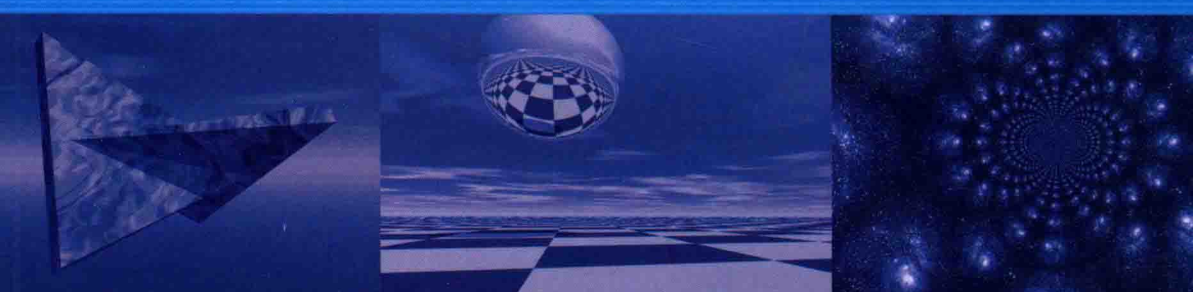
职业教育基础课教学改革规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

第2版

数学教材编写组 编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

职业教育基础课教学改革规划教材

高等数学

第2版

数学教材编写组　编
本套教材　主　编　薛吉伟　王化久
　　　　　主　审　张淑华

机械工业出版社

为了贯彻落实党中央优先办好教育和加强素质教育的指示精神，根据教育部提出的大力发展职业教育的要求，结合我国目前职业教育的现状和特点，在上套“五年制高等职业技术教育教材”的基础上，修改编写了本套教材。

本套教材包括：初等数学、高等数学、应用数学（理工类）、应用数学（经济、管理类）。本书为高等数学，主要内容有：极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分及其应用。

本套教材配合使用，可作为五年制高职教材；亦可单独使用高等数学，作为三年制高职40～60学时用书；还可将高等数学和应用数学配合使用，作为三年制高职（不同专业）80～100学时用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/数学教材编写组编．—2版．—北京：机械工业出版社，2010.6

职业教育基础课教学改革规划教材

ISBN 978-7-111-28729-2

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①数…　Ⅲ.①高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第094498号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码 100037）
策划编辑：宋学敏　责任编辑：常建丽　责任校对：闫玥红
封面设计：王伟光　责任印制：乔　宇
北京瑞德印刷有限公司印刷（三河市胜利装订厂装订）
2010年6月第2版第1次印刷
169mm×239mm·9印张·165千字
0001—3000册
标准书号：ISBN 978-7-111-28729-2
定价：16.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销 售 一 部：（010）68326294
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

第 2 版前言

这套教材是在机械工业出版社出版的“五年制高等职业技术教育教材”的基础上，本着不降低学生素质能力培养的前提下，不求结构合理，不求体系完整，只求浅入浅出，易教乐学的指导思想编写的。

编写中，注意体现职业教育的特点和专业特色，针对目前教学的实际状况，以通俗易懂的实例引入知识，以简单重复的实例强化学生对知识的理解，删减了一些抽象、繁杂的概念和一些不适合职业教育的教学内容，注重学生的数学基本能力的培养，注重学生未来发展的实际需要。

本套教材有以下特点：

1. 注重基础知识

对传统的初等数学、高等数学内容进行精选，把在理论上、方法上以及在现代生产、生活和各类专业学习中得到广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证必要的、基本的数学水准，同时适度更新，增加了逻辑用语、映射、向量、计算器使用简介、计算机软件使用简介等内容，并注意渗透数学建模思想和方法。

2. 教材富有弹性

本套教材采用模块式结构编排，将教材内容分为必学和选学(标有※)，便于各类学校根据不同专业的不同要求灵活选用，增强了教材的弹性和适用性。

3. 浅入浅出，易教易学

针对目前高职学生的数学基础和实际水平，在编写中力求做到降低知识起点、温故知新、浅入浅出，并采用数形结合的方法，以图、表直观地讲解概念、定理，加强分析过程，使教材易教易学。

4. 突出应用与实践，注意培养学生应用数学的意识和能力

本教材采取分散与集中相结合的方式，编排了有价值的习题，引导学生运用所学的数学知识解决日常生活和生产中的简单实际问题，同时尽量安排能够使用计算器、计算机来计算各类数值的例题与习题，培养和提高学生使用计算工具的能力。

为了适应现代化教学的需要，本套教材均配有电子教案，改变了传统的教学模式，减轻了教与学双方的负担，辅助学生对知识的理解，增强学生的接受能力，激发学生的学习兴趣，培养学生勤于动脑、动手的习惯和数学学习的基本能力，为学生将来的继续学习与发展打下良好基础。总之，一切从教学出发，一切

为学生的现在与将来服务。

本套教材包括：初等数学、高等数学、应用数学，应用数学又分为经济、管理类和理工类。本套教材配合使用，可作为五年制高职教材；亦可单独使用高等数学，作为三年制高职 40 ~ 60 学时用书；还可将高等数学和应用数学配合使用，作为三年制高职（不同专业）80 ~ 100 学时用书。本册是高等数学。

参加本册编写的有：刘连福、石业娇、杨俊平、韩亚欧、詹强龙、薛吉伟和王化久。本册主编：薛吉伟、王化久；副主编：韩亚欧；主审：张淑华。

参加本册编写的院校有：大连水产学院职业技术学校、沈阳农业大学高职学院、沈阳市化学工业学校。

本册书在编写过程中，得到了机械工业出版社的热情关怀和帮助，各编、审同志所在学校对编审工作给予了大力支持和帮助，在此表示感谢。对没有参加这次修改工作的原编审教师也一并表示感谢。

数学教材编写组

第1版前言

本教材是根据2000年教育部颁布的全国五年制高等职业教育《〈应用数学基础〉课程基本要求》编写的。在编写过程中紧密围绕高职培养目标，以“必需、够用”为度，遵循“强化能力，立足应用”的原则，在教材内容、体例安排、习题设置等方面，力求体现五年制高等职业教育的特点。

全套书共包括《初等数学》、《高等数学》、《技术数学》三册，供招收初中毕业生的五年制高职院校使用。

本教材有以下特点：

1. 注重基础知识

对传统的初等数学、高等数学内容进行精选，把在理论上、方法上以及在现代生产、生活和各类专业学习中广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证必要的、基本的数学水准，同时适度更新，增加了逻辑用语、映射、向量、计算器使用简介、计算机软件使用简介等内容，并注意渗透数学建模思想和方法。

2. 教材富有弹性

本教材采用模块式结构编排，将教材内容分为必学和选学(标有※)，便于各类学校根据不同专业的不同要求灵活选用，增强了教材的弹性和适用性。

3. 深入浅出，易教易学

针对目前五年制高职学生的数学基础和实际水平，在编写中力求做到降低知识起点，温故知新、深入浅出，并采用数形结合的方法，以图、表直观地讲解概念、定理，加强分析过程，使教材易教易学。

4. 突出应用与实践，注意培养学生应用数学的意识和能力

本教材采取分散与集中相结合的方式，编排了有价值的应用题，基本上每章设有应用节，每节设有应用题，并安排了专题学习内容，列为“应用与实践”，引导学生运用所学的数学知识解决日常生活和生产中的简单实际问题。同时，尽量安排能够使用计算器、计算机来计算各类数值的例题与习题，培养和提高学生使用计算工具的能力。

本册为《高等数学》，内容包括极限与连续、导数及微分、导数的应用、积分及其应用、多元函数微积分，附录中列出了Mathematica使用简介(二)等。在每章、节后配有一定数量的习题、复习题，供教师和学生选用，并附有部分习题答案。

参加本册编写的有：辛虹、郭景石、刘龙、杨俊平、王化久。本册主编：辛虹；副主编：郭景石；主审：井瑞峰。

本册参编院校有：大连水产学院职业技术学院、沈阳职业技术学院机械电子学院、哈尔滨职业学院机电分院、辽宁机电职业技术学院。

本书在编写过程中，曾得到机械工业出版社的热情关怀和指导，各编、审同志所在院校对编审工作给予了大力支持和协助，在此一并致谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大从事职业教育的教师和读者批评指正。

高职数学教材编写组

目　　录

第1章　极限与连续

【学习目标】

1. 了解基本初等函数、复合函数、初等函数的定义，掌握复合函数的分解；

2. 了解极限的定义，会运用极限的运算法则及两个重要极限求函数极限；

3. 理解函数连续性的定义，会判断函数在点 x_0 处的连续性；理解闭区间上连续函数的性质.

1.1　基本初等函数与复合函数

1. 基本初等函数

在《初等数学》中，我们学习了函数的概念，即设 D 为非空数集，x 与 y 是两个变量，如果对变量 x 在 D 中的每一个值，按照某种对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，称 x 为自变量，y 为因变量，对应法则 f 为函数关系. x 的取值范围叫做函数的定义域，与 x 对应的 y 的值叫做函数值，函数值的全体叫做函数的值域.

当 $x=x_0$ 时的函数值记作 $y_0=f(x_0)$.

以前我们学习了函数 $y=x$，$y=x^{-1}$，$y=x^2$，$y=x^3$ 等. 把形如 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）的函数叫做幂函数，还学习了指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，我们把这些函数统称为基本初等函数.

2. 复合函数与初等函数

我们知道物体做简谐振动时的位移 y 与相位 u 之间的关系是 $y=A\sin u$，而相位 u 又是时间 t 的函数 $u=\omega t+\phi$，从而位移 y 与时间 t 的函数关系为 $y=A\sin(\omega t+\phi)$.

定义　设 $y=f(u)$ 是以 u 为自变量的函数，$u=\varphi(x)$ 是以

x 为自变量的函数，如果当 x 在某一数集 I 内取值时，函数 $u=\varphi(x)$ 相应的值能使 $y=f(u)$ 有意义，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，变量 u 称为中间变量.

例 1 写出由函数 $y=\sqrt{u+1}$，$u=e^{t-1}$，$t=2x+1$ 复合而成的函数.

解 回代 $u=e^{t-1}$，得 $y=\sqrt{e^{t-1}+1}$，再代入 $t=2x+1$，得复合函数 $y=\sqrt{e^{2x}+1}$.

例 2 写出下列复合函数的复合过程.

（1）$y=\sqrt{x^2+1}$ （2）$y=\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

解 （1）函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2+1$ 复合而成的.

（2）函数 $y=\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 是由 $y=u^3$，$u=\sin v$ 与 $v=2x-\dfrac{\pi}{4}$ 复合而成的.

由基本初等函数经过有限次运算而得到的，且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

例如，$f(x)=\sqrt{x^2+1}$，$y=\dfrac{x-3}{\ln(x-2)}$ 都是初等函数.

思考：
1. 函数的运算顺序？
2. 最外层运算是什么？
复合函数分解的基本做法是：由外向里逐层进行，使分解出来的每一层都成为基本初等函数或基本初等函数经有限次四则运算得到的函数.

【习题 1-1】

1. 下面各对函数是否表示同一个函数？

（1）$f(x)=1$，$g(x)=\sin^2x+\cos^2x$

（2）$u(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}$，$v(x)=x+1$

（3）$y=x$，$y=(\sqrt{x})^2$

（4）$y=\ln x^3$，$y=3\ln x$

（5）$y=\sin x$，$y=\sqrt{1-\cos^2x}$

2. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$ （2）$y=\sqrt{4-x^2}+\ln(2x-1)$

（3）$y=\dfrac{1}{\lg(x-2)}$ （4）$y=\sqrt{1-e^x}$

(5) $y=\arcsin\frac{x+1}{2}$　　(6) $y=\arccos\frac{x+1}{3}+\ln(9-x^2)$

3. 求下列函数值.

(1) $f(x)=x^2+3$，求 $f(-2)$，$f(1)$，$f[f(0)]$.

(2) $g(x)=\begin{cases}1-2^x, & x\geqslant 0\\ 2-x, & x<0\end{cases}$.

求 $g(2)$，$g(0)$，$g[g(2)]$.

4. 将下列函数复合成复合函数.

(1) $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=2x-4$

(2) $y=\lg u$，$u=1+v^2$，$v=\sin x$

5. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=(3x+1)^{12}$　　(2) $y=\arctan(2x-1)^3$

6. 下列说法是否正确?

(1) 设 $y=\arcsin u$、$u=x^2+3$，则这两个函数可以复合成一个函数;

(2) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域就是 $u=\varphi(x)$ 的定义域;

(3) 函数 $y=\sqrt{\cos(x+3)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$、$u=\cos(x+3)$ 复合而成的.

7. 将下列函数分解成简单函数.

(1) $y=\ln\tan\frac{x^2-1}{2}$　　(2) $y=\sqrt{\sin x^2}$

8. 设 $f(u)$ 的定义域是 $[0,1)$，求下列函数的定义域.

(1) $y=f(x^2)$　　(2) $y=f(2^x-1)$

9. 已知复合函数 $f(x+1)=x^2-3$，求 $f(x)$.

1.2　函数的极限

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

当 x 取负值且绝对值无限增大时的变化趋势，叫做 x 趋向于负无穷大，记作 $x\to-\infty$；当 x 取正值且绝对值无限增大时的变化趋势，叫做 x 趋向于正无穷大，记作 $x\to+\infty$；当 x 既取负值又取正值且绝对值无限增大时的变化趋势，叫做 x 趋向于无穷大，记作 $x\to\infty$.

考察当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=2^x$ 的变化趋势，列出下表：

x	1	2	3	4	5	6	…
$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	…

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	…
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	…

由上表看出，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的值无限接近于0；当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=2^x$ 的值无限接近于0.

定义1 如果当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to+\infty)$$

如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to-\infty)$$

又如，考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势，列出下表：

x	…	-100	-10	-1	1	10	100	…
$f(x)=\frac{1}{x}$	…	-0.01	-0.1	-1	1	0.1	0.01	…

由上表看出，当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的值无限接近于0.

定义2 如果当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

由于数列 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 和数列 $b_n=\frac{1}{n}$ 分别可以看作是上面函数的自变量取正整数时的特殊情形，因此，我们给出数列极限的定义.

定义 3 如果当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=A \text{ 或 } a_n\to A(n\to\infty)$$

这里的 n 只能取正整数.

例 1 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

解 （1）列表观察函数的变化趋势：

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	…
3^x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	…

我们看到，当 $x\to-\infty$ 时有 $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x=0$.

（2）列表观察数列的变化趋势：

n	1	2	3	4	5	6	…
$\left(-\frac{1}{3}\right)^n$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	…

我们看到，当 $n\to\infty$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$.

例 2 考察当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=3^x$ 的变化趋势.

解 列表观察函数的变化趋势：

x	1	2	3	4	5	6	…
3^x	3	9	27	81	243	729	…

我们看到，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=3^x$ 不接近于一个确定的常数，函数值无限增大.

对于这种情形，我们就说函数(或数列)的极限不存在. 像这样，当 x 在某一变化过程中，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大的量叫做无穷大量. 例 2 可记作：$\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$. 又如 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ 等.

当 x 在某一变化过程中，函数 $f(x)$ 以零为极限的量叫做无穷小量. 如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$，我们就说 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是当 $x\to+\infty$ 时的无穷小量.

无穷大量与无穷小量有如下的关系：无穷小量的倒数是无穷大量；无穷大量的倒数是无穷小量.

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

例 3 讨论当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=x+1$ 的变化趋势.

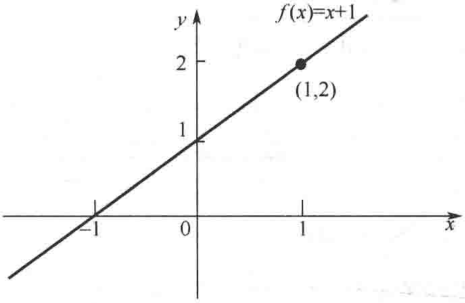


图 1-1

解 如图 1-1 所示，可以看出，无论 x 从小于 1 的方向趋向于 1，还是从大于 1 的方向趋向于 1，函数值总是无限趋近于常数 2，此时，称 2 为函数 $f(x)=x+1$ 当 $x\to1$ 时的极限.

思考：
1. $x\to x_0$ 是指怎样的变化趋势?
2. $x\to x_0^-$ 是指怎样的变化趋势?
3. $x\to x_0^+$ 是指怎样的变化趋势?

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的左右近旁有定义，如果当自变量 x 无限接近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限接近于某个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

定义 4 中，x 以任意方式趋向于 x_0，但有时只能或只需讨论 x 从 x_0 的左侧无限接近于 x_0(记为 $x\to x_0^-$)或从 x_0 的右侧无限接近于 x_0(记为 $x\to x_0^+$)时函数 $f(x)$ 的变化趋势，从而给出下面的定义.

定义 5 如果当 x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数

$f(x)$当$x \to x_0^-$时的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A$$

如果当x从x_0的右侧无限趋近于x_0时，函数$f(x)$的值无限趋近于一个确定的常数A，则称常数A为函数$f(x)$当$x \to x_0^+$时的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A$$

显然

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

例 4 设$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \geqslant 1 \\ 3x, & x < 1 \end{cases}$

试判断$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$是否存在？

解 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (4 - x) = 3$，$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3x = 3$，左、右极限存在且相等，所以$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$存在且$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

思考：在例 4 中
1. 当$x = 1$时，$f(1) = ?$
2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$与$f(1)$有关吗？
3. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$与$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$、$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$的关系？

例 5 判断$\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$是否存在？

解 当$x \to 0^+$时，$\dfrac{1}{x} \to +\infty$，从而$e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$；

当$x \to 0^-$时，$\dfrac{1}{x} \to -\infty$，从而$e^{\frac{1}{x}} \to 0$. 所以，当$x \to 0$时，左极限存在而右极限不存在，故$\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$不存在.

【习题 1-2】

1. 观察下列数列当$n \to +\infty$时的变化趋势，写出极限.

(1) $a_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$ (2) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ (3) $a_n = n!$

2. 观察函数变化趋势，求下列极限的值.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + 2^x)$ (3) $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 1)$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$

3. 已知$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

求$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，并说明$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$是否存在.

4. 观察下列函数，指出哪些是无穷小？哪些是无穷大？

（1）$3x^2$，当 $x \to 0$ 时

（2）$\frac{1}{3-x}$，当 $x \to 3$ 时

（3）$\ln x$，当 $x \to +\infty$ 时

5. 自变量 x 如何变化时，函数 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 是无穷小或无穷大？

6. 设 $f(x)=\begin{cases}3x, & x<0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$

求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，并确定 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在？

1.3 极限的运算

1. 极限的运算法则

定理 1（四则运算法则） 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

定理 2（复合函数的极限） 如果函数 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=A$，且函数 $f(u)$ 在 $u=A$ 处有函数值存在，则有

$$\lim_{x\to x_0}f[u(x)]=f[\lim_{x\to x_0}u(x)]=f(A)$$

由于数列是特殊的函数，因此，定理 1 和定理 2 也适用于数列的极限.

使用极限的运算法则的前提是每一项的极限都是存在的.

定理 1、2 中的条件 $x\to x_0$ 可换成 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$.

定理 2 说明：定理条件满足时，函数的复合运算与极限运算可交换顺序.

例 1 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-7}{x^2-4x+2}$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{1+n^2}$

解 （1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-7}{x^2-4x+2}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x-7)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3x^2+\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}7}{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}4x+\lim\limits_{x\to 1}2}=2$$