

GONGCHENG SHUXUE（I）
Xianxing Daishu

胡 成 编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

工程数学（Ⅰ）

——线性代数

工 程 数 学（Ⅰ）

——线性代数

胡 成 编

西南交通大学出版社
·成 都·

内容简介

本书是网络教育中工程数学系列之一的线性代数教材。该书以网络教育思想和学习理论为指导，以网络的各种教育功能和丰富的网络教育资源为基础，以重点培养应用型人才为目标，并结合近年来网络教学实践经验编写而成的。

本书共分为五章。内容包括行列式、矩阵的运算、线性方程组的基本理论与解法、特征值与特征向量的概念与求法、矩阵相似对角化的各种解法、二次型化为标准形的各种方法、正定二次型的判别法等。

本书可作为网络教育中工科类专业大学生的线性代数教材或教学参考书，也可作为普通高等学校工科专业大学生的线性代数教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

工程数学. 1，线性代数 / 胡成编. —成都：西南交通大学出版社，2010.11
高等院校网络教育精品教材. 基础类
ISBN 978-7-5643-0939-8

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①胡… Ⅲ. ①工程数学－高等学校－教材②线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 211760 号

高等院校网络教育精品教材——基础类
工程数学（Ⅰ）
——线性代数
胡 成 编
*
责任编辑 张宝华
特邀编辑 黄庆斌
封面设计 墨创文化
西南交通大学出版社出版发行
(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564)
http: //press.swjtu.edu.cn
成都蜀通印务有限责任公司印刷
*
成品尺寸：185 mm × 260 mm 印张：9.875
字数：245 千字
2010 年 11 月第 1 版 2010 年 11 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-0939-8
定价：18.00 元

前　　言

线性代数是讨论数学中线性关系经典理论的课程，具有较强的抽象性和逻辑性，是高等学校工科类本科各专业一门重要的基础理论课。由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，且某些非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题，因此本课程所介绍的方法广泛应用于各个学科。

本书主要包括以下几部分内容：

（1）行列式：n 阶行列式的概念、代数余子式的定义及其性质、行列式的常用计算方法、行列式的按行（列）展开定理、Cramer 法则、齐次线性方程组有非零解的条件等。

（2）矩阵：矩阵的概念及其性质、特殊矩阵概念及性质、矩阵的代数运算及其运算法则、矩阵的线性变换、逆矩阵的概念及其存在的条件、求逆矩阵的方法、矩阵的初等变换、初等方阵、矩阵的秩、分块矩阵概念及性质等。

（3）线性方程组：齐次方程组的基础解系、解空间、通解、齐次线性方程组存在非零解的充分必要条件，非齐次线性方程组解的结构、通解、存在解的充分必要条件，用初等变换方法求解线性方程组、线性模型等。

（4）特征值与特征向量以及矩阵对角化：矩阵的特征值与特征向量的概念及求法，合同矩阵概念及其性质，正交阵、相似矩阵的概念及其性质，矩阵可对角化的充分必要条件，方阵的 Jordon 标准形，实对称矩阵的相似对角化方法，矩阵对角化在实际问题中的应用等。

（5）二次型：二次型及其矩阵表示、二次型的秩和惯性定理、二次型化为标准形的方法、正定二次型及其判别方法、二次型在二次曲面分类中的应用等。

本书由胡成编写，在编写过程中，得到了西南交通大学数学学院、网络学院和西南交通大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免存在疏漏与不妥之处，恳请读者和使用本书的教师批评指正。

编　者

2010.4

目　　录

1 行列式

【学习指导】

1. 学习目标

（1）了解 n 阶行列式和代数余子式的定义和性质。
（2）了解行列式按某行（列）展开的方法。
（3）掌握二阶、三阶行列式的计算方法。
（4）学会计算简单的 n 阶行列式。
（5）熟悉 Cramer 法则，了解齐次线性方程组存在非零解的条件。

2. 学习建议

（1）学习时间：导学 1 + 自学 5 = 6 学时
（2）学习方法：
① 复习解二元、三元线性方程组的消元法。
② 在网上点播课程学习中第 1 章相关内容。
③ 在网上完成第 1 章的练习题。

3. 学习重难点

（1）行列式的计算方法。
（2）n 阶行列式的计算。

行列式理论在数学本身或其他的学科中都有广泛的应用，它是解线性方程组的有力工具。本章将在讨论用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组的基础上，进一步建立 n 阶行列式的理论，介绍用 n 阶行列式的理论求解 n 元线性方程组的 Cramer 法则。

1.1 排　列

为了定义 n 阶行列式，先介绍排列的概念和它的一些基本性质。

定义 1.1　由 1，2，…，n 组成的一个有序数组，称为一个 n 级全排列，简称 n 级排列。

例如，1324 是一个 4 级排列，51243 是一个 5 级排列。这里的排列就是指 n 个不同元素的全排列，因此，n 级全排列的总数为 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots 2\cdot 1=n!$。

定义 1.2　在一个全排列中，如果有一对数它的大数排在小数之前，则称这一对数构成一个逆序。一个排列中逆序的总数，称为该排列的逆序数。

例如，在排列 4132 中，41、43、42、32 构成 4 个逆序，因此，4132 的逆序数是 4。在排列 21354 中，21、54 构成 2 个逆序，因此，21354 的逆序数是 2。

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为

$$J(i_1i_2\cdots i_n)$$

于是

$$J(4132)=4\,,J(21354)=2$$

例 1　求 $J(n(n-1)\cdots 321)$。

解　在这个排列中，n 后面比它小的数有 $n-1$ 个，它们构成 $n-1$ 个逆序；$n-1$ 后面比它小的数有 $n-2$ 个，它们构成 $n-2$ 个逆序；……；3 后面比它小的数有 2 个，它们构成 2 个逆序；2 后面比它小的数有 1 个，它构成 1 个逆序。因此

$$J[n(n-1)\cdots 321]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

一般情况下，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数：

$J(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数字的个数 $+i_2$ 后面比 i_2 小的数字的个数 $+\cdots+i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数字的个数

例 2　$J(634512)=5+2+2+2=11$。

定义 1.3　逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如，4132 是偶排列，21345 是奇排列。规定逆序数为零的排列为偶排列。排列 $123\cdots n$ 的逆序数是零，因此是偶排列。

定义 1.4　把一个排列中某两个数位置互换，而其余的数不动，就得到了一个新排列，这种变换被称为对换。

例如，将排列 3421 的 3 与 1 对换，就变成了排列 1423；将排列 1423 的 4 与 2 对换，又变成排列 1243；继续将 4 与 3 对换，最后变成了按自然数顺序的排列 1234。

实际上，设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个 n 级排列，不难看出，经过一系列的对换，它可以变为按自然数顺序的排列 $123\cdots n$。对任意两个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$，总可以通过一系列的对换将 $i_1i_2\cdots i_n$ 变为 $j_1j_2\cdots j_n$。

关于对换还有下面一个基本定理。

定理 1.1　每一次对换都会改变排列的奇偶性。

证　1°　先看两个相邻数对换的情形。

设给定的排列为

$$PjiQ \tag{1}$$

其中，P 与 Q 代表排列中若干个数。对换 i 与 j 得到排列

$$PijQ \tag{2}$$

比较（1）、（2）两个排列的逆序数，显然 i、j 与属于 P 或 Q 的数所构成的逆序没有变化。若原来 i 与 j 构成逆序，如果经过对换，则逆序就会减少一个。若原来 i 与 j 不构成逆序，则经过对换，逆序就增加一个，无论逆序减少一个或增加一个，排列的奇偶性总会改变。

2°　再看一般情形。

设 i、j 之间有 s 个数，这时给定的排列为

$$Pik_1k_2\cdots k_sjQ \tag{3}$$

对换 i 与 j，则得到排列

$$Pjk_1k_2\cdots k_siQ \tag{4}$$

不难看出，这一次对换可以通过一系列的相邻数对换来实现。从（3）出发，把 i 依次与 $k_1k_2\cdots k_s$ 对换，这样经过 s 次相邻数的对换后，排列（3）变为

$$Pjk_1k_2\cdots k_siQ \tag{5}$$

再从排列（5）出发，把 j 依次与 $ik_sk_{s-1}\cdots k_1$ 对换，经过 $s+1$ 次相邻数的对换后，排列（5）变为排列（4）。也就是说，i 与 j 的对换可以通过 $2s+1$ 次相邻数的对换来实现。$2s+1$ 是奇数，因此排列（3）、（4）奇偶性相反。

由定理 1.1 还可以得出以下定理。

定理 1.2　当 $n\geqslant 2$ 时，在 $n!$ 个 n 级排列中，奇偶排列的个数相等，各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个。

证　设在 $n!$ 个 n 级排列中有 p 个奇排列、q 个偶排列，现在来证明 $p=q$。

对 p 个奇排列都施行同一个对换，比如将 i 与 j 对换，于是得到 p 个偶排列。再对这 p 个偶排列施行 i 与 j 的对换，又回到原来的 p 个奇排列。因此这 p 个偶排列各不相同。但一共只有 q 个偶排列，故有 $p\leqslant q$。同理可证 $q\leqslant p$。因此有 $p=q=\dfrac{n!}{2}$。

例如，由 1、2、3 组成的全部 3 级排列为

123，231，312

132，213，321

上面一排为偶排列，下面一排为奇排列，它们排列个数各占一半。

1.2 二阶、三阶行列式

1.2.1 二元线性方程组与二阶行列式

中学代数里曾讨论过用消元法解二元线性（一次）方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中，x_1、x_2为未知数；a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}、b_1、b_2为系数。

为消去x_2，用a_{22}乘以第一个方程两边、a_{12}乘以第二个方程两边，然后两个方程相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \tag{2}$$

为消去x_1，用a_{21}乘以第一个方程两边、a_{11}乘以第二个方程两边，然后两个方程相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \tag{3}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，用$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$除（2）、（3）式两端，得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}，\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{4}$$

为了记忆该公式，下面引入二阶行列式的定义。

定义 1.5 把这四个数排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{5}$$

则称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{6}$$

为二阶行列式。其中，a_{ij}称为行列式的元素。a_{ij}的两个下标表示该元素在行列式中的位置，第一个下标称为行标，表示该元素所在的行；第二个下标称为列标，表示该元素所在的列。常称a_{ij}为行列式的$(i，j)$元。

由上述二阶行列式可按对角线法则计算。设a_{11}、a_{22}为主对角线元素，a_{12}、a_{21}为副对角线元素。（6）式表明二阶行列式是主对角线元素之积与副对角线元素之积的差，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

例如

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为方程组的系数行列式。利用行列式的概念，二元线性方程组的解（4）式中的分子可记为

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = D_1，\quad a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = D_2$$

则有

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{7}$$

1.2.2　三元线性方程组与三阶行列式

定义 1.6　设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{8}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix} \tag{9}$$

（9）式称为数表（8）的三阶行列式。

（9）式表明三阶行列式有 3! = 6 项，每一项均为数表（8）中位于不同行不同列三个元素的乘积，正、负项各半，其规律性遵从下列对角线法则。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix} \tag{10}$$

利用三阶行列式求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{11}$$

当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

且

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \tag{12}$$

时，方程组（11）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D} \tag{13}$$

例 3　计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$。

解　按对角线法则，则有

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &=1\times3\times(-2)+2\times4\times0+3\times2\times1-1\times4\times1-2\times2\times(-2)-3\times3\times0 \\ &=4 \end{aligned}$$

例 4　求解下列三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=2 \\ \qquad x_2-2x_3=3 \end{cases}$$

解　由例 3 可知，该方程组的系数行列式 $D=4\neq 0$，故该方程组有唯一解

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=1,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-6,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3$$

由（13）式得该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{4},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-3}{4}$$

1.3　n 阶行列式

首先分析三阶行列式的展开式的结构规律。由第二节定义 1.6，三阶行列式的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

其中，$a_{ij}(i, j = 1、2、3)$代表三阶行列式中第 i 行第 j 列的元素。可以看到，上式右端每一项都为形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的 3 个元素的乘积，并带有一定的符号。这 3 个元素的第一个下标（行标）分别为 1、2、3，这是一个自然顺序，因为我们总可以交换元素的位置来获得这个自然顺序。这 3 个元素的第二个下标（列标）j_1、j_2、j_3的排列顺序有以下 6 种：

123，　231，　312

132，　213，　321

它们恰好是所有 3 级排列。这说明上述展开式中各项都是由行列式中不同行不同列的元素相乘得到的，共有 $3! = 6$ 项。

进一步分析上述展开式中各项所带的符号，它们与第二个下标的排列有关。当 $j_1\ j_2\ j_3$是偶排列时，该项取正号；否者，该项取负号。正项与负项各占一半，于是三阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{J(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中，$\sum$是对列标的所有 3 级排列求和。

至此，可以定义 n 阶行列式。

定义 1.7　设有 n^2个元素构成的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

等于所有取自数表中不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{2}$$

的代数和。这里，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列，每一项（2）都带有符号，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时，（2）带正号；当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列时，（2）带负号。于是 n 阶行列式（1）可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{J(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{3}$$

其中，$\sum$是对列标的所有 n 级排列求和。

（3）式也称为 n 阶行列式的完全展开式。行列式常用记号 D 来表示，或用 det$\boldsymbol{A}$、det$\boldsymbol{B}$ 来表示。

由行列式的定义可知，n 阶行列式是 $n!$个项的代数和，每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积。在计算 n 阶行列式时可直接按照定义不遗漏不重复地找出这 $n!$个项。显然这是一件很麻烦的事，下面先来看一些简单的例子。

例 5 计算三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 这是一个 4 阶行列式，在展开式中应有 $4! = 24$ 项。由于在主对角线（从左上角到右下角的那条对角线）上方的元素全为零，因此不等于零的项就大大减少了。现在来分析一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$。

由于第一行除 a_{11} 外都为零，故只要考虑 $j_1 = 1$ 的项。第二行中除了 $a_{21}a_{22}$ 外都为零，现已取了 a_{11}，因此 j_2 就必须取 2，即第二行中只能取 a_{22}。同理，j_3 和 j_4 只能分别取 3 和 4。这样一来，行列式的展开式中不等于零的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而排列 1234 是偶排列，所以这一项带正号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

换句话说，这个行列式就等于主对角线上元素的乘积，该行列式称为下三角行列式。

作为特殊情形，有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = d_1d_2d_3d_4 \quad (d_i \neq 0, i = 1,2,3,4)$$

这种行列式称为对角行列式。

以上情形都可推广到 n 阶行列式。

例 6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　同例 5，除去为零的项，只剩下唯一项

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

其中第二个下标排列的逆序为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

所以

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

需要补充说明的是，在行列式的定义中，也可以把每项的 n 个元素按列标的自然顺序排列起来，以行标排列的奇偶性决定各项的符号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{J(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

其中，$\sum$是对行标的所有 n 级排列求和。

事实上，由于乘法满足交换律，因此，这 n 个元素的次序可以是任意的。一般地，每一项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{4}$$

其中，$i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列。可以证明（4）的符号为

$$(-1)^{J(i_1i_2\cdots i_n)+J(j_1j_2\cdots j_n)} \tag{5}$$

事实上，如果把（4）的 n 个元素重新排列，使它们的行标按自然顺序排列，则（4）可以改写为

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'} \tag{6}$$

于是这一项的符号为

$$(-1)^{J(j_1'j_2'\cdots j_n')} \tag{7}$$

现在来证明（5）和（7）是相等的。因为可以经过一系列对换由（5）变到（7），而作一次对换，元素的行标与列标的排列都同时作一次对换，相应地，它们的排列也同时改变奇偶性，所以这两个排列的逆序数之和

$$J(i_1i_2\cdots i_n)+J(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性保持不变，于是

$$(-1)^{J(i_1i_2\cdots i_n)+J(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{J(1\ 2\cdots n)+J(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{J(j_1'j_2'\cdots j_n')}$$

例如，$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}a_{55}$ 是 5 阶行列式中的一项，

$$J=(23145)=2,\ J=(12435)=1$$

于是这一项的符号为 $(-1)^{2+1}=-1$。

若把这一项按行标的自然顺序排列起来，有 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55}$，这时列标的逆序数

$$J(41235)=3$$

得到这一项的符号为 $(-1)^3=-1$。

根据上面的论述，n 阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{J(i_1i_2\cdots i_n)+J(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中，$\sum$是对所有不同行不同列的 n 个元素之积的求和。

1.4 行列式的性质

在上一节中已经提到，直接按定义来计算行列式，有时是很麻烦和困难的。因为当 n 较大时，$n!$ 就是一个惊人的数目，更何况对每一项还要作 n 个元素的乘积，所以需要对行列式作进一步的研究。下面给出了行列式的一系列性质，利用这些性质可以简化行列式的计算。

定义 1.8 把一个 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列依次对调，所得到的行列式